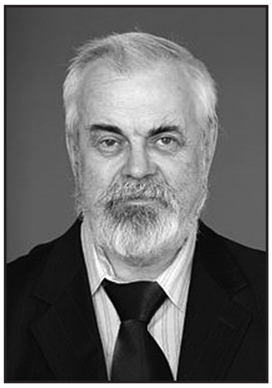

Орлов Александр Иванович
доктор экон. наук, доктор техн. наук, канд. физ.-мат. наук, профессор, зав. лаб. экономико-математических методов в контроллинге МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 303.4; 519.2

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ВРЕМЕНИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ И БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для сетевого планирования и управления комплексом работ по созданию новых изделий (метод PERT) необходимо оценить продолжительность выполнения работ и проектов. Это можно сделать как путем анализа статистических данных с целью точечного и доверительного оценивания ожидаемой продолжительности, так и на основе вероятностного подхода к оценке времени выполнения работ, исходящего из предположения о том, что случайная продолжительность имеет бета-распределение. В статье сопоставляются эти два подхода на примере данных о продолжительности работ и проектов при разработке программно-аппаратных средств информационной безопасности и обсуждаются области их применения. При рассмотрении вероятностного подхода используются оценки метода моментов параметров бета-распределения.

Ключевые слова: *управление проектами, длительность выполнения работы, вероятностный метод, статистический анализ данных, оценивание параметров, метод моментов, бета-распределение, доверительные границы.*

Orlov Alexander, *Doctor of Economics, Doctor of Technical Sciences, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the laboratory of economic and mathematical methods in controlling, BMSTU*

PROBABILISTIC METHOD FOR ESTIMATING WORK COMPLETION TIME AND BETA-DISTRIBUTION

For network planning and management of complex of works on the creation of new products (PERT method), it is necessary to estimate the duration of work and projects. This can be done both by analyzing statistical data for the purpose of a point and confidence assessment of the expected duration, and on the basis of a probabilistic approach to estimating the time of work, based on the assumption that the random duration has a beta-distribution. The article compares these two approaches on the example of data on the duration of work and projects in the development of software and hardware for information security and discusses their areas of applicability. When considering the probabilistic approach, estimates of the method of moments of the parameters of the beta-distribution are used.

Keywords: *project management, duration of work, probabilistic method, statistical data analysis, parameter estimation, method of moments, beta-distribution, confidence bounds.*

Введение

Метод сетевого планирования и управления (метод СПУ) – это метод планирования и управления комплексом работ по созданию новых изделий (инновационных процессов [1, с. 162]. Близкий смысл вкладывается в метод оценки и анализа проектов Program (Project) Evaluation and Review Technique (сокращенно – PERT). Графической моделью всего комплекса работ является сетевой график.

В разделе «Планирование опытно-конструкторских работ» учебного пособия [1, с. 170] сказано: «Особенность оценки продолжительности отдельных работ в системе СПУ в том, что она носит вероятностный характер». Данная статья посвящена вероятностному подходу к оценке времени выполнения работ.

Продолжительность каждой из планируемых работ рассматривается как случайная величина [1, с. 170]. С целью расчета ее характеристик ответственный исполнитель называет «минимальное (оптимистическое) время t_{min} – продолжительность работы при наиболее благоприятном стечении обстоятельств (при этом имеется в виду суждение, например, такое: "Как бы удачно все ни сложилось, но быстрее, чем за 20 дней, мы эту работу не сможем выполнить") и максимальное (пессимистическое) время t_{max} – продолжительность работы при крайне неблагоприятном стечении обстоятельств (при этом предполагается, например, такая оценка: "Как бы неудачно все ни сложилось, но за 30 дней эту работу в любом случае выполним")» [1, с. 170]. В обозначениях настоящей статьи $t_{min} = a$ и $t_{max} = b$.

Далее математическое ожидание случайной величины Y – продолжительности работы – предлагается рассчитывать по формуле:

$$M(Y) = \frac{3a + 2b}{5}, \quad (1)$$

а дисперсию этой случайной величины – по формуле:

$$D(Y) = \left(\frac{b - a}{5}\right)^2 \quad (2)$$

(см. формулы (4.2.3) и (4.2.4) на с. 171 учебного пособия [1]). Эти же формулы приведены и в [2-3].

