УДК 303.732.4 : 519.2

08.00.13 Математические и инструментальные методы экономики (экономические науки)

СВОЙСТВА ОБЩЕЙ СХЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, prof-orlov@mail.ru

Математические модели могут давать лишь приближенное представление о реальных явлениях и процессах. Исходные данные известны лишь с некоторой точностью, математические зависимости всегда несколько отличаются от реальных. Поэтому изучение устойчивости выводов относительно допустимых отклонений исходных данных и предпосылок модели – один из этапов построения математической модели, предназначенной для практического использования. Нами разработан подход к изучению устойчивости выводов в математических моделях. Центральное место в нем занимает новый математический объект - общая схема устойчивости. Основное содержание настоящей статьи - изучение математических свойств общей схемы устойчивости. Так называется кортеж из пяти элементов {*A*, *B*, *f*, *d*, *E*}, где *A* –пространство исходных данных; *B* – пространство решений; *f* – способ получения выводов, т.е. однозначное отображение из *A* в *B*; неотрицательная функция *d*, определенная на подмножествах множества *B*, используется для определения показателей устойчивости; *E* - совокупность допустимых отклонений, т.е. система подмножеств множества *A* такая, что каждому элементу множества исходных данных и каждому значению параметра из некоторого множества параметров соответствует подмножество множества исходных данных (оно называется множеством допустимых отклонений в точке при определенном значении параметра). Способ получения выводов иногда для краткости называем *моделью*. Во многих конкретных постановках устойчивости выводы получают с помощью определенного метода, основанного на некоторой модели. С прикладной точки зрения модель первична, метод – вторичен, поскольку результаты его применения определяются свойствами модели. Введена система показателей устойчивости выводов, получаемых с помощью математических моделей. Они определяются с помощью метрики, псевдометрики или показателя различия (меры близости) как диаметр множества. В серии из 7 теорем показано, что оптимизационные задачи,

UDC 303.732.4 : 519.2

Mathematical and instrumental methods of Economics

PROPERTIES OF THE GENERAL SCHEME OF STABILITY

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Mathematical models can give only an approximate idea of real phenomena and processes. The initial data are known only with some accuracy, the mathematical dependencies are always somewhat different from the real ones. Therefore, the study of the stability of conclusions regarding the permissible deviations of the initial data and model premises is one of the stages in constructing a mathematical model intended for practical use. We have developed an approach to the study of the stability of conclusions in mathematical models. Central to it is a new mathematical object - the general scheme of stability. The main content of this article is the study of the mathematical properties of the general stability scheme. This is the name of the tuple of five elements {*A*, *B*, *f*, *d*, *E*}, where *A* is the source data space; *B* is the decision space; *f* is a method of obtaining conclusions, i.e. unique mapping from *A* to *B*; the non-negative function *d*, defined on the subsets of the set *B*, is used to determine the stability indices; *E* is the set of permissible deviations, i.e. a system of subsets of the set *A* is such that each element of the set of source data and each value of the parameter from some set of parameters corresponds to a subset of the set of initial data (it is called the set of permissible deviations at a point for a certain value of the parameter). The method of obtaining conclusions is sometimes called a *model* for brevity. In many specific statements of stability, conclusions are obtained using a certain method based on some model. From an applied point of view, the model is primary, the method is secondary, since the results of its application are determined by the properties of the model. A system of indicators of the stability of conclusions obtained using mathematical models is introduced. They are determined using a metric, pseudometrics or an indicator of differences (proximity measures) as the diameter of the set. In a series of 7 theorems, it was shown that optimization problems corresponding to various stability indices have solutions, i.e. exact upper bounds are achieved with certain values of the arguments. A number of other properties of the general scheme of stability are considered.

соответствующие различным показателям устойчивости, имеют решения, т.е. точные верхние грани достигаются при определенных значениях аргументов. Рассмотрен ряд иных свойств общей схемы устойчивости

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ЭКОНОМИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ТОПОЛОГИЯ, ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ, СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ, АСИМПТОТИКА, ПРИНЦИП УРАВНИВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Keywords: MATHEMATICAL MODELS, ECONOMY, STABILITY, TOPOLOGY, OPTIMIZATION PROBLEMS, EXISTENCE OF SOLUTIONS, ASYMPTOTICS, PRINCIPLE OF ERROR EQUATIONS

DOI: http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-161-010

1. Введение

Математические модели могут давать лишь приближенное представление о реальных явлениях и процессах. Исходные данные известны лишь с некоторой точностью, математические зависимости всегда несколько отличаются от реальных. Поэтому изучение устойчивости выводов относительно допустимых отклонений исходных данных и предпосылок модели – один из этапов построения математической модели (см. [1, с.288-303], [2] и др.). Нами разработан новый подход к изучению устойчивости выводов в математических моделях, подробно рассмотренный в [3 - 5]. Центральное место в нем занимает т.н. "общая схема устойчивости". Основное содержание настоящей статьи - изучение математических свойств общей схемы устойчивости.

2. Общая схема устойчивости

Проблемы устойчивости обсуждались многими авторами и с разных точек зрения, начиная, по крайней мере, с устойчивости по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений. Например, случай «общего положения» соответствует переходу к «мягкой модели» в терминологии В.И. Арнольда [6]. В настоящей статье рассматривается только система научных результатов, к которым автор имеет отношение, следовательно, она не претендует на обзор различных постановок задач изучения устойчивости.

Необходим математический аппарат для описания проблем устойчивости выводов, получаемых на основе математических моделей социально-экономических явлений и процессов. Предлагаем использовать следующие базовые понятия [3 - 5].

Определение 1. Общей схемой устойчивости называется кортеж {*A*, *B*, *f*, *d*, *E*}, где:

A – множество, интерпретируемое как пространство исходных данных;

B – множество, называемое пространством решений;

f – способ получения выводов, т.е. однозначное отображение $f: A \to B$;

d – показатель устойчивости, т.е. неотрицательная функция, определенная на подмножествах *У* множества *B* и такая, что из $Y_1 \subseteq Y_2$ вытекает $d(Y_1) \le d(Y_2)$;

$E = \{E(x, \theta), x \in A, \theta \in \Theta\}$ – совокупность допустимых отклонений, т.е. система подмножеств множества *A* такая, что каждому элементу множества исходных данных $x \in A$ и каждому значению параметра θ из некоторого множества параметров Θ соответствует подмножество $E(x, \theta)$ множества исходных данных. Оно называется множеством допустимых отклонений в точке *x* при значении параметра, равном θ .

Способ получения выводов иногда будем для краткости называть *моделью*. Во многих конкретных постановках устойчивости выводы получают с помощью определенного метода, основанного на некоторой модели. С прикладной точки зрения модель первична, метод – вторичен, поскольку результаты его применения определяются свойствами модели.

Это соображение оправдывает принятую нами в [4] терминологию общей схемы устойчивости.

Часто показатель устойчивости $d(Y)$ определяется с помощью метрики, псевдометрики или показателя различия (меры близости) ρ как диаметр множества Y, т.е. $d(Y) = \sup\{\rho(y_1, y_2), y_1 \in Y, y_2 \in Y\}$. Т.е. в пространстве решений с помощью показателя устойчивости вокруг образа исходных данных сформирована система окрестностей. В пространстве исходных данных подобная система – это E, т.е. совокупность допустимых отклонений, $E(x,\theta)$ - окрестность радиуса θ вокруг точки x.

Определение 2. Показателем устойчивости в точке x при значении параметра, равном θ, называется число

$$\beta(x, E(x,\theta)) = d(f(E(x,\theta))\ -$$

- диаметр образа множества допустимых отклонений при отображении, рассматриваемом в качестве модели (способа получения выводов).

