УДК 303.732.4

08.00.13 Математические и инструментальные методы экономики (экономические науки)

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЛОГИКИ ПРАВДОПОДОБНЫХ РАССУЖДЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Логические конструкции - теоретическая база построения и изучения математических моделей социально-экономических явлений и процессов, разработки методов управления в организационных системах. При этом про многие утверждения относительно явлений и процессов в реальном мире (в отличие от формальных систем) нельзя сказать, что они истинны или ложны, можно говорить лишь о той или иной степени правдоподобности. Следовательно, необходима разработка логики правдоподобных утверждений. В настоящей статьи развиваем подход Д. Пойа, принципиально отличающейся как от вероятностной логики, так и от нечеткой логики. Цель настоящей статьи - наметить один из возможных подходов к формализации теории правдоподобностей Д. Пойа. Подход идейно связан с теорией измерений, а не с теорией вероятностей, как предлагал Д. Пойа. Намеченная здесь теория может найти применения в принятии решений, управлении научными исследованиями, экспертных оценках, а также в модальной логике. Настоящая статья - первый шаг к построению математической логики правдоподобных рассуждений на основе эмпирических наблюдений Д. Пойа. Предлагаем исходить не из вероятностной или нечеткой логики, а из порядковой логики на основе теории измерений. Очевидно, необходимо дальнейшее развитие развиваемого нами подхода. В частности, следует проанализировать различные схемы анализа и обработки правдоподобных утверждений. Уже на нынешней стадии развития подход к формализации логики правдоподобных рассуждений Д. Пойа на основе теории измерений способен дать полезные практические рекомендации. Они могут быть использованы при математическом моделировании социально-экономических явлений и процессов

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, ПРАВДОПОДОБНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ, ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ, МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРАВДОПОБНОСТЕЙ, УСЛОВНАЯ ПРАВДОПОДОБНОСТЬ,

UDC 303.732.4

08.00.13 Mathematical and instrumental methods of Economics

FORMALIZATION OF LOGIC IN PLAUSIBLE REASONING BASED ON THE THEORY OF MEASUREMENTS

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Logical constructions are the theoretical basis for constructing and studying mathematical models of socio-economic phenomena and processes, developing management methods in organizational systems. Moreover, many statements regarding phenomena and processes in the real world (in contrast to formal systems) cannot be said to be true or false, we can only speak of a certain degree of plausibility. Therefore, it is necessary to develop a logic of plausible statements. In this article, we develop the approach of G. Polya, which is fundamentally different from both probabilistic logic and fuzzy logic. The purpose of this article is to outline one of the possible approaches to formalizing the theory of credibility G. Polya. The approach is ideologically connected with the theory of measurements, and not with the theory of probability, as suggested by G. Polya. The theory outlined here can find applications in decision making, research management, expert judgment, and also in modal logic. This article is the first step towards constructing a mathematical logic of plausible reasoning based on empirical observations by G. Polya. We propose to proceed not from probabilistic or fuzzy logic, but from ordinal logic based on measurement theory. Obviously, further development of the approach we are developing is necessary. In particular, various schemes for analyzing and processing plausible statements should be analyzed. Already at the present stage of development, the approach to formalizing the logic of plausible reasoning by G. Polya based on the theory of measurements is able to give useful practical recommendations. They can be used in mathematical modeling of socio-economic phenomena and processes

Keywords: MATHEMATICAL LOGIC, PLAUSIBLE REASONING, THEORY OF MEASUREMENTS, MODELING OF PLAUSIBLE REASONING, CONDITIONAL PLAUSIBLE REASONING, TESTING

ОПЕРАЦИЯ ПРОВЕРКИ OPERATION

http://dx.doi.org/10.21515/1990-4665-164-025

1. Введение

Логические конструкции - теоретическая база построения и изучения математических моделей социально-экономических явлений и процессов, разработки методов управления в организационных системах. При этом про многие утверждения относительно явлений и процессов в реальном мире (в отличие от формальных систем) нельзя сказать, что они истинны или ложны, можно говорить лишь о той или иной степени правдоподобности. Следовательно, необходима разработка логики правдоподобных утверждений.