Возникает естественный вопрос об обосновании этих формул. В [1, с. 170] сказано: «В сетевом планировании применительно к прогнозированию времени выполнения работ используется бета-распределение» (со ссылкой на [4]).

Поэтому обсуждение проблем применения вероятностного подхода к оценке времени выполнения работ целесообразно начать с основных сведений о бета-распределении, затем перейти к методам статистического анализа данных о времени выполнения работ, после чего обсудить обоснование и область применения формул (1) и (2).

Основные сведения о бета-распределении

Случайная величина X имеет бета-распределение, если она принимает значения между 0 и 1 и ее плотность распределения вероятностей такова:

$$f(x) = f(x; p, q) = \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1}(1 - x)^{q-1}, \; 0 < x < 1, \quad (3)$$

где, параметры p и q положительны и:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}, \; \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy, \quad (4)$$

и $f(x) = 0$ для x вне отрезка [0, 1]. Таким образом, бета-распределение задается двумя параметрами p и q и определяется с помощью специальных математических функций – гамма-функции $\Gamma(a)$ и бета-функции $B(p, q)$.

Бета-распределение – одно из основных распределений теории вероятностей. Базовая информация о нем включена в справочники по теории вероятностей и математической статистике [5-7]. Однако методы оценивания параметров и проверки гипотез для выборок из бета-распределения в литературе представлены недостаточно. Так, только в 2023 г. были найдены асимптотические распределения оценок параметров распределения методом моментов [8] и рассмотрена проблема проверки согласия опытных данных с семейством бета-распределений [9].

Пусть X случайная величина, имеющая бета-распределение с плотностью (1). Моменты случайной величины X выражаются через параметры p и q следующим образом [1, с. 145]:

$$M(X) = \frac{p}{p + q}, \quad M(X^2) = \frac{p(p + 1)}{(p + q)(p + q + 1)},$$

$$D(X) = \frac{pq}{(p + q)^2(p + q + 1)}. \quad (5)$$

Можно рассмотреть равенства (5) как систему уравнений относительно параметров p и q (третье уравнение в (5) является следствием первых двух). Решив эту систему (см. [8]), получаем, что:

$$p = \frac{(M(X) - M(X^2))M(X)}{D(X)}, \quad (6)$$

$$q = \frac{(M(X) - M(X^2))(1 - M(X))}{D(X)}. \quad (7)$$

Формулы (6) и (7) дают возможность построить оценки метода моментов p^* и q^* для параметров p и q бета-распределения соответственно. Для этого достаточно заменить в правых частях этих формул начальные моменты на их выборочные оценки.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, функция распределения которых – бета-распределение с параметрами p и q. В качестве оценки математического ожидания $M(X)$ будем использовать выборочное среднее арифметическое:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad (8)$$

а в качестве оценки дисперсии $D(X)$ – выборочную дисперсию:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2. \quad (9)$$

Подставив в (6) и (7) вместо математического ожидания и дисперсии их оценки (8) и (9), получаем оценки метода моментов параметров p и q:

$$p^* = \overline{X}\{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{s^2} - 1\}, (10)$$

$$q^* = (1-\overline{X})\{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{s^2} - 1\}. (11)$$

Именно в таком виде оценки метода моментов для параметров бета-распределения приведены в [6, с. 75]. Поскольку в доступной литературе мы не нашли вывода формул (10) – (11), то сочли полезным подробно разобрать получение этих формул в статье [8].

Для решения прикладных задач часто используют линейную функцию от случайной величины X, имеющей бета-распределение с плотностью (3):

$$Y = a + hX, \quad -\infty < a < +\infty, \; h > 0. \quad (12)$$

Согласно (3) плотность случайной величины Y положительна при $a < x < b$, где $b = a + h$, и равна:

$$f_{a,b}(x) = f(x; a, b, p, q) = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1}B(p,q)} \cdot$$

$$\cdot\ (x-a)^{p-1}(b+a-x)^{q-1}, \; a < x < b. \quad (13)$$

Говорят, что случайная величина Y имеет бета-распределение на интервале $(a; b)$ с параметрами p и q. На практике принимают, что значения a и b заданы, а параметры p и q необходимо оценить по статистическим данным – по выборке $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$. От этой выборки естественно перейти в соответствии с (12) к выборке $X_1 + X_2 + \dots + X_n$, где:

$$X_i = \frac{Y_i - a}{h} = \frac{Y_i - a}{b - a}, \; i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Элементы этой выборки принимают значения между 0 и 1 и имеют рассмотренное ранее бета-распределение на интервале (0; 1) с параметрами p и q. Алгоритм получения оценок этих параметров описан выше. На первом этапе необходимо получить выборочное среднее арифметическое и выборочную дисперсию для выборки (62). Очевидно, что:

$$\overline{X} = \frac{\overline{Y} - a}{h},$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{(b-a)^2}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2). \quad (15)$$

