МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 30, № 4 (1981)

СВЯЗЬ МЕЖДУ СРЕДНИМИ ВЕЛИЧИНАМИ И ДОПУСТИМЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ШКАЛЫ

А. И. Орлов

1. Одним из этапов многих процедур обработки данных является сравнение двух совокупностей объектов. Для этого обычно каждому объекту приписывают число (например, с помощью измерения или экспертной оценки), по некоторым формулам рассчитывают средние для наборов чисел, соответствующих каждой из совокупностей объектов, и затем сравнивают полученные средние. Естественно потребовать, чтобы сделанные на основе этого выводы зависели лишь от исходной информации, но не от способа ее обработки. В заметке изучается устойчивость результата сравнения средних двух совокупностей по отношению к допустимым преобразованиям шкалы.

2. Рассмотрим n-мерное, $n \geqslant 2$, пространство $\mathbf{R}^n$ векторов $X = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Функцию $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ называют средним, если

$$\min \{x^i,\ i = 1, \ldots, n\} \leqslant f(X) \leqslant \max \{x^i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

при любом $X \in \mathbf{R}^n$ (см. [1, стр. 64]). Укажем некоторые виды средних.

Вариационный ряд получается из совокупности чисел $x^1, x^2, \ldots, x^n$ с помощью их перестановки в порядке неубывания: $x(1) \leqslant x(2) \leqslant \ldots \leqslant x(n)$. В качестве средних используют члены вариационного ряда, в частности, медиану $x([n/2] + 1)$.

Пусть $F\colon A \to \mathbf{R}^1$, $A \subseteq \mathbf{R}^1$,— строго монотонная функция (т. е. строго возрастающая или строго убывающая) со связной областью определения A, F^{-1} — обратная к ней.

Средним является

$$g(X) = F^{-1}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a^i F(x^i)\right), \tag{1}$$

где $0 \leqslant a^i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $a^1 + \ldots + a^n = 1$. При $F(x) = x$, $\ln x$, x^{-1}, x^2 имеем среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратическое соответственно. В трех последних случаях $A = (0, +\infty)$. При $a^i = n^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$, формула (1) дает общий вид так называемых ассоциативных средних, полученный А. Н. Колмогоровым, М. Нагумо и Б. де Финетти в 1930—31 годах, исходя из некоторой системы аксиом [1, стр. 151].

3. Пусть φ — строго возрастающее преобразование прямой или луча в себя, т. е. преобразование шкалы. Обозначим $\varphi(X) = (\varphi(x^1), \varphi(x^2), \ldots, \varphi(x^n)) \in \mathbf{R}^n$.

Преобразование шкалы φ называем допустимым относительно функции $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$, если $f(X_1) < f(X_2)$ тогда и только тогда, когда $f(\varphi(X_1)) < f(\varphi(X_2))$, при всех $X_1, X_2 \in \mathbf{R}^n$.

Будем изучать две задачи.

I. Дана совокупность $\Phi = \{\varphi\}$ преобразований шкалы. Найти все средние f из данного класса, для которых все $\varphi \in \Phi$ являются допустимыми.

II. Дано среднее f. Найти все преобразования шкалы φ, допустимые относительно f.

4. Автором в [2, § 3.3] доказана следующая теорема, решающая задачу I для совокупности Φ_0 всех строго возрастающих бесконечно дифференцируемых преобразований шкалы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* а) *любое* $\varphi \in \Phi_0$ *является допустимым относительно среднего* f; б) $f(X)$ *непрерывна как функция* $X \in \mathbf{R}^n$; в) f *является симметрической функцией, т. е. не меняется при любой перестановке аргументов:* $f(X) = f(x^1, \ldots, x^n) = f(x(1), \ldots, x(n))$. *Тогда найдется* i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *такое, что* $f(X) = x(i)$ *при всех* $X \in \mathbf{R}^n$.

5. Рассмотрим задачу II для средних вида (1).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть преобразование шкалы* φ *переводит в себя область определения* F *из* (1), F *и* φ *дифференцируемы, причем* F' *не обращается в* 0. *Пусть* φ *допустимо относительно* $g(X)$ *из* (1). *Тогда существуют числа* $a > 0$ *и* b *такие, что*

$$\varphi(x) = F^{-1}(aF(x) + b) \tag{2}$$

для всех x из области определения F. Обратно, если φ имеет вид (2), *то φ допустимо относительно g.*

Доказательство. Из строгой монотонности F следует, что φ допустимо относительно $g(X)$ тогда и только тогда, когда φ допустимо относительно $F(g(X))$. Поскольку

$$F(g(X)) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a^i F(x^i),$$

то естественно ввести новые переменные $y^i = F(x^i)$, $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что φ допустимо относительно $F(g(X))$ тогда и только тогда, когда

$$\mu(y) = F(\varphi(F^{-1}(y))) \tag{3}$$

допустимо относительно

$$h(y^1, \ldots, y^n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a^i y^i.$$

Функция μ определена на связном множестве $F(A)$ и в силу условий теоремы 2 дифференцируема.

