REFERENCES

[1] H. A. D y e, On the ergodic mixing theorem, Trans. Amer. Math. Soc., 118 (1965), 123—130.

[2] E. G r a n i r e r, On finite equivalent invariant measures for semi-groups of transformations, Duke Math. Jour., 38 (1971), 395—408.

[3] P. R. H a l m o s, Lectures on Ergodic Theory, Tokyo, The Math. Soc. of Japan, 1956.

ОДНА ТЕОРЕМА О КАТЕГОРИИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

С. НАТАРАДЖАН (АНГЛИЯ)

(*Резюме*)

Доказывается, что множество пар коммутирующих автоморфимов интервала [0,1 с лебеговой мерой, порождающих группы со слабым перемешиванием, является плот ным множеством типа G_δ в пространстве всех пар коммутирующих автоморфизмов с слабой топологией.

О ПРОВЕРКЕ СИММЕТРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

А. И. ОРЛОВ

Рассматриваются n независимых случайных величин с одной и той же непрерывной функцией распределения $F(x)$, которая предполагается неизвестной. Требуется проверить гипотезу о симметричности $F(x)$ относительно точки $x = 0$:

$$F(-x) = 1 - F(x). \tag{1}$$

Для решения этой задачи в данной заметке конструируется критерий типа ω^2. Другие методы развиты в [1], [2], [10].

1. В качестве аппроксимации для $F(x)$ применим оценку обобщенного максимального правдоподобия (определение дано, например, в [3]) $F_n^*(x) = {}^1/_2\,(F_n(x) + (1 - F_n(-x))$, где $F_n(x)$ — функция эмпирического распределения. Положим

$$\xi_n(x) = \sqrt{2n}\,(F_n(x) - F_n^*(x)). \tag{2}$$

Конечномерные распределения процесса $\xi_n(x)$ сходятся к конечномерным распределениям гауссовского процесса $\xi(x)$, для которого $\xi(x) = \xi(-x)$, $M\xi(x) = 0$, $M\xi(x)\xi(y) = F(x)$ при $x \leqslant y \leqslant 0$. (При замене $t = F(x)$ из $\xi(x)$ получаем винеровский процесс на $[0, {}^1/_2\,]$). Легко видеть, что $\xi_n(x)$ ортогонален всем удовлетворяющим (1) дифференцируемым функциям распределения в смысле метрики

$$< H(x),\ G(x) > = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\frac{dH(x)\,dG(x)}{dx} \tag{3}$$

(весовая функция $p(x)$ кусочно-непрерывна, причем $p(x) = p(-x)$). Методами [4] (гл. IX, §§ 5, 8) доказывается

Утверждение 1. *Для любого непрерывного (в соответствующем смысле) функционала f распределение $f(\xi_n(x))$ сходится к распределению $f(\xi(x))$. В частности, это верно* *для функционалов*

$$f_0(y) = \sup_{-\infty < x \leqslant 0} y(x),\quad f_1(y) = \sup_{-\infty < x \leqslant 0} |y(x)|,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{0} y^2(x)\, dF(x).$$

Используя свойства винеровского процесса, можно строить различные критерии. Ясно, например, что критерии, основанные на f_0, f_1 и f_2, состоятельны.

Распределения $f_0(\xi_n(x))$ и $f_1(\xi_n(x))$ изучал Н. В. Смирнов [1] в 1947 году. Автор [8], следуя эвристическому подходу Дуба [9], предлагает критерии, основанные на f_0 и f_1. Автор [8] не знаком с [1], и его результаты 1969 года покрываются [1].

К сожалению, нельзя, не зная $F(x)$, вычислить $f_2(\xi_n(x))$. Поэтому заменим $F(x)$ статистикой $F_n(x)$.

2. Пусть функция $g(x)$ не убывает, функция $f(x)$ не имеет разрывов второго рода.

Лемма. *Можно так определить* $\int_a^b f(x)\, dg(x)$, *чтобы* 1) *такой интеграл был линеен по* f; 2) *если* $f_1 \geqslant f_2$, *то* $\int f_1 dg \geqslant \int f_2 dg$; 3) $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$ *при* $a \leqslant b \leqslant c$; 4) $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$.

В дальнейшем будут использоваться лишь свойства 1, 2, 3, 4 интеграла.

Можно рассматривать интеграл Лебега — Стилтьеса. Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют скачки в точке a, то на значение интеграла влияет $f(a)$. Может оказаться полезным изменить значение f в a так, чтобы $f(a) = l(a)\ f(a-) + (1 - l(a))\, f(a+)$, где $0 \leqslant l(a) \leqslant 1$.