Среди работ замечательного математика XX в. Д. Пойа (1887 - 1985) важное место занимает монография "Математика и правдоподобные рассуждения" [1]. Второй том монографии посвящен разработке логики правдоподобных рассуждений. Этот термин Д. Пойа предпочитает "индуктивной логике". Он выписывает некоторое количество схем правдоподобных рассуждений (умозаключений), построенных, с одной стороны, по аналогии с силлогизмами классической логики, с другой стороны, в качестве обобщения умозаключений, встречающихся в практике исследователя. Так, классической схеме рассуждения modus tollens

Из А следует В

В ложно

А ложно

соответствует схема правдоподобного умозаключения

Из А следует В

В истинно

А более правдоподобно,

которую Пойа называет "фундаментальной индуктивной схемой" [1, с.230-231].

Затем Д. Пойа делает попытку применить для вывода, толкования и уточнения схем правдоподобных рассуждений аппарат теории вероятностей. Однако эта попытка встречает два серьезных возражения.

1. Им рассматривается правдоподобность $P(A)$ утверждения A, обладающая всеми свойствами вероятности, но не являющаяся, однако, числом. Это понятие остается у Д. Пойа довольно туманным, как и различие между "качественной" и "количественной" теориями вероятностей (см. критику подхода Д. Пойа в предисловии С.А. Яновской к монографии в его монографии [1, с.10-12]).

2. Не указано вероятностное пространство, и для рассматриваемых множеств утверждений остается открытым вопрос о возможности введения правдоподобностей (вероятностей), обладающих требуемыми свойствами.

После работ Д. Пойа появился еще один претендент на роль математического аппарата правдоподобных рассуждений - нечеткая логика, развиваемая на основе теории нечетких множеств (см., например, [2]). Однако он основан на том, что степени правдоподобности - числа, поскольку правдоподобности описываются функциями принадлежности. Обычно невозможно обосновать численное значение степени правдоподобности. Кроме того, теория нечетких множеств в определенном смысле сводится к теории случайных множеств и тем самым к теории вероятностей [3, 4].

Итак, теория вероятностей и теория нечетких множеств не годятся. Нужна разработка адекватного математического аппарата логики правдоподобных рассуждений.

Цель настоящей статьи - наметить один из возможных подходов к формализации теории правдоподобностей Д. Пойа. Подход идейно связан с теорией измерений, а не с теорией вероятностей, как предлагал Д. Пойа. Намеченная здесь теория может найти применения в принятии решений, управлении научными исследованиями, экспертных оценках, а также в модальной логике.

2. Моделирование правдоподобностей в рамках теории измерений

Рассмотрим конечное множество $G = \{A\}$ с отношением частичного нестрогого порядка, которое будем обозначать $\leq$ (меньше или равно). Введем производные отношения. Если $A_1 \leq A_2$ и одновременно $A_2 \leq A_1$, то $A_1 = A_2$ (равно). Отношение равенства (эквивалентности) порождается отношением частичного нестрогого порядка. Если $A_1 \leq A_2$ и неверно, что $A_2 \leq A_1$, то $A_1 < A_2$ (строго меньше). Отношение частичного строгого порядка порождается исходным отношением частичного нестрогого порядка. В терминах (репрезентативной) теории измерений [5, 6] имеем эмпирическую систему с тремя отношениями, описанными выше. Обозначим ее $\{G, \leq\}$.

Представлением $\{G, \leq\}$ назовем отображение $p: G \to [0,1]$ такое, что

а) из $A_1 = A_2$ следует $p(A_1) = p(A_2)$;

б) из $A_1 < A_2$ следует $p(A_1) \leq p(A_2)$;

в) если $A_1 < A_2$ и $p(A_1) \neq 0, 1$, то $p(A_1) < p(A_2)$;

г) если $A_1 < A_2$ и $p(A_2) \neq 0, 1$, то $p(A_1) < p(A_2)$.