Определение 3. Абсолютным показателем устойчивости в точке x называется число

$$\beta(x, E) = \inf\{\beta(x, E(x,\theta)), \theta \in \Theta)\}.$$

Рассмотрим два конкретных типа математических моделей. В теории измерений [7] окрестностью исходных данных являются все те вектора, что получаются из исходного путем преобразования координат с помощью допустимого преобразования шкалы, которое берется из соответствующей группы допустимых преобразований. В статистике интервальных данных [8, 9] под окрестностью исходных данных естественно понимать – при описании выборки – куб с ребрами 2Δ и центром в исходном векторе, где Δ - максимальная абсолютная погрешность измерения. В обоих случаях максимальное сужение не означает сужение к точке.

Определение 4. Абсолютным показателем устойчивости на пространстве исходных данных A по мере μ называется число

$$\gamma(\mu) = \int_A \beta(x, E) d\mu .$$

Определение 5. Максимальным абсолютным показателем устойчивости называется

$$\gamma = \sup\{\beta(x, E), x \in A\} = \sup \gamma(\mu) .$$

Определение 6. Модель *f* называется абсолютно ε–устойчивой, если $\gamma \le \varepsilon$, где γ – максимальный абсолютный показатель устойчивости.

Пример. Если показатель устойчивости формируется с помощью метрики ρ, совокупность допустимых отклонений *E* – это совокупность всех окрестностей всех точек пространства исходных данных *A*, то 0–устойчивость модели *f* эквивалентна непрерывности модели *f* на множестве *A*.

Типовая проблема в общей схеме устойчивости – проверка абсолютной ε–устойчивости данной модели *f* относительно данной системы допустимых отклонений *E*.

Проблема А (*характеризации устойчивых моделей*). Даны пространство исходных данных *A*, пространство решений *B*, показатель устойчивости *d*, совокупность допустимых отклонений *E* и неотрицательное число ε. Описать достаточно широкий класс ε –устойчивых моделей *f*. Или: найти все ε–устойчивые модели среди моделей, обладающих данными свойствами, т.е. входящих в данное множество моделей.

Проблема Б (*характеризации систем допустимых отклонений*). Даны пространство исходных данных *A*, пространство решений *B*, показатель устойчивости *d*, модель *f* и неотрицательное число ε. Описать достаточно широкий класс систем допустимых отклонений *E*, относительно которых модель *f* является абсолютно ε—устойчивой. Или*:* найти все такие системы допустимых отклонений *E* среди совокупностей допустимых отклонений, обладающих данными свойствами, т.е. входящих в данное множество совокупностей допустимых отклонений.

Ясно, что проблемы А и Б можно рассматривать не только для показателя устойчивости γ, но и для показателей $\gamma(\mu)$, $\beta(x, E)$, $\beta(x, E(x, \theta))$.

Язык общей схемы устойчивости позволяет описывать конкретные задачи теории устойчивости в различных областях исследований, выделять основные элементы в них, ставить проблемы типа А и Б. На этом языке легко формулируются задачи теории устойчивости решений дифференциальных уравнений, теории робастности статистических процедур, теории особенностей дифференцируемых отображений, проблемы адекватности теории измерений и т.д.

Пример. Определение устойчивости по Ляпунову решения $\varphi(t, x)$ нормальной автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{y} = g(y)$ с начальными условиями $\varphi(0, x) = x$ выразим в терминах общей схемы устойчивости.

Здесь пространство исходных данных A – конечномерное евклидово пространство, множество допустимых отклонений $E(x, \theta)$ - окрестность радиуса θ точки $x \in A$, пространство решений B – множество функций на луче $[0, +\infty)$ с метрикой

$$\rho(y_1, y_2) = \sup_{t \geq 0} | y_1(t) - y_2(t) |.$$

Модель f – отображение, переводящее начальные условия x в решение системы дифференциальных уравнений с этими начальными условиями $\varphi(t, x)$.

В терминах общей схемы устойчивости положение равновесия a называется *устойчивым по Ляпунову*, если $\beta(a, E) = 0$.

Для формулировки определения асимптотической устойчивости по Ляпунову надо ввести в пространстве решений B псевдометрику

$$\rho_1(y_1, y_2) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \, | \, y_1(t) - y_2(t) \, | .$$

Положение равновесия a называется асимптотически устойчивым, если $\beta_1(a, E(a,\varepsilon)) = 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где показатель устойчивости β_1 рассчитан с использованием псевдометрики ρ_1.

Таким образом, общая схема устойчивости является обобщением классических постановок задач устойчивости по Ляпунову в теории дифференциальных уравнений. Соотношение общей схемы устойчивости с подходами других авторов обсуждается в [10, гл.8], [4, гл.1] и др. Отметим только структурную устойчивость (грубость динамических систем), введенную А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 г., исследования по организационно-экономической устойчивости [10, 11], работы Д.А. Молодцова по устойчивости принципов оптимальности [12] и теории мягких множеств [13]. Теория мягких множеств - это дальнейшее развитие теории нечетких множеств, в которой значения функции принадлежности нечеткого множества сами являются нечеткими. Понятие мягкого множества использовалось в первой монографии отечественного автора по нечетким множествам [14], в методологической статье [15], однако без введения специального термина.

Непосредственно из общей схемы устойчивости вытекает ряд практически полезных рекомендаций [4, гл.1], в частности, ***принцип уравнивания погрешностей,*** согласно которому целесообразно уравнять вклад погрешностей различной природы в общую погрешность. Принцип уравнивания погрешностей позволяет установить:

- рациональный объем выборки в статистике интервальных данных [8, 9];

- число градаций в анкетах, предназначенных для опроса потребителей [4, 16];

- необходимую точность оценивания параметров (платы за доставку и платы за дефицит) в моделях управления запасами [4, 17].

В работах [3 - 5, 10, 11] рассмотрен ряд конкретных постановок проблем устойчивости в математических методах и моделях, в частности, используемых при управлении деятельностью промышленных предприятий и организаций других отраслей народного хозяйства. В настоящей статье сосредоточим внимание на математических свойствах общей схемы устойчивости.

3. Основные математические свойства общей схемы устойчивости

В настоящей статье общая схема устойчивости изучается как математический объект. Топологические термины используются в соответствии с [18].

Теорема 1. Пусть A и B - топологические пространства, причем топология в A согласована с псевдометрикой ρ (т.е. $\inf\sup\{\rho(y,y_0), y\in W(y_0)\}$ = 0, где $W(y_0)$ - произвольная окрестность точки $y_0\in A$, а inf берется по всем окрестностям y_0, и указанное соотношение выполнимо при всех $y_0\in A$). Пусть $E(x,\theta)$ - бикомпакт и отображение f непрерывно на $E(x,\theta)$. Тогда $\beta(x,E(x,\theta))$ достигается, т.е. найдутся точки x' и x'' из $E(x,\theta)$ такие, что

$$\beta(x,E(x,\theta))=\rho(f(x'),f(x'')). \qquad (1)$$

Доказательство. По теореме Тихонова о произведении (см., например, [18, с. 194]) $E(x,\theta)\times E(x,\theta)$ также является бикомпактом. Непрерывная функция на бикомпакте достигает своего супремума (см., например, [19, с. 95]), а потому для доказательства теоремы достаточно проверить непрерывность отображения $h: E(x,\theta)\times E(x,\theta)\to R^2$, задаваемого формулой $h(x',x'')=\rho(f(x'),f(x''))$.

Отображение $g: E(x,\theta)\times E(x,\theta)\to A\times A$, задаваемое формулой $g(x',x'')=(f(x'),f(x''))$, является непрерывным, поскольку f непрерывно и по теореме Уоллеса внутри каждой окрестности точки из $A\times A$ есть окрестность, являющаяся произведением окрестностей из А (см. [18, с.193], [20, глава III, задача 76, с.144-145, 187]). Проверим непрерывность согласованной с топологией псевдометрики $\rho(z,u)$ как функции на $A\times A$.