Пусть функция $H(u)$ определена в интервале $0 < u \leqslant u_0$. Будем называть $H(u)$ правильно меняющейся в $(0, u_0]$, если $H(u) > 0$ и существует функция $k(\lambda)$, $0 < \lambda \leqslant \leqslant 1$, такая, что $k(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to 1$ и

$$\frac{H(u')}{H(u'')} \leqslant k(\lambda) \text{ при } \lambda \leqslant \frac{u'}{u''} \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{4}$$

3. **Теорема 1.** *Пусть* $G_n(x)$ — *неубывающие функции на* $[-\infty, 0]$, *и пусть по вероятности* $G_n(x) \to F(x)$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $x \in [-\infty, 0]$. *Пусть для определенной на* $(-\infty, 0]$ *непрерывной и неотрицательной функции* $h(x)$ *выполнено неравенство* $h(x)\, F(x) \ln|\ln F(x)| < C < \infty$, *а* $H(u) = h(F^{-1}(u))$ *правильно меняется в окрестности* 0. *Пусть интегралы обладают перечисленными в лемме свойствами. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int_{-\infty}^{0} h(x)\,\xi_n^2(x)\, dG_n(x) - \int_{-\infty}^{0} h(x)\,\xi_n^2(x)\, dF(x)\right| > \varepsilon\right\} \to 0. \tag{5}$$

Для доказательства а) в нижних пределах $-\infty$ заменим на $A > -\infty$, б) — приблизим ξ_n кусочно-постоянными функциями, точки скачков которых фиксированы, в) — докажем (5) для этих функций. Выберем $\delta > 0$ и установим, что при $n > n(\delta)$ вероятность в (5) меньше δ.

а) Из закона повторного логарифма для винеровского процесса и условия теоремы следует, что для некоторого A с вероятностью $1 - \delta/5$ при $x \leqslant A$ выполнено неравенство $h(x)\xi^2(x) < 3C$. Из теоремы 1 работы [6] (как сообщил автору Д. М. Чибисов, правильного изменения $h(F^{-1}(u))$ достаточно требовать в форме (4)) следует, что при $n > n_1(\delta)$ и $x \leqslant A$ с вероятностью не менее $1 - \delta/4$ выполнены неравенства $h(x)\xi_n^2(x) < < 3C$. Используя лемму, получаем аналогичные неравенства для интегралов. За счет уменьшения A значения $F(A)$ и $G_n(A)$ можно сделать достаточно малыми (по вероятности). В результате при $n > n_1(\delta)$ с вероятностью не менее, чем $1 - \delta/3$, при замене нижнего предела интегрирования на A разность в (5) изменится меньше, чем на $\varepsilon/3$.

б) Рассмотрим точки $a_0, a_1, \ldots, a_m$, такие, что $F(a_i) = i/2m$, $a_0 = -\infty$. Для кусочно-непрерывной с разрывами лишь первого рода функции $y(x)$ определим $g(y(x), m)$, равную $y^2(a_i)$ при $a_i < x \leqslant a_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$. Рассмотрим функционалы $f_3(y) = \sup\limits_{-\infty<x\leqslant 0} y^2(x)$ и $f(y, m) = f_3(y(x) - g(y(x), m))$. Легко видеть, что $f(\xi(x), m) \to 0$ по вероятности при $m \to \infty$. Выберем такое m, что $g(\xi(x), m) - \varepsilon_1 \leqslant \xi^2(x) \leqslant g(\xi(x), m) + \varepsilon_1$ с вероятностью не менее, чем $1 - \delta/4$. Утверждение 1 верно для функционала $f_3(y)$. Конечномерные распределения процесса $\xi_n - g(\xi_n, m)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi - g(\xi, m)$. Из теоремы 2 § 5 гл. IX [4] и утверждения 1 следует, что распределение $f(\xi_n(x), m)$ сходится к распределению $f(\xi(x), m)$, хотя функционал $f(y, m)$ не является непрерывным в соответствующем смысле. Таким образом, при $n > n_2(\delta)$ имеем: $g(\xi_n(x), m) - \varepsilon_1 \leqslant \xi_n^2(x) \leqslant g(\xi_n(x), m) + \varepsilon_1$ с вероятностью, большей $1 - \delta/3$. Непрерывная функция $h(x)$ ограничена на отрезке $[A, 0]$ сверху числом B, поэтому

$$h(x)\, g(\xi_n(x), m) - B\varepsilon_1 \leqslant h(x)\, \xi_n^2(x) \leqslant h(x)\, g(\xi_n(x), m) + B\varepsilon_1.$$