Интересующая нас содержательная интерпретация такова:

G - множество утверждений;

$A_1 \leq A_2$ тогда и только тогда, когда A_2 - следствие A_1, причем $A_1 = A_2$ соответствует эквивалентности утверждений;

$p(A)$ - правдоподобность утверждения A (в данном представлении).

Свойства а) - г) означают, что правдоподобность строгого следствия больше правдоподобности основания, за исключением крайних случаев, когда правдоподобность хотя бы одного из этих утверждений равна 0 или 1, в то время как правдоподобности эквивалентных утверждений всегда совпадают.

На данном этапе развертывания логики правдоподобных рассуждений не будем обсуждать, содержатся ли в G наряду с A_1 и A_2 утверждения "A_1 или A_2", "A_1 и A_2" и т.д. Ясно, однако, что логические операции между некоторыми утверждениями должны быть запрещены, т.е. соответствующие производные утверждения не должны входить в G. Это - неизбежная плата за "несравнимость" (ср. [1, с.366-367]). Не имеет смысла рассматривать конъюнкцию утверждений "финикийцы достигли Америки ранее 500 г. до н.э." и "великая теорема Ферма верна", поскольку в противном случае, как будет показано ниже, подтверждение одного из этих утверждений увеличило бы правдоподобность второго.

Теорема 1. Для любой системы $\{G, \leq\}$ существует хотя бы одно представления.

Доказательство. Будем вести индукцию по числу элементов G. Если в G только один элемент, то теорема, очевидно, верна. Пусть она верна для всех G, мощность которых не больше k. Рассмотрим G мощности $k + 1$. Пусть $A_1 \in G$ - максимальный элемент, т.е. такой, что не существует элемент $B \in G$ такой, чтобы $A_1 < B$. Пусть $A_2, ..., A_n$ эквивалентны A_1, а потому все они эквивалентны (равны) между собой (таких элементов может и не существовать). Рассмотрим $G_1 = G \setminus \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ и сужение $\leq$ на G_1. По предположению индукции для полученной системы с отношениями существует представление p_0. Пусть φ - произвольное строго возрастающее преобразование, отображающее отрезок [0, 1] на [0, 1/2]. Положим $p(A) = 3/4$, если $A \notin G_1$, и $p(A) = \varphi(p_0(A))$, если $A \in G_1$. Нетрудно проверить, что p - представление, что и доказывает теорему.

Определение. Допустимым преобразованием системы $\{G, \leq\}$ назовем такое преобразование $\varphi:[0,1]\to[0,1]$, что для любого представления p отображение $\varphi\circ p$ также является представлением.

Теорема 2. Если существуют $A_1\in G, A_2\in G$ такие, что $A_1 < A_2$, то совокупность допустимых преобразований совпадает с совокупностью функций $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ таких, что $\varphi(x) = 0$ при $x < a$ и $\varphi(x) = 1$ при $x > b$, а на отрезке $[a, b]$ преобразование φ строго возрастает, $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Доказательство. Покажем, что для любого представления p отображение $\varphi\circ p$ также является представлением. Поскольку φ однозначно и не убывает, то условия а) и б) в определении понятия "Представление" выполнены. Поскольку $0 < \varphi(x) < 1$ только в случае, когда $a \leq x \leq b$, а на этом отрезке φ строго возрастает, то условия в) и г) также выполнены.