Имеем

$$\rho(z,u)-\rho(z',u')=\{\rho(z,u)-\rho(z',u)\}+\{\rho(z',u)-\rho(z',u')\}. \tag{2}$$

Поскольку

$$\rho(z,u)\le\rho(z,z')+\rho(z',u),\ \ \rho(z',u)\le\rho(z',z)+\rho(z,u), \tag{3}$$

то

$$-\rho(z,z')\le\rho(z,u)-\rho(z',u)\le\rho(z,z'). \tag{4}$$

Аналогично легко получить, что

$$-\rho(u,u')\le\rho(z',u)-\rho(z',u')\le\rho(u,u'). \tag{5}$$

Из (4) и (5) с помощью теоремы Уоллеса и условия согласованности ρ с топологией в A выводим непрерывность ρ. Поскольку h является суперпозицией непрерывных функций, $h=\rho\circ g$, то h непрерывна, чем и завершается доказательство теоремы 1.

Как известно, множество $G(x)$ называется непрерывно зависящим от x в точке $x_0\in A$, если

$$\bigcap_{W(x_0)}\overline{\bigcup_{x\in W(x_0)}G(x)}=\bigcup_{W(x_0)}\bigcap_{x\in W(x_0)}G(x)=G(x_0), \tag{6}$$

где $W(x_0)$ - окрестность $W(x_0)$ внешняя операция производится по всем окрестностям (черта -символ замыкания).

Теорема 2. Пусть A - бикомпакт, отображение f непрерывно на $\bigcup\{G(x),\ x\in W_0(x_0)\}$ (объединяются множества $G(x)$, соответствующие x из некоторой окрестности $W_0(x_0)$ точки x_0. Пусть $G(x)$ - бикомпакты при $x\in W_0(x_0)$ и $G(x)$ непрерывно в x_0. Тогда функция $\beta(x,G(x))$ непрерывна в x_0.

Доказательство. Покажем сначала, что множество $G(x)\times G(x)$ непрерывно зависит от x, т.е.

$$\bigcap_{W(x_0)} \overline{\bigcup_{x\in W(x_0)} (G(x)\times G(x))} = G(x_0)\times G(x_0) \tag{7}$$

и

$$\bigcup_{W(x_0)} \bigcap_{x\in W(x_0)} (G(x)\times G(x)) = G(x_0)\times G(x_0)\,. \tag{8}$$

Докажем (7) и (8). Пусть

$$(x', x'')\in \bigcap_{W(x_0)} \overline{\bigcup_{x\in W(x_0)} (G(x)\times G(x)}\,. \tag{9}$$

Тогда для любой окрестности $W(x_0)$ найдется последовательность $(x_n^{'}, x_n^{''}),\ n=1,2,...$ такая, что $(x_n^{'}, x_n^{''})\to(x', x'')$ при $n\to\infty$, причем $(x_n^{'}, x_n^{''})\in G(x_n)\times G(x_n)$ где $x_n\in W(x_0)$. Следовательно,

$$x'\in \overline{\bigcup_{x\in W(x_0)} (G(x)} \tag{10}$$

для любой окрестности $W(x_0)$. Вследствие непрерывности $G(x)$ в x имеем

$$x'\in \bigcap_{W(x_0)} \overline{\bigcup_{x\in W(x_0)} G(x)} = G(x_0)\,. \tag{11}$$

Аналогично

$$x''\in \bigcap_{W(x_0)} \overline{\bigcup_{x\in W(x_0)} G(x)} = G(x_0)\,. \tag{12}$$

Следовательно, $(x', x'')\in G(x_0)\times G(x_0)$ и

$$\bigcap_{W(x_0)} \overline{\bigcup_{x\in W(x_0)} (G(x)\times G(x))} \subseteq G(x_0)\times G(x_0)\,. \tag{13}$$

Обратное включение очевидно, поскольку x_0 лежит в любой своей окрестности. Соотношение (7) доказано.

Пусть

$$(x', x'')\in \bigcup_{W(x_0)} \bigcap_{x\in W(x_0)} (G(x)\times G(x))\,. \tag{14}$$

Тогда существует окрестность $W(x_0)$ такая, что

$$(x', x'')\in \bigcap_{x\in W(x_0)} (G(x)\times G(x))\,. \tag{15}$$

Поскольку , то в соответствии с (15)

$$(x', x'') \in G(x_0) \times G(x_0). \tag{16}$$

Тогда в силу (6) из (16) следует, что существуют окрестности $W_1(x_0)$ и $W_2(x_0)$ такие, что

$$x' \in \bigcap_{x \in W_1(x_0)} G(x), \quad x'') \in \bigcap_{x \in W_2(x_0)} G(x). \tag{17}$$

Тогда $W_1(x_0) \cap W_2(x_0) = W_3(x_0)$ является окрестностью x_0 и для любого $x \in W_3(x_0)$ вследствие (17) имеем $x' \in W_3(x_0)$ и $x'' \in W_3(x_0)$, т.е.

$$(x', x'') \in \bigcap_{x \in W_3(x_0)} (G(x) \times G(x)). \tag{18}$$

Из (16) и (18) следует (8).

Предположим, что

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \beta(x, G(x)) > \beta(x_0, G(x_0)). \tag{19}$$

Тогда существует положительное число δ и последовательность точек x_n, $n = 1, 2, ...$, из A такие, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$, но при всех n

$$\beta(x_n, G(x_n)) > \beta(x_0, G(x_0)) + \delta. \tag{20}$$

В силу теоремы 1 $\beta(x_n, G(x_n))$ при достаточно больших n достигается (а именно, как только $x_n \in W_0(x_0)$, упомянутой в формулировке теоремы 2), т.е. существуют последовательности $x_n^{'}$ и $x_n^{''}$ такие, что при достаточно больших n справедливо равенство

$$\beta(x_n, G(x_n)) = \rho(f(x_n^{'}), f(x_n^{''})). \tag{21}$$

Последовательность $(x_n^{'}, x_n^{''})$ лежит в бикомпакте $A \times A$, а потому имеет предельную точку (x', x'') (теорема Тихонова и теорема 2 из [19, с.93]). При доказательстве теоремы 1 показано, что h - непрерывная функция, а потому существует последовательность натуральных чисел $k(n)$, $n = 1, 2, ...$, такая, что $k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \rho(f(x_{k(n)}^{'}, x_{k(n)}^{''}) = \rho(f(x'), f(x'')). \tag{22}$$

Из (20) - (22) следует, что

$$\rho(f(x'), f(x'')) \geq \beta(x_0, G(x_0)) + \delta\,. \tag{23}$$

Однако вследствие (7) $(x', x'') \in G(x_0) \times G(x_0)$, а потому

$$\beta(x_0, G(x_0)) \geq \rho(f(x'), f(x''))\,. \tag{24}$$

Поскольку (23) противоречит (24), то предположение (19) неверно, и

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} \beta(x, G(x)) \leq \beta(x_0, G(x_0))\,. \tag{25}$$

Вследствие теоремы 1 существуют $x' \in G(x_0)$, $x'' \in G(x_0)$ такие, что

$$\beta(x_0, G(x_0)) = \rho(f(x'), f(x''))\,. \tag{26}$$

В силу (9) найдется окрестность $W(x_0)$ такая, что

$$(x', x'') \in \bigcap_{x \in W(x_0)} (G(x) \times G(x))\,. \tag{27}$$

Поскольку по (27) $(x', x'') \in (G(x) \times G(x))$ при всех $x \in W(x_0)$, то

$$\beta(x, G(x)) \geq \rho(f(x'), f(x'')), \tag{28}$$

что вместе с (26) приводит к соотношению

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} \beta(x, G(x)) \geq \beta(x_0, G(x_0))\,. \tag{29}$$

Из (25) и (29) следует, что

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x, G(x)) = \beta(x_0, G(x_0))\,. \tag{30}$$

Теорема 2 доказана.

В теореме 2 и в следующей теореме 3 речь идет о случае, параметрическое множество Θ в общей схеме устойчивости состоит из одного элемента.