Используя лемму, получаем аналогичные неравенства для интегралов. При подстановке $g(\xi_n(x), m)$ вместо $\xi_n^2(x)$ каждый из интегралов $\int\limits_A^0 h(x)\, \xi_n^2(x)\, dG_n(x)$ и $\int\limits_A^0 h(x)\, \xi_n^2(x)\, dF(x)$ изменится не более, чем на $B\varepsilon_1$ (можно положить $\varepsilon_1 = \varepsilon/6B$). Итак, при $n > n_2(\delta)$ с вероятностью не менее, чем $1 - \delta/3$, разность в (5) (нижние пределы интегрирования — A) при замене подынтегральных выражений их приближениями изменится не более, чем на $\varepsilon/3$.

в) С вероятностью 1 ни одна из точек $a_1, \ldots, a_m$ не входит в выборку, поэтому почти наверное (A можно считать одним из a_i)

$$\left|\int\limits_A^0 h(x)\, g(\xi_n(x), m)\, dG_n(x) - \int\limits_A^0 h(x)\, g(\xi_n(x), m)\, dF(x)\right| =$$
$$= \left|\sum_{a_i \geqslant A} \xi_n^2(a_i) \left\{\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} h(x)\, dG_n(x) - \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} h(x)\, dF(x)\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{a_i \geqslant A} \xi_n^2(a_i) \cdot \sum_{a_i \geqslant A} \left|\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} h(x)\, dG_n(x) - \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} h(x)\, dF(x)\right|. \tag{6}$$

(Для удобства положено $a_{m+1} = a_m = 0$). Используя ограниченность по вероятности $\xi_n(x)$, ограниченность и равномерную непрерывность $h(x)$ на $[A, 0]$, получаем, что правая часть (6) не превосходит

$$K \sum_{j=1}^{m_1} |G_n(b_j) - G_n(b_{j-1}) - F(b_j) + F(b_{j-1})| + \varepsilon/6,$$

где K — некоторое число, точки b_j $(j = 0, \ldots, m_1)$ отрезка $[A, 0]$ фиксированы, $b_{m_1+1} = 0$. Из условия теоремы следует, что при $n > n_3(\delta)$ с вероятностью $\geqslant 1 - \delta/3$ последнее выражение меньше $\varepsilon/3$.

Полагая $n(\delta) = \max(n_1, n_2, n_3)$, убеждаемся в справедливости теоремы. Другим методом аналогичный (менее общий) результат получен в [5].

4. Рассмотрим случай $h \equiv 1$, $G_n = F_n$. Одним из значений интеграла является ($x_1, \ldots, x_n$ — выборка):

$$(1/n) \sum_{i=1}^{n} \xi_n^2(x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \{F_n(x_i) + F_n(-x_i) - 1\}^2. \tag{7}$$

Легко видеть, что значения интеграла при различных выборах l отличаются друг от друга, почти наверное, не более, чем на $1/2n$; для вычислений можно выбирать любые l При интегрировании по $F_n^*(x)$ максимальная разница между значениями также $1/2n$.

Введем функционал $L(b(x)) = \int\limits_{-\infty}^{0} (\xi(x) + b(x))^2 dF(x)$. Из результатов, установленных в пункте 3, и утверждения 1 следует, что $\int\limits_{-\infty}^{0} \xi_n^2(x)\,dG_n(x)$ имеет в пределе при $n\to\infty$ то же распределение, что и $L(0)$. Разложив $\xi(x)$ в ряд ([4], гл. V, §3), получим: $L(0) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \xi_k^2/(2k+1)^2\pi^2$, где $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые нормальные величины со средним 0 и дисперсией 1.