Дальнейшие этапы алгоритма расчета значений оценок параметров p и q бета-распределения на интервале (a; b) не требуют изменения.

Для случайной величины X, распределенной с плотностью (3) на интервале (0; 1), в соответствии с (1) и (2) имеем $M(X) = 2/5$; $D(X) = 1/25$. Согласно (5):

$$M(X) = \frac{p}{p+q} = \frac{2}{5}, \; D(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} = \frac{1}{25}. \quad (16)$$

Система (16) имеет единственное решение $p = 2$, $q = 3$ (см. [8]). Таким образом, в предположении, что случайная продолжительность Y каждой из планируемых работ имеет бета-распределение на интервале $(a; b)$, равенства (1) и (2) справедливы тогда и только тогда, когда $p = 2$, $q = 3$.

Обратим внимание на то, что понятие «ожидаемое время выполнения работы» требует уточнения. Можно рассматривать математическое ожидание, медиану, моду. Для случайной величины X, распределенной с плотностью (3) на интервале (0; 1), согласно [6] мода, обозначенная как $mod(X)$, такова:

$$mod(X) = \frac{p-1}{p+q-2}, \; p > 1, \; q > 1. \quad (17)$$

Для $p = 2$, $q = 3$ согласно $mod(X) = 0{,}33$. В качестве ожидаемого времени выполнения работы будем использовать математическое ожидание.

Анализ статистических данных о длительности выполнения работы

В выпускной квалификационной работе бакалавра «Разработка методики прогнозирования длительности выполнения проектных работ в АО "Актив-Софт"» (кафедра «Экономика и органи-

Длительность выполнения работы 0–1

Таблица 1

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Y_i	21	17	17	24	20	17	23	29	25	23	21	17	21	27	27	26	21	26
i	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Y_i	29	20	29	17	29	19	23	18	24	19	28	24	22	21	18	25	21	28

зация производства» МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023 г.), А.О. Петрова рассматривала проекты по разработке программно-аппаратных средств информационной безопасности (СЗИ). Был построен сетевой график выполнения проектов, включающий 15 событий и работ. В табл. 1 приведены собранные ею данные о продолжительности (в часах) одной из работ, а именно, работы 0-1 «Описание и анализ данных о текущих бизнес-процессах у Заказчика, выявление потенциальных проблем и узких мест».

По данным табл. 1, для выборки объема $n = 36$ были рассчитаны А.О. Петровой минимальное значение $Y(1) = 17$ (ч.), максимальное значение $Y(36) = 29$ (здесь $Y(k)$ – член вариационного ряда с номером k), выборочное среднее арифметическое $\overline{Y} = 21$ и выборочная дисперсия $s^2 = 16$.

Найдем доверительные границы для математического ожидания $M(Y)$. Согласно требованиям контроллинга статистических методов [10] при анализе статистических методов следует начать с построения вероятностно-статистической модели. Как обычно в прикладной статистике, принимаем, что элементы выборки $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ – независимые одинаково распределенные величины с математическим ожиданием $M(Y)$. Как обосновано в [11], нет оснований предполагать, что функция распределения этих величин входит в какое-либо параметрическое семейство распределений, например, в семейство нормальных распределений. Другими словами, будем считать эту функцию распределения произвольной, т.е. рассмотрим непараметрическую модель. Тогда доверительный интервал для математического ожидания $M(Y)$ имеет вид:

$$\left(\overline{Y} - C(\gamma)\frac{s(Y)}{\sqrt{n}};\ \overline{Y} + C(\gamma)\frac{s(Y)}{\sqrt{n}}\right), \quad (18)$$

где, $s(Y)$ – выборочное среднее квадратическое отклонение для выборки $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$, коэффициент $C(\gamma)$ определяется принятым значением доверительной вероятности γ. В социально-экономических исследованиях чаще всего используют значение $\gamma = 0{,}95$. Тогда $C(\gamma) = C(0{,}95) = 1{,}96$. Формула (18) дает асимптотический доверительный интервал, ею можно пользоваться при достаточно объемах выборки (несколько десятков элементов) [11].