Теорема 3. Пусть $\beta(x, G(x))$ непрерывна в каждой точке x замкнутого подмножества C бикомпакта A. Тогда $\sup\{\beta(x, G(x)), x \in C\}$ достигается. В частности, достигается (при C = A) максимальный абсолютный показатель устойчивости.

Доказательство. Замкнутое подмножество C бикомпакта A является бикомпактом. Утверждение теоремы 3 следует из того, что непрерывная функция достигает на бикомпакте своего супремума.

Круг понятий, связанных с общей схемой устойчивости, полезно сравнить с кругом понятий, эксплицирующих идею непрерывности. Непрерывная функция имеет ряд полезных свойств. Так, она ограничена и достигает супремума и инфимума на бикомпакте. Эти свойства часто оказываются полезными. Однако при доказательстве непрерывности конкретных отображений они зачастую не могут быть использованы. Точно так же общая схема устойчивости имеет ряд полезных свойств, некоторые из которых обсуждаются и доказываются в настоящей статье. Эти свойства используются при исследовании устойчивости в конкретных постановках (см., например, [4, §2.1, гл.5], [5], [9]), однако, как правило, оценки отклонений решений в зависимости от отклонений исходных данных приходится в каждом случае искать особым методом, приспособленным к рассматриваемой модели, как и доказательство непрерывности определенной функции проводится методом, исходящим из особенностей этой функции. Возможно, подобное положение есть следствие недостаточного пока развития общей теории устойчивости.

Требование непрерывной зависимости $G(x)$ от x является, вообще говоря, достаточно ограничительным. В ряде естественных постановок оно не выполнено. Приведем другое достаточное условие непрерывности $\beta(x, G(x))$.

Пусть x_1 и x_2 - произвольные элементы A. Пусть существуют преобразования

$$g_{x_1,x_2} : A \to A \tag{31}$$

такие, что при любых x_1, x_2 для произвольного $x' \in G(x_2)$ найдется точка $x'' \in G(x_1)$ такая, что $g_{x_1,x_2}(x'') = x'$.

Теорема 4. Пусть A - топологическое пространство, отображение f непрерывно в $\bigcup\{G(x), x \in W_0(x_0)\}$ (объединение берется по всем элементам некоторой окрестности $W_0(x_0)$ точки x_0). Пусть $G(x)$ - бикомпакты при

$x \in W_0(x_0)$, функции $g_{x_0,x}(z)$ при фиксированном x_0 и $x \in W_0(x_0)$ непрерывны по z,

$$\lim_{x \to x_0} \sup\{\rho(f(g_{x_0,x}(z), f(z)), z \in G(x)\} = 0. \tag{32}$$

Тогда функция $\beta(x, G(x))$ непрерывна в x_0.

Доказательство. Вследствие теоремы 1 $\beta(x, G(x))$ достигается при $x \in W_0(x_0)$. Следовательно, для каждого $x \in W_0(x_0)$ существуют $y_1(x) \in G(x)$ и $y_2(x) \in G(x)$ такие, что

$$\beta(x, G(x)) = \rho(f(y_1(x)), f(y_2(x))). \tag{33}$$

Поскольку

$$\beta(x, G(x)) \geq \rho(f(g_{x_0,x}(y_1(x_0))), f(g_{x_0,x}(y_2(x_0)))), \tag{34}$$

а правая часть (34)в силу непрерывности отображений g, f и ρ стремится к $\rho(f(y_1(x_0)), f(y_2(x_0))) = \beta(x_0, G(x_0))$ при $x \to x_0$, то

$$\underline{\lim}_{x \to x_0} \beta(x, G(x)) \geq \beta(x_0, G(x_0)). \tag{35}$$

Поскольку

$$\beta(x_0, G(x_0)) \geq \rho(f(g_{x_0,x}(y_1(x))), f(g_{x_0,x}(y_2(x)))) \tag{36}$$

(в правой части (36) в качестве аргументов в $f(\bullet)$ подставлены образы точек, на которых достигается $\beta(x, G(x))$), то

$$\beta(x_0, G(x_0)) \geq \overline{\lim}_{x \to x_0} \rho(f(g_{x_0,x}(y_1(x))), f(g_{x_0,x}(y_2(x)))). \tag{37}$$

Если

$$\rho(f(g_{x_0,x}(y_i(x))), f(y_i(x))) \to 0, \quad i = 1,2, \tag{38}$$

при $x \to x_0$, то стремится к нулю разность между правыми частями (33) и (36), следовательно,

$$\beta(x_0, G(x_0)) \geq \overline{\lim}_{x \to x_0} \beta(x, G(x)), \tag{39}$$

что вместе с (35) доказывает непрерывность $\beta(x, G(x))$ в x_0. Справедливость же (38) следует из (32). Теорема 4 доказана.

Непрерывность $\beta(x,G(x))$ может быть полезной во многих ситуациях. Так, из нее следует, что множество ε-устойчивых точек $\{x:\beta(x,G(x))\le\varepsilon\}$ замкнуто.

Перейдем к рассмотрению $\beta(x,E)$ - абсолютного показателя устойчивости в точке $x\in A$.

Теорема 5. Пусть для любого $\theta_0\in\Theta$ существует окрестность $W_0(x_0)$ точки x_0 такая, что для любого $x\in W_0(x_0)$ найдется $\theta\in\Theta$, при котором $E(x,\theta)\subseteq E(x_0,\theta_0)$. Тогда

$$\beta(x_0,E)\ge\overline{\lim_{x\to x_0}}\beta(x,E)\,. \tag{40}$$

Доказательство. Вследствие определения абсолютного показателя устойчивости достаточно показать, что

$$\beta(x_0,E(x_0,\theta_0)\ge\overline{\lim_{x\to x_0}}\beta(x,E) \tag{41}$$

для любого $\theta_0\in\Theta$. Из условия теоремы следует, что для любого $x\in W_0(x_0)$ существует $E(x,\theta)\subseteq E(x_0,\theta_0)$. Тогда

$$\beta(x_0,E(x_0,\theta_0)\ge\beta(x,E(x,\theta)\ge\beta(x,E) \tag{42}$$

для всех $x\in W_0(x_0)$, откуда и следует (41). Теорема 5 доказана.

Отметим, что условия теоремы 5 выполнены, если $\{E(x,\theta),\theta\in\Theta\}$ - совокупность окрестностей точки $x\in A$, а A - регулярное пространство (впрочем, достаточно выполнения аксиомы T_3 из [19, с.89]). Пусть ρ - метрика, а топология в A, как обычно, согласована с ρ. Тогда из условия $\beta(x_0,E)=0$ следует непрерывность f в x_0. Поскольку существуют функции, непрерывные всюду, кроме одной точки, то неравенство (40) может быть строгим.

В теоремах 1, 2, 4 отображение f предполагалось непрерывным. Предположим, что для любой окрестности точки x_0 существует $\theta_0\in\Theta$ такое, что $E(x_0,\theta_0)$ лежит в этой окрестности. Тогда из непрерывности f

следует, что $\beta(x_0,E)=0$. Таким образом, понятие абсолютного показателя устойчивости в точке x_0 нетривиально либо в случае разрывности f, либо тогда, когда некоторая окрестность $W(x_0)$ лежит во всех $E(x_0,\theta)$.

Теорема 6. Если (40) выполнено при всех $x_0\in A$, то $\beta(x,E)$ достигает своего супремума на любом бикомпакте $C\subseteq A$.

Доказательство. Выполнение (40) влечет полунепрерывность сверху функции f в точке x_0, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $W_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 такая, что для любого $x\in W_\varepsilon(x_0)$ имеем

$$\beta(x,E)\le\beta(x_0,E)+\varepsilon. \tag{43}$$

Заключение теоремы 6 следует из теоремы 8б [19, с.97].