Рассмотрим альтернативные гипотезы. Пусть выборке соответствует функция распределения $H(x) = F(x) + \sqrt{2/n}\, a(x)$, где $F(x)$ удовлетворяет (1). Тогда процессу $\xi_n(x)$ из (2) соответствует $\eta_n(x) + b(x) = \sqrt{2n}\,(H_n(x) - H_n^*(x))$, где $b(x) = a(x) + a(-x)$. Если $n\to\infty$, то по вероятности $H_n(x)$ сходится к $F(x)$, и конечномерные распределения $\eta_n(x)$ сходятся к конечномерным распределениям $\xi(x)$. При некоторых ограничениях на $b(x)$ (достаточно, чтобы непрерывная $b(x)$ была ограничена) из аналогов утверждения 1 и теоремы (п.3) следует, что $\int\limits_{-\infty}^{0} (\eta_n(x) + b(x))^2 dH_n(x)$ имеет в пределе то же распределение, что и $L(b(x))$. О мощности критерия, основанного на $L(0)$, сформулируем следующее

Утверждение 2. *При $c\to\infty$ по вероятности*

$$\frac{L(cb_1(x))}{L(cb_2(x))} \to \int\limits_{-\infty}^{0} b_1^2(x)\,dF(x) \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{0} b_2^2(x)\,dF(x),$$

если нижний интеграл справа отличен от 0.

Доказательство осуществляется разложением $L(b(x))$ в ряд, аналогичный ряду для $L(0)$. Формулировка соответствующего асимптотического утверждения очевидна.

5. Рассмотрим некоторые обобщения. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_m$ — непересекающиеся области на прямой. Пусть заданы взаимно однозначные отображения $G_i\colon A_0\to A_i$, $i = 1, \ldots, m$. Будем оценивать функцию распределения $F(x)$, о которой известно лишь (взамен (1)), что вероятность попасть в одну из областей $A_0, A_1, \ldots, A_m$ равна 1, что всюду существует плотность $f(x) = F'(x)$, и выполнено условие

$$f(x) = f(G_i(x))\cdot|G_i'(x)|;\quad i = 1, \ldots, m;\ x\in A_0. \tag{8}$$

Пусть $c(x) = x$ при $x\in A_0$, $G_i(c(x)) = x$ при $x\in A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Применяя метод обобщенного максимального правдоподобия, при некоторых ограничениях на $G_1(x), \ldots, G_m(x)$ (достаточно непрерывности вторых производных) получаем оценку $F_n^*(x)$, имеющую скачки величиной $1/(m+1)n$ в точках $c(x_j), G_1(c(x_j)), \ldots, G_m(c(x_j))$; $j = 1, \ldots, n$ (см. (7)). Ясно, что $F_n^*(x)$ — состоятельная оценка $F(x)$. При соответствующем выборе весовой функции $p(x)$ разность $F_n(x) - F_n^*(x)$ в смысле метрики (3) будет ортогональна всем функциям распределения $H(x)$, для которых рассматриваемая гипотеза справедлива. Достаточно, чтобы для любого $x_0\in A_0$ функция $p(x)\,h(x)$ принимала одно и то же значение в точках $x_0, G_1(x_0), \ldots, G_m(x_0)$, где $h(x) = H'(x)$ (см. (8)).

Пусть $A_0 = (-\infty, a_0)$. Рассмотрим для $x\leqslant a_0$ процессы $\alpha_n(x) = \sqrt{n}\,(F_n^*(x) - F(x))$ и $\beta_n(x) = \sqrt{n}\,(F_n(x) - F_n^*(x))$. Конечномерные распределения $\alpha_n(x)$ сходятся к конечномерным распределениям $v((m+1)F(x))/(m+1)$, где $v(s)$ —

Таблица

x	$S(x)$	x	$S(x)$	x	$S(x)$
0,000	0,0000000	0,500	0,9696850	1,000	0,9980828
020	1090357	520	9729687	040	9984532
040	2988227	540	9758841	080	9987512
060	4347773	560	9784745	120	9989913
080	5328109	580	9807779	160	9991848
0,100	0,6069192	0,600	0,9828274	1,200	0,9993409
120	6651505	620	9846522	240	9994669
140	7122236	640	9862778	280	9995686
160	7510634	660	9877268	320	9996507
180	7535899	680	9890191	360	9997171
0,200	0,8111307	0,700	0,9901722	1,400	0,9997708
220	8346457	720	9912015	480	9998494
240	8548546	740	9921207	560	9999009
260	8723127	760	9929419	640	9999348
280	8874587	780	9936759	720	9999570
0,300	0,9006453	0,800	0,9943321	1,800	0,9999716
320	9121604	820	9949191	880	9999813
340	9222416	840	9954442	960	9999876
360	9310872	860	9959141	2,040	9999918
380	9388638	880	9963348	120	9999946
0,400	0,9457124	0,900	0,9967115	2,200	0,9999964
420	9517529	920	9970490	400	9999987
440	9570881	940	9973513	600	9999995
460	9618062	960	9976222	800	9999998
480	9659832	980	9978650	3,000	9999999

условный винеровский процесс на $[0, 1]$ при условии $v(1) = 0$. Конечномерные распределения $\beta_n(x)$ сходятся к конечномерным распределениям $\sqrt{1 - 1/(m+1)} \times W(F(x))$, где $W(t)$ — винеровский процесс на $[0, 1/(m+1)]$. Результаты, установленные в пунктах 3 и 4, переносятся и на рассматриваемый случай.