С математической точки зрения для справедливости (18) должны быть выполнены определенные предположения о случайной величине Y. Достаточно потребовать существования первых трех начальных моментов. Однако при анализе реальных данных обычно распределение Y является финитным (т.е. оно сосредоточено на некотором отрезке), а потому все моменты существуют [11].

Для данных табл. 1 доверительный интервал имеет вид (для $\gamma = 0{,}95$):

$$\left(21 - 1{,}96\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}};\ 21 + 1{,}96\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}}\right) = (19{,}7;\ 22{,}3).$$

Применение модели бета-распределения

Для анализа выборок из бета-распределения на интервале $(a;\ b)$ необходимо знать значения a и b. Иногда эти значения известны из нормативно-технической документации. В других случаях, как в исследовании А.О. Петровой, при их значениях нет априорной информации. Очевидно, что $a \leqslant (1)$ и $b \geqslant Y(n)$. Примем для определенности $a = \mathrm{Y}(1)$ и $\mathrm{b} = Y(n)$, т.е. для данных табл. 1 $a = 17$ и $b = 29$.

По формуле (14) перейдем к бета-распределению на интервале (0; 1). Рассмотрим выборку $X_1, X_2, \ldots, X_{36}$. Для нее согласно (15):

$$\overline{X} = \frac{\overline{Y} - a}{h} = \frac{21 - 17}{29 - 17} = 0{,}333,$$

$$s^2 = \frac{1}{(b-a)^2}\, s^2(Y) = \frac{16}{12^2} = 0{,}111.$$

Соответствуют ли эти величины формулам (1) и (2)? Согласно (16) должно быть выполнено равенство $M(X) = 0{,}4$. Можно ли считать отличие 0,333 от 0,4 статистически незначимым? Для ответа на этот вопрос необходимо применить теорию проверки статистических гипотез, рассмотрев и в качестве нулевую гипотезу H_0: $M(X) = B = 0{,}4$ аль-

Длительность выполнения проектов СЗИ

Таблица 2

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Z_i	154	145	163	154	155	152	162	164	148	141	165	146
i	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Z_i	150	163	156	151	134	165	162	147	154	153	164	155
i	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Z_i	157	151	166	146	167	167	144	153	150	156	179	162

тернативной гипотезы H_1 ее отрицание. На уровне значимости 0,05 решение принимается на основе значения статистики критерия:

$$Q=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-B}{s}=\sqrt{36}\,\frac{0333-0,4}{\sqrt{0,111}}=\frac{-6\cdot 0,067}{0,333}=-1,21$$

по правилу: если $|Q| \leqslant 1,96$, то нулевая гипотеза принимается, если же $|Q| > 1,96$, то отклоняется (и принимается альтернативная гипотеза) [11]. В рассматриваемом случае нулевая гипотеза принимается, т.е. отличие выборочного среднего арифметического от 0,4 незначимо с точки зрения прикладной статистики.

Дисперсия, рассчитанная по данным табл. 1, равна 0,111, что значительно отличается от значения 0,04, соответствующего формуле (2) (см. (16)). Найдем по формулам (10) и (11) оценки метода моментов параметров p и q для данных табл. 1:

$$p^*=0,333\{\frac{0,333\cdot 0,067}{0,111}-1\}=0,333,$$

$$q^*=0,667.$$

Эти значения далеки от значений $p = 2$, $q = 3$, соответствующих формулам (1) и (2).

В [8] разработаны методы расчета доверительных границ и проверки гипотез для параметров p и q. Эти методы достаточно трудоемки, и в настоящей работе мы их не приводим. Оказывается, длины доверительных интервалов настолько велики, что они включают значения $p = 2$ и $q = 3$ соответственно. Это связано со сравнительно малым объемом выборки. Если бы имелось $n = 10000$ элементов выборки, результат, возможно, был бы другим. Дело в том, что в формулах типа (18) дисперсия оценок параметров бета-распределения имеет порядок $Const / n$, и при $n = 36$ доверительные интервалы для данных табл. 1 весьма широки и включают значения $p = 2$ и $q = 3$ (см. также результаты расчетов доверительных границ в [8] для выборки объемом $n = 50$).