Покажем, что все допустимые преобразования имеют указанный в теореме вид. Пусть $x < y$ таковы, что $0 < \varphi(x) < 1$ и $0 < \varphi(y) < 1$. Тогда существует представление p таков, что $p(A_1) = x$ и $p(A_2) = y$. Действительно, аналогично доказательству теоремы 1 нетрудно показать, что существует представление p_0 такое, что $p_0(A_1) = x_1$ и $p_0(A_2) = y_1$, где $0 < x_1 < y_1 < 1$.Пусть φ_0 - строго возрастающее преобразование отрезка [0, 1] на себя, такое, что $\varphi_0(x_1) = x$ и $\varphi_0(y_1) = y$. Положим $p = \varphi_0\circ p_0$. Тогда $p(A_1) = x$ и $p(A_2) = y$. Поскольку $\varphi\circ p$ -представление, то необходимо $\varphi(x) < \varphi(y)$. Положим $a = \inf\{x: \varphi(x) > 0\}$, $b = \sup\{x: \varphi(x) < 1\}$. Тогда $\varphi(x) = 0$ при $x < a$ и $\varphi(x) = 1$ при $x > b$, в то время как на отрезке $[a, b]$ преобразование φ является строго возрастающим (проверка этого утверждения при $x = a$ и $x = b$ проводится непосредственно), что и требовалось. Теорема 2 доказана.

3. Общая и экспертная теории правдоподобностей

Переход к другому представлению с помощью допустимого преобразования можно рассматривать как пересчет оценок экспертов, которые мы, таким образом, предполагаем измеренными в порядковой шкале. Пересчет может быть многократным. Отметим, что φ^n (т.е. результат n-кратного применения допустимого преобразования φ) при $n \to \infty$ сходится к кусочно-постоянной функции, по крайней мере в случае непрерывно дифференцируемой функции φ такой, что уравнение $\varphi'(x) = 1$ имеет конечное число решений. Этот факт оправдывает широкое применение процедур с конечным числом градаций, ибо к ним можно приблизиться при достаточном количестве пересчетов результатов измерений в непрерывных шкалах.

Предметом "*общей теории правдоподобностей*" являются инварианты относительно представлений**.** Функция $f(\{G, \leq\}, p)$ называется инвариантом относительно представлений, если $f(\{G, \leq\}, p_1) = f(\{G, \leq\}, p_2)$ для любых двух представлений $p_1 = p_2$.

Предметом "*экспертной теории правдоподобностей*" являются инварианты относительно допустимых преобразований. Функция $f(\{G, \leq\}, p)$ называется инвариантом относительно допустимых преобразований, если $f(\{G, \leq\}, p) = f(\{G, \leq\}, \varphi \circ p)$ для любого представления p и для любого допустимого преобразования φ.

Ясно, что общая теория правдоподобностей вкладывается в экспертную, но, вообще говоря, не совпадает с ней. Поясним это утверждение. Пусть G_1 и G_2 - две совокупности, причем никакие два элемента из различных совокупностей не сравнимы между собой. Могут существовать представления, одно из которых приписывает всем элементам G_1 большую правдоподобность, чем какому-то ни было элементу G_2, а второе, наоборот, всем элементам G_1 приписывает меньшую правдоподобность, чем какому-то ни было элементу G_2, в то время как из

$p(A_1) \le p(A_2)$ всегда следует $\varphi(p(A_1)) \le \varphi(p(A_2))$ для любого допустимого преобразования φ. Следовательно, общая теория правдоподобностей содержит меньше инвариантов, чем экспертная теория правдоподобностей.

Вернемся к сформулированным выше возражениям против изложения Д. Пойа. Точный смысл понятию правдоподобности придается с помощью введения инвариантов относительно представлений или допустимых преобразований (т.е. с помощью подходов общей теории правдоподобностей или экспертной теории правдоподобностей соответственно). Второе возражение более серьезно. Чтобы его снять, пришлось отказаться от вероятностной модели правдоподобных утверждений (она возникает, если разрешить логические операции для любых элементов G) и сконструировать более сложный математический объект.

4. Условная правдоподобность и операция проверки

Условной правдоподобностью $p(A|B)$, определенной при $A \le B$, естественно называть

$$p(A|B) = p(A) / p(B). \tag{1}$$

Это определение столь же оправдано с содержательной точки зрения, что и определение условной вероятности в математической теории вероятностей.

Будем считать, что вместе с утверждением A в рассматриваемое множество правдоподобных утверждений G входит и отрицание A, т.е. $\overline{A}$. При этом $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, из $A \le B$ следует $\overline{B} \le \overline{A}$.