Теорема 7. Пусть A - бикомпактное топологическое пространство, f непрерывна, $W_\varepsilon(y)=\{y_1:\rho(y,y_1)<\varepsilon\}$. Пусть $E(x,\theta)$ замкнуты при всех $\theta\in\Theta$, а множество

$$G_\varepsilon = f^{-1}(W_\varepsilon(y)\cap f(A)),\ \ y=f(x) \tag{44}$$

открыто. Пусть $\Theta=\{\theta\}$ - направленное множество, а совокупность допустимых отклонений такова, что $E(x,\theta_1)\subseteq E(x,\theta_2)$ при $\theta_1\ge\theta_2$. При этих условиях неравенство

$$\beta(x,E)=\inf_\theta\beta(x,E(x,\theta))<\varepsilon \tag{45}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$G=\bigcap_\theta E(x,\theta)\subseteq G_\varepsilon. \tag{46}$$

Доказательство. Необходимость: пусть (46) не выполнено. Тогда существует $x_0\in G$ такое, что $x_0\notin G_\varepsilon$. Следовательно, $\rho(f(x_0),f(x))\ge\varepsilon$. Из определения G следует, что

$$\beta(x,E(x,\theta))\ge\rho(f(x_0),f(x))\ge\varepsilon \tag{47}$$

при любом θ, и $\beta(x,E)\ge\varepsilon$ вопреки (45).

Достаточность: покажем, что $E(x,\theta_0)\subseteq G_\varepsilon$ при некотором θ_0. Предположим, что это не так. Тогда для любого $\theta\in\Theta$ существует

$x_\theta \in E(x,\theta)$ такое, что $x_\theta \in A \setminus G_\varepsilon$. Поскольку A - бикомпактное топологическое пространство, то в случае бесконечного A у последовательности x_θ существует предельная точка $\bar{x}$. Так как $A \setminus G_\varepsilon$ замкнуто, то $\bar{x}$ лежит в $A \setminus G_\varepsilon$. (Если A состоит из конечного числа элементов, то в качестве $\bar{x}$ возьмем x_θ при максимальном θ).

Поскольку для любого θ_0 все члены подпоследовательности $\{x_\theta\}$, выделяемой условием $\theta \geq \theta_0$, лежат в $E(x,\theta_0)$ в силу условия теоремы, то $\bar{x} \in E(x,\theta_0)$ из-за замкнутости $E(x,\theta)$. Следовательно, $\bar{x} \in G$, т.е. (46) не выполнено. Итак, из справедливости (46) следует, что при некотором θ_0 справедливо включение $E(x,\theta_0) \subseteq G_\varepsilon$. подмножество бикомпактного пространства бикомпактно, следовательно, $E(x,\theta_0)$ бикомпактно, и по теореме 1 $\beta(x,E(x,\theta_0))$ достигается в силу непрерывности *f*, причем $\beta(x,E(x,\theta_0)) = \rho(f(x'),f(x'')) < \varepsilon$ из-за $G \subseteq G_\varepsilon$ (здесь $x'.x'' \in E(x,\theta_0)$) Поскольку $\beta(x,E) \leq \beta(x,E(x,\theta_0))$, то (45) доказано.

Теорема 7 дает теоретическое решение проблемы Б. Однако во многих практически важных случаях проверить выполнение (46) затруднительно.

Поведенные выше доказательства теорем 1 - 7 дают представление о методах, применяемых в общей теории устойчивости. Поэтому мы перейдем к более беглому изложению, предоставляя читателю возможность самостоятельно доказать формулируемые ниже утверждения.

4. Дальнейшие свойства общей схемы устойчивости

Опишем некоторые операции над схемами устойчивости.

Пополнением схемы устойчивости {*A*, *B*, *f*, *d*, *E*} называется схема устойчивости {*A*, *B*, *f*, *d*, E_1}, где $E_1(x,\theta) = f^{-1}(f(E(x,\theta)))$. Показатели устойчивости для схемы и ее пополнения совпадают. Если A - бикомпакт, $E(x,\theta)$ замкнуты, отображение f непрерывно, то $E_1(x,\theta)$ также замкнуты.

Композиция схем устойчивости $\{A, B, f_1, d_1, E_1\}$ и $\{B, C, f_2, d_2, E_2\}$ определяется по аналогии с композицией многозначных отображений $f_1(E_1(x,\theta_1))$ и $f_2(E_2(x,\theta_2)), \theta_i \in \Theta_i, i=1,2$, участвующих в определении рассматриваемых схем. Именно, композицией называется схема $\{A, C, f_3, d_2, E_3\}$, где $f_3(x) = f_2(f_1(x))$, $E_3 = \{E_3(x,\theta_3), x \in A, \theta_3 \in \Theta_3\}$, $\Theta_3 = \Theta_1 \times \Theta_2$, $E_3(x,(\theta_1,\theta_2)) = \bigcup_{x' \in E_1(x,\theta_1)} f_1^{-1}(E_2(f_1(x'),\theta_2))$.

Перейдем к рассмотрению отдельных типов схем.

Пусть A - метрическое пространство, $W_\varepsilon(x)$ есть ε-окрестность точки $x \in A$. Пусть $\Theta = C \times (0,\infty)$, где C - некоторое множество, $E(x,\theta) = E(x,(c,\varepsilon)) = E(x,c) \bigcap W_\varepsilon(x)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_c \beta(x, E(x,c) \bigcap W_\varepsilon(x)) = \inf_c \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \beta(x, E(x,c) \bigcap W_\varepsilon(x)) = \beta(x,E). \quad (48)$$

В экономических моделях, в частности, в моделях управления запасами [21], при изучении устойчивости решений к изменению горизонта планирования [22] оказывается полезным рассмотреть последовательность моделей $f_n : A_n \to B_n, n=1,2,...$, где A_n представляется в виде $A_n = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$ при некоторых P_i и аналогично $B_n = Q_1 \times Q_2 \times ... \times Q_n$, в B_n имеется псевдометрика ρ_n. Для изучения устойчивости модели f_n относительно исходных данных A_k, где $k < n$, естественно ввести схему устойчивости $\{A_n, B_k, f_{nk}, d_k, E_{nk}\}$, где f_{nk} - сужение f_n на B_k (точнее, если $f_n(x) = (b_1, b_2, ..., b_n)$, где $b_i \in B_i, i=1,2,...,n$, то $f_{nk}(x) = (b_1, b_2, ..., b_k)$), $E_{nk} = \{E_k(x), x \in A_n\}$, $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $x^i \in P_i, i=1,2,...,n$,

$$E_k(x^1,x^2,...,x^n) = \{(x^1,x^2,...,x^k,z^{k+1},...,z^n), \forall z^i \in P_i, i=k+1,k+2,...,n\}.$$

Пусть P_i, Q_i, i = 1, 2, ..., n, - бикомпакты, f_n - непрерывная функция. Тогда показатель устойчивости $\beta(x, G_k(x))$ в описанной схеме достигается. Показателем устойчивости относительно естественно назвать

$$\delta(f_n, f_k, (x^1,..., x^k)) = \sup\{\rho_k(f_{nk}(x^1,..., x^n), f_k(x^1,..., x^k)), x^i \in P_i, i = k+1,..., n\} \quad (49)$$

В указанных выше условиях $\delta(f_n, f_k, (x^1,..., x^k))$ достигается.

В различных областях математики рассматриваются классификации поведения аналитических объектов в окрестностях особых точек (см., например, [23]). Подход с точки зрения общей схемы устойчивости дает новый способ классификации. Именно, рассмотрим границу Γ окрестности малого радиуса особой точки. Пересечение ε-окрестностей рассматриваемых объектов с Γ порождает толерантность на Γ (о понятии толерантности см., например, [24]), транзитивное замыкание которой и есть тот объект, который предлагается изучать при $\varepsilon \to 0$, в то время как малый радиус окрестности также стремится к 0. В достаточно гладких случаях указанный объект с топологической точки зрения не зависит от малого радиуса окрестности, границей которой является Γ.