Анализ данных о длительности выполнения проектов

Эти данные, собранные А.О. Петровой, приведены в табл. 2. Для выборки объема $n = 36$ найдены минимальное значение $Y(1) = 134$ (ч.), максимальное значение $Y(36) = 179$ (ч.), выборочное среднее арифметическое $\overline{Y} = 151$ и (ч.) и выборочная дисперсия $s^2 = 109$.

Проанализируем эти данные аналогично данным табл. 1. Как и ранее, принимаем, что элементы выборки $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ – независимые одинаково распределенные величины с математическим ожиданием $M(Y)$. В соответствии с (18) для доверительной вероятности 0,95 доверительный интервал для математического ожидания $M(Y)$ таков:

$$(151-1,96\frac{\sqrt{109}}{\sqrt{36}};\ 151+1,96\frac{\sqrt{109}}{\sqrt{36}})=(147,59;\ 154,41).$$

Применим модель бета-распределения. Для данных табл. 1 надо принять $a = 134$ и $b = 179$.

По формуле (14) перейдем к бета-распределению на интервале (0; 1). Рассмотрим выборку $X_1, X_2, ..., X_{36}$. Для нее согласно (15):

$$\overline{X}=\frac{\overline{Y}-a}{h}=\frac{151-134}{179-134}=0,378,$$

$$s^2=\frac{1}{(b-a)^2}\,s^2(Y)=\frac{109}{45^2}=0,0538.$$

Для проверки нулевой гипотезы H_0: $M(X) = B = 0,4$ (альтернативная гипотеза H_1 – отрицание H_0) вычислим статистику критерия:

$$Q=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-B}{s}=\sqrt{36}\,\frac{0378-0,4}{\sqrt{0,0538}}=\frac{-6\cdot 0,022}{0,232}=-0,569$$

Поскольку $|Q| \leqslant 1,96$, то нулевая гипотеза принимается.

Дисперсия, рассчитанная по данным табл. 2, равна 0,0538, что несколько отличается от значения 0,04, соответствующего формуле (2) (см. (16)).

Найдем по формулам (10) и (11) оценки метода моментов параметров p и q для данных табл. 2:

$$p^* = 0{,}378\{\frac{0{,}378 \cdot 0{,}622}{0{,}0538} - 1\} = 0{,}378 \cdot 4{,}37 = 1{,}65,$$

$$q^* = 2{,}89.$$

Эти значения несколько отличаются от значений $p = 2$ и $q = 3$, соответствующих формулам (1) и (2).

Уточнить сказанное можно было, вычислив доверительные границы для параметров бета-распределения по алгоритмам, разработанным в [8]. Эти алгоритмы основаны на асимптотической нормальности оценок параметров p^* и q^*. Результаты расчетов показывают, что, как и для данных табл. 1, доверительные интервалы для данных табл. 2 весьма широки и включают значения $p = 2$ и $q = 3$.

О проверке согласия с бета-распределением

Методы проверки согласия опытного распределения с семейством бета-распределений обсуждаются в статье [9]. Однако хорошо известно, что по выборкам объемом в несколько десятков элементов нельзя надежно установить тип распределения [11]. Так, данные, приведенные в табл. 1 (статьи [9]), согласуются как с семейством бета-распределений [9], так и семейством гамма-распределений [11]. Известно, что для того, чтобы выбрать между семейством нормальных распределений и семейством логистических распределений, объем выборки должен быть не менее 2500 [11].

Известно, что базовые исследования по рассматриваемой в настоящей статье тематике были выполнены в 60-е годы [12-13]. Вероятностная модель Д.И. Голенко [12] базируется на использовании бета-распределении. Проведенные Д.И. Голенко и его коллегами многочисленные эмпирические исследования показали, что величины p и q, усредненные по большому количеству типов проектов, концентрируются около постоянных значений $p = 2$ и $q = 3$. С тех пор формулы (1) и (2) можно встретить в различных публикациях и квалификационных работах без каких-либо попыток обоснования возможности их использования.

По мнению автора, необоснованное использование формул (1) и (2) может рассматриваться как нарушение основных требований к статистическим методам анализа данных [10]. Есть ли основания полагать, что распределение времени выполнения опытно-конструкторских работ не менялось более чем полвека – с 60-х годов, а также является одним и тем же для всех типов организаций и предприятий? Как считает автор, справедливость такого утверждения нуждается в тщательном обосновании, которое еще предстоит провести.