Введем еще одно основное понятие - *операцию проверки*. Полагаем, что проверка утверждения B приводит к установлению его истинности или ложности. При этом правдоподобности остальных утверждений пересчитываются следующим образом. Если B истинно, то новая правдоподобность утверждения A, которую обозначим $p_1(A)$, определяется так: $p_1(A) = 1$ при $B \le A$ и $p_1(A) = p(A|B)$ при $A < B$. Очевидно, при $A \le B$ в случае, когда до проверки $p(B) < 1$, после проверки всегда выполнено неравенство $p_1(A) > p(A)$. Таким образом, "фундаментальная индуктивная схема Д. Пойа" [1] в рассматриваемой формализации логики правдоподобных утверждений доказана. Если же по итогам проверки утверждение B признано ложным, то его отрицание $\overline{B}$ истинно, и пересчет правдоподобностей производится исходя из $\overline{B}$.

Другие схемы анализа и обработки правдоподобных утверждений, рассмотренные Д. Пойа в [1], могут быть доказаны аналогично.

Рассмотрим более общий случай. Пусть проверка утверждения B приводит к повышению его правдоподобности $p(B)$ до некоторого значения $p_1(B) > p(B)$. В этом случае для $A < B$ пересчет дает

$$p_1(A) = p(A|B)\, p_1(B) > p(A). \qquad (2)$$

Приведенные выше правила пересчета значений правдоподобностей (1) и (2) являются содержательными гипотезами о мнениях и поведении экспертов и могут быть подвергнуты экспериментальной проверке путем проведения специально организованного опроса экспертов и статистического анализа полученных ответов в соответствии с современной методологией экспертных исследований [7, 8].

5. О дальнейшем развитии теории правдоподобных рассуждений

Обсудим некоторые направления дальнейшего развития теории правдоподобных рассуждений с точки зрения репрезентативной теории измерений.

Естественно ввести плату за проверку утверждения. Например, может идти речь об учете затрат на такую проверку. Открывается путь построения оптимизационных моделей, связанных с нахождением наилучших последовательностей проверок. Видимо, при этом $p(A)$ следует считать полученной в результате соответствующей процедуры экспертной оценкой порядкового или численного значения правдоподобности утверждения A из некоторого конечного подмножества утверждений, входящего в $G = \{A\}$.

Можно различными способами вводить расстояния (показатели различия, меры близости) между правдоподобностями (см. обзор [9]). Такие расстояния позволяют изучать геометрическую структуру эмпирической системы правдоподобных утверждений с тремя отношениями $G = \{A\}$ и ее представлений $\{G, \leq\}$, в частности, находить представление, лучше других отражающее итоговое мнение группы экспертов, путем расчета эмпирического среднего (аналога медианы Кемени), и т.д. [10, 11].

Широко распространенный тезис хорошо выражен Е.С. Вентцель: "При решении задач исследования операций всегда полезно сличать между собой результаты, полученные по различным моделям, устраивать как бы "спор моделей". Одну и ту же задачу решают не один раз, а несколько, пользуясь разными системами допущений, разным аппаратом, разными моделями. Если научные выводы от модели к модели меняются мало - это серьезный аргумент в пользу объективности исследования. Если они существенно расходятся, надо пересмотреть концепции, положенные в основу различных моделей, посмотреть, какая из них наиболее адекватна действительности" [12, с.10].

Рассмотрим формализацию этого тезиса (в рамках рассматриваемого в настоящей статье подхода к логике правдоподобных рассуждений). Рассмотрим три правдоподобных утверждения A, B, C. Пусть $A < B$ и $C < B$. Пусть $p(A)$, $p(B)$, и $p(C)$ отличны от 0 и 1. Тогда

$$p(B) > \max\{p(A), p(C)\},\ \ p(\overline{B}) < \min\{\, p(\overline{A}), p(\overline{C})\}, \qquad (3)$$

причем неравенства (3), вообще говоря, неулучшаемы. Формальный вывод подтверждает содержательный тезис.