Проиллюстрируем сказанное на примере линий уровня функции двух действительных переменных $f(x, y) = x^2 - 4y^2$. Линиями уровня $f(x, y)$ = 0 являются прямые $x + 2y = 0$ и $x - 2y = 0$, особая точка - (0, 0). При пересечении этих линий уровня с границей окрестности точки (0, 0) радиуса R получаем четыре точки $A_1(2a, a)$, $A_2(2a, -a)$, $A_3(-2a, a)$, $A_4(-2a, -a)$, где $a = R/\sqrt{5}$. Рассмотрим евклидовы ε-окрестности линий уровня. Если $\varepsilon > 2R/\sqrt{5}$, то все четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 неразличимы. Если $R/\sqrt{5} \le \varepsilon \le 2R/\sqrt{5}$, то пары ($A_1$, A_2) и (A_3, A_4) неразличимы, а все остальные пары различимы. Если же $\varepsilon < R/\sqrt{5}$, то все четыре точки различимы. В отличие от обычного подхода, при котором все четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 равноправны, с помощью идей общей схемы устойчивости можно выделить пары (A_1, A_2) и (A_3, A_4) более "близких" друг к другу точек. Было бы интересно получить описанным методом классификации для случаев, рассмотренным В.И. Арнольдом в [23].

5. О решениях проблемы Б

Обычно ищут устойчивые модели *f*, т.е. решают проблему А. Поэтому приведем несколько примеров, когда полезным оказалось решение проблемы Б. Так, способ борьбы с некорректностью в теории уравнений с частными производными, предложенный в [25], состоит в ограничении множества допустимых отклонений, т.е. как раз во введении подходящего *E*. При наличии конечного числа возможных решений в [26] предлагается решать задачу районирования, т.е.для каждого решения искать область, для всех точек которой оно является оптимальным. Другими словами, надо построить разбиение на области, при котором всем точкам одной области соответствовало бы одно и то же решение, т.е. отображение, переводящее точку в оптимальное для нее решение, должно быть 0-устойчивым на области, куда входит эта точка. Итак, в этой постановке надо найти систему допустимых отклонений *E*, относительно которой соответствующее отображение является 0-устойчивым, т.е. решить задачу Б. Проведение районирования приводит к тому, что для принятия решения нам надо знать лишь, в какую область попадают начальные данные, но не их точные значения, что приводит к экономии средств на измерение исходных данных.

Применяемые для классификации многомерных данных алгоритмы часто зависят от параметра, например, порогового значения a. Пусть даваемое алгоритмом разбиение меняется в моменты a_1, a_2, ..., $a_{n+1.}$ Предлагается в качестве окончательного разбиения брать то, для которого промежуток изменения параметра, соответствующий ему, является максимальным, т.е. выбрать k такое, что $a_{k+1} - a_k$ максимально среди $a_1 - a_0$, $a_2 - a_1$, ..., $a_{n+1} - a_n$ (где a_0 - минимальное значение параметра), и взять разбиение соответствующее промежутку a_{k+1} - a_k [27, 28]. Таким образом, предлагается решать задачу Б и использовать то разбиение, для которого область устойчивости максимальна.

"Массивность" области устойчивости, найденной в результате решения задачи Б, является свидетельством в пользу адекватности модели. Так, автором были рассмотрены две математические модели отдельных сторон обучения математике - модель оптимального распределения времени между объяснениями и решением задач [29] и модель для расчета оптимального числа преподавателей кружка [30]. В первой из них в течение основного периода учебного процесса оптимальное распределение времени между объяснениям (1/3 всего времени) и решением задач (2/3) является одним и тем же для всех учащихся. Этот факт устойчивости показывает возможность организации обучения, оптимального одновременно для всех учащихся. Во второй из них наблюдается численная устойчивость: использование в качестве параметра любой величины из интервала, в котором лежат все экспертные оценки этого параметра, приводит к одной и той же численности оптимального коллектива преподавателей. Отмеченные свойства устойчивости повышают эвристическую ценность указанных грубых моделей при организации процесса обучения (гносеологическая роль грубых моделей выявлена В,В. Налимовым [31, с.12-38]).

Вложение различных конкретных задач устойчивости в общую схему проводится постоянно на протяжении книг [4, 5].

6. Заключительные замечания

Возникает желание обобщить общую схему устойчивости, введя отклонения не только исходных данных, то и отображения f, или же, задав меру в $E(x,\theta)$, показывающую вероятность осуществления данного отклонения. Однако легко показать, что эти "обобщения" вкладываются в общую схему устойчивости при соответствующем изменении ее составляющих *A, B, f, d, E*.

Частными случаями пространства {*A*, *E*} является топологическое пространство (когда $\{E(x,\theta), \theta \in \Theta\}$ - совокупность окрестностей точки *x*) и пространство толерантности (когда $E(x) \equiv E(x,\theta)$ - совокупность всех *x*' таких, что *x* и *x*' связаны отношением толерантности - об этом понятии см. [24]). Приведем еще примеры, связанные с конкретными постановками в частных теориях.

а) $E(x,\theta) \equiv E(x) = \{x' : \varphi(x') = \varphi(x)\}$, где φ - некоторая функция;

б) $E(x,(c,\delta)) = \{x' : h(x',c) = h(x,c)\} \cap U_\delta(x)$, где $C = \{c\}$ - множество параметров, *h*(*x*, *c*) - семейство функций, $U_\delta(x)$ - окрестность радиуса δ точки *x* метрического пространства *A*, $\Theta = C \times (0, +\infty)$.

В общую схему устойчивости вкладывается изучение асимптотических моделей. Пусть нас интересует поведение отображения $g_t : Z \to W,\ t \in T$, при $t \to \infty$. Рассмотрим схему устойчивости, в которой $A = Z \times (T \cup \{\infty\}),\ B = W$, модель *f* переводит (*z*, *t*) в $g_t(z)$, а (z, ∞) - в значение предельной функции $g_\infty(z)$. Пусть ρ - метрика в *B*. Устойчивость будем изучать в точках (z, ∞). Окрестности имеют вид $E((z,\infty), s \in T) = \{(z,t), t \ge s\}$. Тогда $\beta((z,\infty), E) = 0$ эквивалентно

$$\lim_{t \to \infty} g_t(z) = g_\infty(z).$$

В ряде случаев представляет интерес скорость убывания $\beta((z,\infty), E((z,\infty), s))$ как функции *s* (см. разделы 2.1 - 2.4, 5.2 монографии [4]).

Опишем представляющийся автору рациональным способ оценки необходимой точности определения одних параметров по известной точности определения других. Рассмотрим для простоты записи случай двух параметров: $\Theta = [0,\infty) \times [0,\infty)$ и $E(x,\alpha) = E(x,(\varepsilon,\delta))$, где ε и δ

обозначают точности определения соответствующих параметров. Примем, что справедливы включения $E(x,(\varepsilon_1,\delta_1)) \subseteq E(x,(\varepsilon_2,\delta_2))$ при $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, $\delta_1 \le \delta_2$. Пусть ε задано, а δ мы можем выбрать, причем уменьшение δ связано с увеличением расходов. Представляется естественным "уравнять" отклонения, порожденные различными параметрами, т.е. определять δ из условия

$$\beta(x, E(x,(\varepsilon,\delta))) - \beta(x,(x, E(x,(\varepsilon,0))) \approx \beta(x, E(x,(\varepsilon,0))) . \quad (50)$$

Слева стоит приращение показателя устойчивости, соответствующее варьируемой точности δ определения точности второго параметра, а справа значение показателя устойчивости определяемое заданной точностью ε определения первого параметра. Если затраты точно известны, то δ можно определять путем решения соответствующей оптимизационной задачи. Соотношение (50) предлагается применять в качестве эвристического правила в противном случае. Называем рассматриваемый подход "принципом уравнивания погрешностей". Из его применений укажем определение рационального объема выборки в статистике интервальных данных [7-9, 32, 33], выбор числа градаций в социологических анкетах путем изучения асимптотики квантования [16], расчет необходимой точности определения параметров в классической модели Вильсона управления запасами [17].