Вместе с тем применение бета-распределений представляется достаточно естественным. Именно это параметрическое семейство сосредоточено на конечном отрезке (этим оно выделяется среди всех рассматриваемых в теории вероятностей и математической статистике параметрических семейств распределений непрерывных случайных величин) и при различных значениях параметров охватывает различные формы плотностей распределения вероятностей. Однако точечные и интервальные оценки параметров распределения необходимо рассчитывать по статистическим данным, соответствующим конкретным видам опытно-конструкторских работ, выполняемых в той ли иной организации, на том или ином предприятии.

Дополнительные проблемы возникают в связи с обоснованием выбора значений a и b – начальной и конечной точек интервала, на котором сосредоточено бета-распределение. В проведенных выше расчетах $a = Y(1)$ и $b = Y(n)$. Однако эти значения могут резко исказить выбросы, т.е. элементы выборки, которые значительно отличаются от других. Причиной появления выброса могут быть ошибки измерения. Или же засорение выборки значением, соответствующим другому распределению [11]. Например, для данных табл. 2. максимальное значение $Y(36) = 179$ (ч.), а следующее по величине $Y(35) = 167$. Если значение 179 – выброс, то его надо исключить и анализировать выборку объемом 35. Тогда:

$$\overline{Y} = \frac{151 \cdot 36 - 179}{35} = 150{,}2,$$

$$\overline{X} = \frac{\overline{Y} - a}{h} = \frac{150{,}2 - 134}{167 - 134} = \frac{16{,}2}{33} = 0{,}491.$$

Значение 0,491 уже заметно отличается от значения 0,4, соответствующего формулам (1) – (2). Можно подсчитать, что выборочная дисперсия выборки Y_1, Y_2, ..., Y_{35} уменьшится до 89,06. Рассмотрим выборку X_1, X_2, ..., X_{36}. Для нее, согласно (15):

$$s^2 = \frac{1}{(b-a)^2} s^2(Y) = \frac{89{,}06}{33^2} = 0{,}0818$$

Для проверки нулевой гипотезы H_0: $M(X) = B = 0{,}4$ вычислим статистику критерия:

$$Q = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - B}{s} = \sqrt{35}\,\frac{0{,}491 - 0{,}4}{\sqrt{0{,}0818}} = \frac{5{,}916 \cdot 0{,}091}{0{,}286} = 1{,}88$$

Таким образом, нулевая гипотеза принимается на уровне значимости 0,05, хотя значение статистики критерия близко к критическому 1,96. На уровне значимости 0,1 нулевая гипотеза отклоняется, поскольку для этого уровня значимости критическое значение равно 1,64.

По формулам (10) и (11) найдем оценки метода моментов параметров p и q:

$$p^* = 0{,}491\{\frac{0{,}491 \cdot 0{,}509}{0{,}0818} - 1\} = 0{,}491 \cdot 3{,}055 = 1{,}500,$$

$$q^* = 0{,}509 \cdot 3{,}055 = 1{,}555.$$

Дисперсия, рассчитанная по данным табл. 2 после исключения максимального значения, равна 0,0818, что более чем в 2 раза превышает значение 0,04, соответствующее формуле (2).

Выводы

Если имеются статистические данные о длительности выполнения работ и проектов, то нет необходимости обращаться к модели на основе бета-распределения, поскольку среднюю продолжительность и ее дисперсию можно рассчитать непосредственно. При анализе данных, приведенных в табл. 1 и 2, установлено, что оценки параметров бета-распределения всегда более или менее отличаются от значений параметров p = 2 и q = 3, равносильных формулам (1) и (2). При этом средняя продолжительность работ достаточно хорошо соответствует формуле (1), а ее выборочная дисперсия может значительно отличаться от правой части формулы (2).

По мнению автора, целесообразно продолжить изучение устойчивости статистических выводов относительно допустимых отклонений значений исходных данных и предпосылок модели, используя подходы монографии [14].