Рассматриваемый тезис занимает важное место в развиваемом автором настоящей статьи новом подходе к изучению устойчивости выводов в математических моделях социально-экономических явлений и процессов [13]. Этот подход базируется на разработанной нами "общей схеме устойчивости". Полученные в рамках общей схемы устойчивости научные результаты отражены в монографиях [14-15]. Отметим, что в распоряжении исследователя имеется целый ряд теорий устойчивости, начиная с устойчивости по Ляпунову систем дифференциальных уравнений. Отметим среди них теорию организационно-экономической устойчивости [16-17] и робастную статистику [18].

В свою очередь, концепция устойчивости играет важную роль в новой парадигме математических методов исследования [19], в частности, в новой парадигме математической статистики [20] и новой парадигме методов анализа статистических и экспертных данных в задачах экономики и управления [21].

6. Заключение

Настоящая статья - первый шаг к построению математической логики правдоподобных рассуждений на основе эмпирических наблюдений Д. Пойа. Предлагаем исходить не из вероятностной или нечеткой логики, а из порядковой логики на основе теории измерений. Очевидно, необходимо дальнейшее развитие развиваемого нами подхода. В частности, следует проанализировать различные схемы анализа и обработки правдоподобных утверждений, рассмотренные Д. Пойа в фундаментальной монографии [1].

Заканчивая статью, необходимо констатировать, что уже на нынешней стадии развития подход к формализации логики правдоподобных рассуждений Д. Пойа на основе теории измерений способен дать полезные практические рекомендации. Они могут быть использованы при математическом моделировании социально-экономических явлений и процессов.

Литература

1. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. 2-е изд., испр. — М.: Глав. ред. физ.-мат. лит., 1975. — 464 с.
2. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: «Физматлит», 2002. – 256 с.
3. Орлов А.И. Теория нечетких множеств – часть теории вероятностей / Научный журнал КубГАУ. 2013. №92. С. 589–617.
4. Орлов А.И., Луценко Е.В. Системная нечеткая интервальная математика. Монография (научное издание). – Краснодар, КубГАУ. 2014. – 600 с.
5. Суппес П., Зинес Дж. Основы теории измерений / Психологические измерения. - М.: Мир, 1967. - С. 9-110.
6. Пфанцагль И. Теория измерений. - М.: Мир, 1976. - 248 с.
7. Орлов А. И. Организационно-экономическое моделирование: учеб. Ч.2. Экспертные оценки. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. - 486 с.
8. Орлов А.И. Теория экспертных оценок в нашей стране / Научный журнал КубГАУ. 2013. № 93. С. 1-11.
9. Орлов А.И. Расстояния в пространствах статистических данных / Научный журнал КубГАУ. 2014. №101. С. 227–252.
10. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: учебник : в 3 ч. Часть 1: Нечисловая статистика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2009. – 541 с.
11. Орлов А.И. Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы / Научный журнал КубГАУ. 2013. №89. С. 556–586.
12. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Знание, 1976. - 64 с.
13. Орлов А.И. Новый подход к изучению устойчивости выводов в математических моделях / Научный журнал КубГАУ. 2014. №100. С. 1–30.
14. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.
15. Орлов А.И. Устойчивые экономико-математические методы и модели. Разработка и развитие устойчивых экономико-математических методов и моделей для модернизации управления предприятиями. — Saarbrücken (Germany), LAP (Lambert Academic Publishing), 2011. — 436 с.
16. Проектирование интегрированных производственно-корпоративных структур: эффективность, организация, управление / С. Н. Анисимов, А. А. Колобов, И. Н. Омельченко, А. И. Орлов, А. М. Иванилова, С. В. Краснов; Под ред. А. А. Колобова, А. И. Орлова. Научное издание. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 728 с.
17. Колобов А.А., Омельченко И.Н., Орлов А.И. Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость. — М.: Экзамен, 2008. — 621 с.
18. Хьюбер П. Робастность в статистике. - М.: Мир, 1984. - 304 с.
19. Орлов А.И. О новой парадигме математических методов исследования / Научный журнал КубГАУ. 2016. №122. С. 807–832.