Приведем пример использования неустойчивости. Рассмотрим две общие схемы устойчивости $\{A_1, B, f_1, d, E_1\}$ и $\{A_2, B, f_2, d, E_2\}$ - с максимальными абсолютными показателями устойчивости γ_1 и γ_2 (см. определение 5 выше) соответственно. Пусть $A_1 \subseteq A_2$ и f_1 является сужением f_2 на A_1, причем $E_1(x,\theta) \subseteq E_2(x,\theta) \cap A_1$ при всех $x \in A_1$. Ясно, что тогда $\gamma_1 \le \gamma_2$.

Значит, из неустойчивости грубой модели следует неустойчивость любой включающей ее более тонкой. Приведем использующий этот факт пример, относящийся к демографии (ср.[33, с.427-438] и [34, гл.8]).

Рассмотрим простейшую модель. В соответствии с сложившимися традициями и решениями органов власти общество может по-разному распоряжаться имеющими ресурсами (рабочим временем, природными благами, материальным богатством). Основной ресурс - рабочее время, поскольку, как известно, "источником всех благ является труд". Рабочее время члены общества расходуют либо на производство продукции, либо на содержание, воспитание, обучение детей. Пусть общество тратит долю времени u на производство продукции, а долю времени $(1 - u)$ - на подготовку (содержание, воспитание, обучение и т.п.) новых членов общества. Пусть x_k - численность населения в k-й момент времени и

$$x_{k+1} = b\, x_k + a\,(1 - u)\, x_k,\ k = 1, 2, ... \qquad (51)$$

где первое слагаемое соответствует тем, кто жил и работал еще в предыдущий момент, а второе - новым членам общества (в предыдущий момент они не участвовали в производстве из-за малого возраста). Необходимо максимизировать производство за n периодов, выбрав u из условия

$$u \sum_{1 \prec i \le n} \alpha^{i-1} x_i \to \max, \qquad (52)$$

где α - коэффициент дисконтирования. Пусть $u(2)$ и $u(3)$ -решения задачи (51) - (52) при $n = 2$ и $n = 3$ соответственно. Нетрудно подсчитать, что

$$\frac{u(3)}{u(2)} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{1{,}5}{m + 0{,}5}\right)^2}\right), \qquad (53)$$

где $m = \alpha(a + b)$. Значит,

$$\frac{1}{2} \le \frac{u(3)}{u(2)} \le \frac{2}{3}, \qquad (54)$$

т.е. выбор демографической политики (в данной модели - величины *u*) существенно зависит от горизонта планирования. Отметим также, что при некоторых значениях параметров оптимальная, в смысле (51) - (52), политика приводит к вырождению популяции. Следует утверждать, что оба обнаруженных свойства имеют место и для более подробных моделей, включающих рассмотренную в качестве частного случая.

Общий подход к устойчивости развивается также в монографии [35, гл. IX]. Устойчивость понимается в топологическом смысле, понятия типа "показатель устойчивости не вводятся. Наш подход можно считать промежуточным между топологическим подходом М. Месаровича и Я. Такахара [35] и метрическим - В.М. Золотарева [36, 37]. Мы не будем проводить развернутого сравнения этих трех подходов.

Итак, в настоящей статье получен ряд результатов, касающихся математических свойств общей схемы устойчивости. Начальный пункт - работа [38]. С математической точки зрения рассмотрены также некоторые возможные направления общей схемы устойчивости и ее свойств при решении задач экономики и управления на основе использования экономико-математических методов и моделей. Применениям рассматриваемой теории (общей схемы устойчивости) при анализе конкретных прикладных ситуаций посвящены, в частности, монографии [4, 5]. Отметим, что целесообразно дальнейшее изучение общей схемы устойчивости как математического объекта наряду с развертыванием различных вариантов ее практического использования как с целью модернизации систем управления предприятиями, так и путем внедрения в самых разных областях социально-экономической теории и практики. Ясно, что общая схема устойчивости должна расширить свое присутствие в теоретической, учебной и прикладной деятельности специалистов в многообразных социально-экономических областях.

Литература

1. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. – М.: СИНТЕГ, 2007. – 668 с.
2. Новиков Д.А. Современные проблемы теории управления организационными системами // Человеческий фактор в управлении / Под ред. Н.А. Абрамовой, К.С. Гинсберга, Д.А. Новикова. – М.: КомКнига, 2006. – С.391 – 407.
3. Орлов А.И. Новый подход к изучению устойчивости выводов в математических моделях / Научный журнал КубГАУ. 2014. №100. С. 1–30.
4. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.
5. Орлов А.И. Устойчивые экономико-математические методы и модели. Разработка и развитие устойчивых экономико-математических методов и моделей для модернизации управления предприятиями. — Saarbrücken (Germany), LAP (Lambert Academic Publishing), 2011. — 436 с.
6. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2008. – 32 с.
7. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: : учебник : в 3 ч. Ч.1: Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. — 542 с.
8. Орлов А.И. Основные идеи статистики интервальных данных / Научный журнал КубГАУ. 2013. №94. С. 867–892.
9. Орлов А.И., Луценко Е.В. Системная нечеткая интервальная математика. Монография (научное издание). – Краснодар, КубГАУ. 2014. – 600 с.
10. Колобов А.А., Омельченко И.Н., Орлов А.И. Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость. – М.: Экзамен, 2008. – 621 с.
11. Проектирование интегрированных производственно-корпоративных структур: эффективность, организация, управление / С.Н. Анисимов, А.А. Колобов, И.Н. Омельченко, А.И. Орлов, А.М. Иванилова, С.В. Краснов; Под ред. А.А. Колобова, А.И. Орлова. Научное издание. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 728 с.
12. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. – М.: Наука, 1987. - 280 с.
13. Молодцов Д.А. Теория мягких множеств. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 360 с.
14. Орлов А.И. Задачи оптимизации и нечеткие переменные. — М.: Знание, 1980. — 64 с.
15. Орлов А.И. Математика нечеткости / Наука и жизнь. 1982. №7. С. 60-67.
16. Орлов А.И. Асимптотика квантования, выбор числа градаций в социологических анкетах и двухуровневая модель управления запасами / Научный журнал КубГАУ. 2016. №123. С. 660–687.
17. Орлов А.И. Оптимальный план управления запасами нельзя найти на основе формулы квадратного корня / Научный журнал КубГАУ. 2015. №106. С. 270–300.
18. Келли Дж. Л. Общая топология. - М.: Наука, 1968. - 384 с.
19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1972. - 572 с.
20. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М.: Наука, 1974. - 423 с.
21. Орлов А.И. Методы принятия управленческих решений. - М.: КНОРУС, 2018. - 286 с.

22. Орлов А.И. Существование асимптотически оптимальных планов в дискретных задачах динамического программирования / Научный журнал КубГАУ. 2020. №155. С. 147–163.

23. Арнольд В.И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах / Успехи математических наук. 1972. Т.27. №5. С. 119-184.

24. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. - М.: Наука, 1971. - 256 с.

25. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа / Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т.20. С. 819-842.

26. Динер И.Я. Районирование множества векторов состояния природы и задача выбора решения / Исследование операций. Методологические аспекты. - М.: Наука, 1972. - С. 43-62.

27. Орлов А.И., Гусейнов Г.А. Математические методы в изучении способных к математике школьников / Исследования по вероятностно-статистическому моделированию реальных систем. - М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1977. - С.80-93.

28. Плоткин А.А. Устойчивость разбиения как критерий оптимальности построенной классификации / Статистические методы анализа экспертных оценок. - М,: Наука, 1977. - С.111-123.