6. Для вычисления функции распределения $S(x) = \mathbf{P}\{L(0) < x\}$ Г. В. Мартынов использовал составленную им программу получения распределения $\Sigma\lambda_i\xi_i^2$, где $\{\xi_i\}$ — независимые в совокупности стандартные нормальные величины. Одна из его таблиц приведена в конце заметки.

Теорема 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $c(\varepsilon)$, *такое, что при всех* n

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| \mathbf{P}\left\{ \int_{-\infty}^{0} \xi_n^2(y)\, dF_n(y) < x \right\} - S(x) \right| \leqslant c(\varepsilon)\, n^{-1/2+\varepsilon}. \tag{9}$$

Гипотеза: *нельзя заменить* $1/2$ *в* (9) *на большее число.*

Теорема 2, так же, как и теоремы 1, 2, 3 в [7], является следствием более общих результатов, которые будут опубликованы в следующих работах автора.

Автор благодарен Ю. Н. Тюрину за постановку задачи и помощь в работе, Л. Н. Большеву и Д. М. Чибисову, внимание которых весьма способствовало улучшению формы и содержания заметки, Г. В. Мартынову за вычисление функции распределения $S(x)$ и предоставленные материалы.

Поступила в редакцию
11.12.70

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Смирнов, О критерии симметрии закона распределения случайной величины, ДАН СССР, 56, 1 (1947), 13—16.

[2] J. Hemelrijk, A family of parameterfree tests for symmetry, Proc. Kon. Ned. Akad. (section of sciences), 53 (1950), 945—955; 1186—1198.

[3] Ю. Н. Тюрин, Об оценивании функции распределения, Теория вероят. и ее примен., XV, 3 (1970), 567—568.

[4] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, М., Изд-во «Наука», 1965.

[5] M. Rosenblatt, Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic, Ann. Math. Statist., 23, 4 (1952), 617—623.

[6] Д. М. Чибисов, Некоторые теоремы о предельном поведении эмпирической функции распределения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, L XXI, (1964), 104—112.

[7] А. И. Орлов, Оценки скорости сходимости к пределу распределений некоторых статистик, Теория вероят. и ее примен., XVI, 3 (1971), 583—584.

[8] Butler Calvin, A test for symmetry using the sample distribution function, Ann. Math. Statist., 40, 6 (1969), 2209—2210.

[9] J. L. Doob, Heuristic approach to the Kolmogorov — Smirnov theorems, Ann. Math. Statist., 20 (1949), 393—403.

[10] Koul Hira Hal, Asymptotic normality of random rank statistics Ann. Math. Statist., 41, 6 (1970), 2144—2149.

ON TESTING THE SYMMETRY OF DISTRIBUTION

A. I. ORLOV (MOSCOW)

(*Summary*)

Let $F(x)$ be an unknown distribution function. The hypothesis to be tested is the symmetry of $F(x)$ at $x = 0$: $F(-x) = 1 - F(x)$. A test of the ω^2-test type is constructed, and its asymptotic properties are investigated.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В. Д. КОНАКОВ

Ряд методов статистической классификации основан на вычислении отношения правдоподобия. Например, в простейшем случае классификации по двум совокупностям с наличием обучающих последовательностей строят по этим последовательностям оценки соответствующих плотностей распределения, а затем очередное наблюдение Z относят к первой или второй совокупности, в зависимости от того, больше или меньше 1 отношение упомянутых оценок в точке Z. Отсюда понятна необходимость иметь оценки неизвестных плотностей распределения, обладающие достаточно хорошими свойствами, такими как несмещенность, состоятельность и т. п. Построению подобных оценок посвящен ряд работ [1] — [4]. В работах [2] — [4] рассмотрен случай одномерных наблюдений. Обобщение результатов [2] и [3] на многомерный случай дано в работе [1].

В статье [1] найден класс оценок плотности распределения, которые являются асимптотически несмещенными, состоятельными и асимптотически нормальными. Ниже