По крайней мере два из коэффициентов a^i, $i = 1, \ldots, n$, в (1) отличны от 0 и 1. Без ограничения общности можно считать, что таковы a^1, a^2.

Зафиксируем $y^3, \ldots y^n$. Обозначим $Y = (y^1, y^2)$. Тогда μ допустимо относительно

$$d(Y) = a^1 y^1 + a^2 y^2.$$

Предположим, что $\mu'(y_0) < 0$ при некотором $y_0 \in F(A)$. Положим $y_1^1 = y_1^2 = y_0$, $y_2^1 = y_2^2 = y_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $d(Y_1) < d(Y_2)$, однако

$$d(\mu(Y_1)) - d(\mu(Y_2) = -\mu'(y_0)(a^1 + a^2)\varepsilon + o(\varepsilon) > 0$$

при достаточно малом ε, вопреки определению допустимости. Следовательно, $\mu'(y) \geqslant 0$ при всех $y \in F(A)$.

Предположим, что $\mu'(y') \neq \mu'(y'')$ при некоторых y' и y'' из $F(A)$. Положим $y_1^1 = y'$, $y_1^2 = y''$, $y_2^1 = y' - \varepsilon$, $y_2^2 = y'' + \varepsilon'$, где ε и ε' положительны. Тогда

$$d(Y_1) - d(Y_2) = a^1\varepsilon - a^2\varepsilon',$$
$$d(\mu(Y_1)) - d(\mu(Y_2)) = a^1\mu'(y')\varepsilon - a^2\mu'(y'')\varepsilon' + o(\varepsilon + \varepsilon')$$

при достаточно малых ε и ε'. Для получения противоречия с определением допустимости достаточно подобрать ε и ε' так, чтобы

$$(a^1\varepsilon - a^2\varepsilon')(a^1\mu'(y')\varepsilon - a^2\mu'(y'')\varepsilon') < 0. \qquad (4)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mu'(y'') > 0$. Если

$$\varepsilon' = \frac{a^1(\mu'(y') + \mu'(y''))}{2a^2\mu'(y'')}\,\varepsilon,$$

то неравенство (4) справедливо. Следовательно, $\mu'(y') = \mu'(y'')$ при любых y' и y'' из $F(A)$. Поскольку $F(A)$ связно, то существуют числа $a \geqslant 0$ и b такие, что

$$\mu(y) = ay + b. \qquad (5)$$

В случае $a = 0$ имеем противоречие с определением допустимости. Значит, $a > 0$.

Полагая $x = F^{-1}(y)$, получаем с помощью (3) и (5), что

$$\varphi(x) = F^{-1}(\mu(y)) = F^{-1}(aF(x) + b),$$

а это и требовалось доказать.

Если φ имеет вид (2), то в соответствии с (3) μ задается формулой (5). Ясно, что такое μ допустимо относительно $h(y^1, \ldots, y^n)$, откуда и следует обратное утверждение теоремы.

6. Рассмотрим задачу I для средних вида (1). Отметим сначала, что различные функции F могут задавать одно и то же среднее. Так, среднее арифметическое получается при $F(x) = cx + d$, $c \neq 0$, c и d — любые числа.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть дифференцируемые функции F_1 и F_2 определены на одном и том же множестве, причем F_2' не обращается в* 0, *средние $g_1(X)$ и $g_2(X)$ имеют вид* (1):

$$g_1(X) = F_1^{-1}\left(\textstyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_1^i F_1(x^i)\right),$$
$$g_2(X) = F_2^{-1}\left(\textstyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_2^i F_2(x^i)\right)$$

и $g_1(X) = g_2(X)$ при всех X из области определения. Тогда при некоторых $c \neq 0$ и d

$$F_1(X) = cF_2(X) + d \qquad (6)$$

и, кроме того,

$$a_1^i = a_2^i, \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad (7)$$

Обратно, из справедливости (6) *и* (7) *вытекает, что $g_1(X) = g_2(X)$ при всех X из области определения.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что F_2 строго возрастает, $a_2^2 \geqslant a_2^1 > 0$. Тогда $a_1^1 > 0$. Из условия теоремы следует, что

$$\sum\nolimits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_1^i F_1(x^i) = F_1\left(F_2^{-1}\left(\sum\nolimits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_2^i F_2(x^i)\right)\right). \tag{8}$$

Продифференцируем обе части (8) по x^1:

$$a_1^1 F_1'(x^1) = \left.\frac{\mathrm{d}F_1(F_2^{-1}(z))}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} a_2^1 F_2'(x^1), \tag{9}$$

где

$$z_0 = \sum\nolimits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_2^i F_2(x^i). \tag{10}$$

Пусть a и b входят в область определения F_1 и F_2, $a < b$. Покажем, что существует число z_0' такое, что для любого $x^1 \in [a, b]$ можно так подобрать $x^2, x^3, \ldots, x^n$, чтобы $z_0 = z_0'$ при всех $x^1 \in [a, b]$, где z_0 определено в (10).