29. Орлов А.И. Методология моделирования процессов управления в социально-экономических системах / Научный журнал КубГАУ. 2014. №101. С. 166–196.

30. Орлов А.И. Проблемы устойчивости в некоторых моделях управления запасами и ресурсами // Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. - М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1975. - С. 94-105,

31. Налимов В.В. Теория эксперимента. - М.: Наука, 1971. - 208 с.

32. Орлов А.И. Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 672 с.

33. Орлов А.И. Теория принятия решений — М.: Экзамен, 2006. — 576 с.

34. Урланис Б.Ц. Проблемы динамики населения СССР. - М.: Наука, 1974. - 335 с.

35. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. - М.: Мир, 1978. - 316 с.

36. Золотарев В.М. Метрические расстояния в пространствах случайных величин и их распределений / Матем. сборник. 1976. Т. 101(143). № 3(11). С. 416 -454.

37. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. - М., Наука, 1983. - 304 с.

38. Орлов А.И. Некоторые математические свойства общей схемы устойчивости // Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. - М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1975. - С. 143-146.

References

1. Novikov A.M., Novikov D.A. Metodologiya. – M.: SINTEG, 2007. – 668 s.

2. Novikov D.A. Sovremennye problemy teorii upravleniya organizacionnymi sistemami // CHelovecheskij faktor v upravlenii / Pod red. N.A. Abramovoj, K.S. Ginsberga, D.A. Novikova. – M.: KomKniga, 2006. – S.391 – 407.

3. Orlov A.I. Novyj podhod k izucheniyu ustojchivosti vyvodov v matematicheskih modelyah / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2014. №100. S. 1–30.

4. Orlov A.I. Ustojchivost' v social'no-ekonomicheskih modelyah. — M.: Nauka, 1979. — 296 s.

5. Orlov A.I. Ustojchivye ekonomiko-matematicheskie metody i modeli. Razrabotka i razvitie ustojchivyh ekonomiko-matematicheskih metodov i modelej dlya modernizacii

upravleniya predpriyatiyami. — Saarbrücken (Germany), LAP (Lambert Academic Publishing), 2011. — 436 s.

6. Arnol'd V.I. «ZHestkie» i «myagkie» matematicheskie modeli. – M.: MCNMO, 2008. – 32 s.

7. Orlov A.I. Organizacionno-ekonomicheskoe modelirovanie: : uchebnik : v 3 ch. CH.1: Nechislovaya statistika. — M.: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2009. — 542 s.

8. Orlov A.I. Osnovnye idei statistiki interval'nyh dannyh / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2013. №94. S. 867–892.

9. Orlov A.I., Lucenko E.V. Sistemnaya nechetkaya interval'naya matematika. Monografiya (nauchnoe izdanie). – Krasnodar, KubGAU. 2014. – 600 s.

10. Kolobov A.A., Omel'chenko I.N., Orlov A.I. Menedzhment vysokih tekhnologij. Integrirovannye proizvodstvenno-korporativnye struktury: organizaciya, ekonomika, upravlenie, proektirovanie, effektivnost', ustojchivost'. – M.: Ekzamen, 2008. – 621 s.

11. Proektirovanie integrirovannyh proizvodstvenno-korporativnyh struktur: effektivnost', organizaciya, upravlenie / S.N. Anisimov, A.A. Kolobov, I.N. Omel'chenko, A.I. Orlov, A.M. Ivanilova, S.V. Krasnov; Pod red. A.A. Kolobova, A.I. Orlova. Nauchnoe izdanie. – M.: MGTU im. N.E. Baumana, 2006. – 728 s.

12. Molodcov D.A. Ustojchivost' principov optimal'nosti. – M.: Nauka, 1987. - 280 s.

13. Molodcov D.A. Teoriya myagkih mnozhestv. - M.: Editorial URSS, 2004. - 360 s.

14. Orlov A.I. Zadachi optimizacii i nechetkie peremennye. — M.: Znanie, 1980. — 64 s.

15. Orlov A.I. Matematika nechetkosti / Nauka i zhizn'. 1982. №7. S. 60-67.

16. Orlov A.I. Asimptotika kvantovaniya, vybor chisla gradacij v sociologicheskih anketah i dvuhurovnevaya model' upravleniya zapasami / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2016. №123. S. 660–687.

17. Orlov A.I. Optimal'nyj plan upravleniya zapasami nel'zya najti na osnove formuly kvadratnogo kornya / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2015. №106. S. 270–300.

18. Kelli Dzh. L. Obshchaya topologiya. - M.: Nauka, 1968. - 384 s.

19. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. - M.: Nauka, 1972. - 572 s.

20. Arhangel'skij A.V., Ponomarev V.I. Osnovy obshchej topologii v zadachah i uprazhneniyah. - M.: Nauka, 1974. - 423 s.

21. Orlov A.I. Metody prinyatiya upravlencheskih reshenij. - M.: KNORUS, 2018. - 286 c.

22. Orlov A.I. Sushchestvovanie asimptoticheski optimal'nyh planov v diskretnyh zadachah dinamicheskogo programmirovaniya / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2020. №155. S. 147–163.

23. Arnol'd V.I. Lekcii o bifurkaciyah i versal'nyh semejstvah / Uspekhi matematicheskih nauk. 1972. T.27. №5. S. 119-184.

24. SHrejder YU.A. Ravenstvo, skhodstvo, poryadok. - M.: Nauka, 1971. - 256 s.

25. Lavrent'ev M.M. O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasa / Izv. AN SSSR. Ser. mat. 1956. T.20. S. 819-842.

26. Diner I.YA. Rajonirovanie mnozhestva vektorov sostoyaniya prirody i zadacha vybora resheniya / Issledovanie operacij. Metodologicheskie aspekty. - M.: Nauka, 1972. - S. 43-62.

27. Orlov A.I., Gusejnov G.A. Matematicheskie metody v izuchenii sposobnyh k matematike shkol'nikov / Issledovaniya po veroyatnostno-statisticheskomu modelirovaniyu real'nyh sistem. - M.: Izd-vo CEMI AN SSSR, 1977. - S.80-93.

28. Plotkin A.A. Ustojchivost' razbieniya kak kriterij optimal'nosti postroennoj klassifikacii / Statisticheskie metody analiza ekspertnyh ocenok. - M,: Nauka, 1977. - S.111-123.

29. Orlov A.I. Metodologiya modelirovaniya processov upravleniya v social'no-ekonomicheskih sistemah / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2014. №101. S. 166–196.

30. Orlov A.I. Problemy ustojchivosti v nekotoryh modelyah upravleniya zapasami i resursami // Algoritmy mnogomernogo statisticheskogo analiza i ih primeneniya. - M.: Izd-vo CEMI AN SSSR, 1975. - S. 94-105,

31. Nalimov V.V. Teoriya eksperimenta. - M.: Nauka, 1971. - 208 s.

32. Orlov A.I. Prikladnaya statistika. — M.: Ekzamen, 2006. — 672 s.

33. Orlov A.I. Teoriya prinyatiya reshenij — M.: Ekzamen, 2006. — 576 s.

34. Urlanis B.C. Problemy dinamiki naseleniya SSSR. - M.: Nauka, 1974. - 335 s.

35. Mesarovich M., Takahara YA. Obshchaya teoriya sistem: matematicheskie osnovy. - M.: Mir, 1978. - 316 s.

36. Zolotarev V.M. Metricheskie rasstoyaniya v prostranstvah sluchajnyh velichin i ih raspredelenij / Matem. sbornik. 1976. T. 101(143). № 3(11). S. 416 -454.

37. Zolotarev V.M. Odnomernye ustojchivye raspredeleniya. - M., Nauka, 1983. - 304 s.

38. Orlov A.I. Nekotorye matematicheskie svojstva obshchej skhemy ustojchivosti // Algoritmy mnogomernogo statisticheskogo analiza i ih primeneniya. - M.: Izd-vo CEMI AN SSSR, 1975. - S. 143-146.