Литература:

1. Скворцов Ю.В. Организационно-экономические вопросы в дипломном проектировании. – М.: Высшая школа, 2006. – 399 с.
2. Организация и планирование машиностроительного производства (производственный менеджмент): учебник для вузов / Некрасов Л.А., Постникова Е.С., Скворцов Ю.В., Уханова Т.В.; ред. Скворцов Ю.В. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Студент, 2019. – 412 с.
3. Ганина Г.Э., Клементьева С.В. Управление инновационными проектами: учебное пособие. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 36 с.
4. Разумов И.М., Белова Л.Д., Ипатов М.И., Проскуряков А.В. Сетевые графики в планировании / 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1981. – 168 с.
5. Balakrishnan N., Nevzorov V.B. A primer of statistical distributions. – New Jersey: Wiley-Interscience, 2003. – 328 pp.
6. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.
7. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Большая Рос. Энцикл., 1999. – 910 с.
8. Orlov A.I. Statistical analysis of samples from the beta distribution // Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University. – 2023. – No. 187. – P. 184-206.
9. Orlov A.I. Goodness-of-fit testing with beta distribution by the method of moments // Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University. – 2023. – No. 189. – P. 82-97.
10. Орлов А.И. Контроллинг статистических методов // Журнал «Контроллинг». 2022. № 4 (86). С. 2-11.
11. Орлов А.И. Прикладной статистический анализ: учебник. – М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 812 с.
12. Голенко Д.И. Статистические методы сетевого планирования и управления. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 400 с.
13. Кофман А., Дебазей Г. Сетевые методы планирования. Применение системы ПЕРТ и ее разновидностей при управлении производственными и научно-исследовательскими проектами: пер. с фр. – М.: Прогресс, 1968. – 182 с.
14. Орлов А.И. Устойчивые экономико-математические методы и модели: монография. – М.: Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 337 с.

References:

1. Skvorcov Ju.V. Organizacionno-jekonomicheskie voprosy v diplomnom proektirovanii. – M.: Vysshaja shkola, 2006. – 399 s.
2. Organizacija i planirovanie mashinostroitel'nogo proizvodstva (proizvodstvennyj menedzhment): uchebnik dlja vuzov / Nekrasov L.A., Postnikova E.S., Skvorcov Ju.V., Uhanova T.V.; red. Skvorcov Ju.V. – 3-e izd., pererab. i dop. – M.: Student, 2019. – 412 s.
3. Ganina G.Je., Klement'eva S.V. Upravlenie innovacionnymi proektami: uchebnoe posobie. – M.: MGTU im. N.Je. Baumana, 2014. – 36 s.
4. Razumov I.M., Belova L.D., Ipatov M.I., Proskurjakov A.V. Setevye grafiki v planirovanii / 3-e izd., pererab. i dop. – M.: Vysshaja shkola, 1981. –168 s.
5. Balakrishnan N., Nevzorov V.B. A primer of statistical distributions. – New Jersey: Wiley-Interscience, 2003. – 328 pr.
6. Hastings N., Pikok Dzh. Spravochnik po statisticheskim raspredelenijam. – M.: Statistika, 1980. – 95 s.

7. Verojatnost' i matematicheskaja statistika: Jenciklopedija / Gl. red. Ju.V. Prohorov. – M.: Bol'shaja Ros. Jencikl., 1999. – 910 s.

8. Orlov A.I. Statistical analysis of samples from the beta distribution // Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University. – 2023. – No. 187. – P. 184-206.

9. Orlov A.I. Goodness-of-fit testing with beta distribution by the method of moments // Polythematic Online Scientific Journal of Kuban State Agrarian University. – 2023. – No. 189. – P. 82-97.

10. Orlov A.I. Kontrolling statisticheskih metodov // Zhurnal «Kontrolling». 2022. № 4 (86). S. 2-11.

11. Orlov A.I. Prikladnoj statisticheskij analiz: uchebnik. – M.: Aj Pi Ar Media, 2022. – 812 c.

12. Golenko D.I. Statisticheskie metody setevogo planirovanija i upravlenija. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1968. – 400 s.

13. Kofman A., Debazej G. Setevye metody planirovanija. Primenenie sistemy PERT i ee raznovidnostej pri upravlenii proizvodstvennymi i nauchno-issledovatel'skimi proektami: per. s fr. – M.: Progress, 1968. – 182 s.

14. Orlov A.I. Ustojchivye jekonomiko-matematicheskie metody i modeli: monografija. – M.: Aj Pi Ar Media, 2022. – 337 c.