Пусть $x^3, \ldots, x^n$ произвольны. Положим

$$z_0' = a_2^1 F_2(a) + a_2^2 F_2(b) + \sum\nolimits_{3 \leqslant i \leqslant n} a_2^i F_2(x^i).$$

При увеличении x^1 будем уменьшать x^2 так, чтобы

$$a_2^1 F_2(x^1) + a_2^2 F_2(x^2) = a_2^1 F_2(a) + a_2^2 F_2(b),$$

т. е. положим

$$x^2 = F_2^{-1}\left(F_2(b) + \frac{a_2^1}{a_2^2}\left(F_2(a) - F_2(x^1)\right)\right). \tag{11}$$

Поскольку $a_2^2 \geqslant a_2^1 > 0$, то при этом $x^2 \in [a, b]$, если $x^1 \in [a, b]$, т. е. определение x^2 с помощью (11) корректно.

Поскольку $z_0 = z_0'$ при всех $x^1 \in [a, b]$ и $a_1^1 \neq 0$, то из (9) вытекает, что

$$F_1'(x^1) = cF_2'(x^1) \tag{12}$$

при всех $x^1 \in [a, b]$ и соответствующем c. При этом $c \neq 0$, поскольку F_1 — строго монотонная функция. Поскольку a и b — произвольные числа из связной области определения F_i, $i = 1, 2$, то (12) выполнено при всех x^1 из области определения, а потому справедливо (6).

Поскольку к $cF(x)+d$ обратной функцией является $F^{-1}(c^{-1}(x-d))$, то, как легко видеть, из (6) вытекает, что

$$F_1^{-1}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a^i F_1(x^i)\right) = F_2^{-1}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a^i F_2(x^i)\right).$$

Следовательно, осталось показать, что в случае $F_1 = F_2$ из $g_1(X) = g_2(X)$ (при всех X из области определения) вытекает (7). Зафиксируем $x^2, \ldots, x^n$ и рассмотрим (8) при $x^1 = a$ и $x^1 = b$. Вычтя первое равенство из второго и разделив на $F_1(b) - F_1(a)$, получим $a_1^1 = a_2^1$. Прочие равенства в (7) доказываются аналогично.

Соглашение. Вследствие теоремы 3 указываем в дальнейшем $F(x)$ лишь с точностью до линейного преобразования.

7. ТЕОРЕМА 4. *Пусть преобразование* $\varphi(x) = ax + b$, $a \neq 1$, *допустимо относительно среднего* $g(X)$ *вида* (1), *функция* F *дифференцируема, точка* $x_0 = b(1-a)^{-1}$ *входит в область определения* F, *причем* F' *непрерывна в* x_0 *и* $F'(x_0) \neq 0$. *Тогда* $F(x) = x$.

Доказательство. По теореме 2 существуют $a_1 > 0$ и b_1 такие, что

$$F(ax+b) = a_1 F(x) + b_1. \tag{13}$$

Продифференцируем обе части (13) по x:

$$aF'(ax+b) = a_1 F'(x). \tag{14}$$

Положим $x = x_0$. Поскольку $ax_0 + b = x_0$ и $F'(x_0) \neq 0$, то из (14) вытекает, что $a = a_1 > 0$. Значит, для F' справедливо функциональное уравнение $F'(ax+b) = F'(x)$. Положив $t(x) = F'(x+x_0)$, перейдем к уравнению

$$t(x) = t(ax). \tag{15}$$

Функция $t(x)$ непрерывна при $x = 0$.

При решении уравнения (15) без ограничения общности можно считать $a < 1$. Для произвольного x рассмотрим последовательность $x_n = a^n x$, $n = 1, 2, \ldots$ Для нее $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $t(x_n) \to t(0)$. Однако в силу (15) $t(x_n) = t(x)$, значит, $t(x) = t(0)$. В прежних обозначениях $F'(x) = F'(x_0)$ для любого x из связной области определения F, что с учетом принятого выше соглашения доказывает теорему.

Отметим, что в соответствии с теоремой 2 преобразования $\varphi(x) = ax + b$ являются допустимыми относительно

$g(X)$ вида (1) с $F(x) = x$, т. е. относительно среднего арифметического.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть преобразования* $\varphi(x) = x + c$ *допустимы при любом* c *относительно* $g(X)$ *вида* (1) *с непрерывно дифференцируемой функцией* F. *Тогда* $F(x) = \exp\{\alpha x\}$ *при некотором* $\alpha \neq 0$ *или* $F(x) = x$. *Обратно, если* F *имеет указанный вид, то преобразования* $\varphi(x) = x + c$ *допустимы относительно* $g(X)$ *при любом* c.

Доказательство. По теореме 2 существуют функции $a(c) > 0$ и $b(c)$ такие, что

$$F(x + c) = a(c) F(x) + b(c). \tag{16}$$

Продифференцируем обе части (16) по x:

$$F'(x + c) = a(c) F'(x). \tag{17}$$

Поскольку F строго монотонна, то существует точка x_0 такая, что $F'(x_0) \neq 0$. Из (17) при $x = x_0$ вытекает, что

$$a(c_1 + c_2) = a(c_1)\, a(c_2) \tag{18}$$

при любых c_1 и c_2. Из непрерывности F' с учетом (17) следует непрерывность $a(c)$ как функции c. Как известно [3, п. 75, стр. 158—159], все непрерывные решения уравнения (18) имеют вид

$$a(c) = d^c, \quad d > 0 \tag{19}$$

(решение $a(c) \equiv 0$ несовместимо со строгой монотонностью F). Из (17) и (19) вытекает, что

$$F'(x) = d^x F'(0) = F'(0) \exp\{x \ln d\}.$$

Проинтегрировав, получим (с учетом принятого соглашения) функции F указанного в заключении теоремы вида. Обратное утверждение теоремы 5 легко проверяется с помощью обратного утверждения теоремы 2 (в (2) достаточно положить $b = 0$).

8. Следствие 1. *Пусть преобразование* $\varphi(x) = ax^b$, $x > 0$, $b \neq 1$, *допустимо относительно среднего* $g(X)$ *вида* (1), *область определения* F *входит в* $(0, +\infty)$ *и содержит точку* $x_0 = \exp\{(1 - b)^{-1} \ln a\}$, *функция* F *дифференцируема,* F' *непрерывна в* x_0 *и* $F'(x_0) \neq 0$. *Тогда* $F(x) = \ln x$.

Следствие 2. *Пусть преобразования* $\varphi(x) = ax$ *допустимы при любом* $a > 0$ *относительно* $g(X)$ *вида* (1) *с непрерывно дифференцируемой функцией* F, *область оп-*

ределения которой входит в $(0, +\infty)$. *Тогда* $F(x) = x^\alpha$ *при некотором* $\alpha \neq 0$ *или* $F(x) = \ln x$. *Обратно, если* F *имеет указанный вид, то преобразования* $\varphi(x) = ax$ *допустимы относительно* $g(X)$ *при любом* $a > 0$.

С помощью замены переменной $y = \ln x$ следствия 1 и 2 сводятся к теоремам 4 и 5 соответственно.

Следствие 3. *Пусть преобразования* $\varphi(x) = x^b$ *допустимы относительно* $g(X)$ *вида* (1) *при всех* $b > 0$; *область определения непрерывно дифференцируемой функции* F *входит в* $(1, +\infty)$. *Тогда* $F(x) = (\ln x)^\alpha$ *при некотором* $\alpha \neq 0$ *или* $F(x) = \ln \ln x$. *Обратно, если* F *имеет указанный вид, то преобразования* $\varphi(x) = x^b$ *допустимы относительно* $g(X)$ *при любом* $b > 0$.

С помощью замены переменной $y = \ln\ln x$ следствие 3 сводится к теореме 5.

9. Интерес к рассматриваемым задачам стимулирован прикладной теорией измерений [2, 4]. Некоторые применения следствия 2 в статистике объектов нечисловой природы указаны в [5].

Автор искренне благодарен С. Б. Стечкину за полезные обсуждения.

Центральный экономико-математический институт АН СССР [1])

Поступило 27.VI.1980

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Джини К., Средние величины, М., «Статистика», 1970.

[2] Орлов А. И., Устойчивость в социально-экономических моделях, М., «Наука», 1979.

[3] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, М., «Наука», 1966.

[4] Орлов А. И., Задачи оптимизации и нечеткие переменные, М., «Знание», 1980.

[5] Орлов А. И., Случайные множества: законы больших чисел, проверка статистических гипотез, Теория вероятн. и ее примен., **23**, № 2 (1978), 462—464.

---

1) В настоящее время автор работает во Всесоюзном научно-исследовательском институте стандартизации Государственного комитета СССР по стандартам.