20. Орлов А.И. Основные черты новой парадигмы математической статистики / Научный журнал КубГАУ. 2013. №90. С. 187–213.
21. Орлов А.И. Новая парадигма анализа статистических и экспертных данных в задачах экономики и управления / Научный журнал КубГАУ. 2014. №98. С. 105–125.

References

1. Poja D. Matematika i pravdopodobnye rassuzhdeniya. 2-e izd., ispr. — M.: Glav. red. fiz.-mat. lit., 1975. — 464 s.
2. Kruglov V.V., Dli M.I. Intellektual'nye informacionnye sistemy: komp'yuternaya podderzhka sistem nechetkoj logiki i nechetkogo vyvoda. – M.: «Fizmatlit», 2002. – 256 s.
3. Orlov A.I. Teoriya nechetkih mnozhestv – chast' teorii veroyatnostej / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2013. №92. S. 589–617.
4. Orlov A.I., Lucenko E.V. Sistemnaya nechetkaya interval'naya matematika. Monografiya (nauchnoe izdanie). – Krasnodar, KubGAU. 2014. – 600 s.
5. Suppes P., Zines Dzh. Osnovy teorii izmerenij / Psihologicheskie izmereniya. - M.: Mir, 1967. - S. 9-110.
6. Pfancagl' I. Teoriya izmerenij. - M.: Mir, 1976. - 248 s.
7. Orlov A. I. Organizacionno-ekonomicheskoe modelirovanie: ucheb. CH.2. Ekspertnye ocenki. - M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2011. - 486 s.
8. Orlov A.I. Teoriya ekspertnyh ocenok v nashej strane / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2013. № 93. S. 1-11.
9. Orlov A.I. Rasstoyaniya v prostranstvah statisticheskih dannyh / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2014. №101. S. 227–252.
10. Orlov A.I. Organizacionno-ekonomicheskoe modelirovanie: uchebnik : v 3 ch. CHast' 1: Nechislovaya statistika. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana. – 2009. – 541 s.
11. Orlov A.I. Srednie velichiny i zakony bol'shih chisel v prostranstvah proizvol'noj prirody / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2013. №89. S. 556–586.
12. Ventcel' E.S. Issledovanie operacij. - M.: Znanie, 1976. - 64 s.
13. Orlov A.I. Novyj podhod k izucheniyu ustojchivosti vyvodov v matematicheskih modelyah / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2014. №100. S. 1–30.
14. Orlov A.I. Ustojchivost' v social'no-ekonomicheskih modelyah. — M.: Nauka, 1979. — 296 s.
15. Orlov A.I. Ustojchivye ekonomiko-matematicheskie metody i modeli. Razrabotka i razvitie ustojchivyh ekonomiko-matematicheskih metodov i modelej dlya modernizacii upravleniya predpriyatiyami. — Saarbrücken (Germany), LAP (Lambert Academic Publishing), 2011. — 436 s.
16. Proektirovanie integrirovannyh proizvodstvenno-korporativnyh struktur: effektivnost', organizaciya, upravlenie / S. N. Anisimov, A. A. Kolobov, I. N. Omel'chenko, A. I. Orlov, A. M. Ivanilova, S. V. Krasnov; Pod red. A. A. Kolobova, A. I. Orlova. Nauchnoe izdanie. — M.: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2006. — 728 s.
17. Kolobov A.A., Omel'chenko I.N., Orlov A.I. Menedzhment vysokih tekhnologij. Integrirovannye proizvodstvenno-korporativnye struktury: organizaciya, ekonomika, upravlenie, proektirovanie, effektivnost', ustojchivost'. — M.: Ekzamen, 2008. — 621 s.
18. H'yuber P. Robastnost' v statistike. - M.: Mir, 1984. - 304 s.
19. Orlov A.I. O novoj paradigme matematicheskih metodov issledovaniya / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2016. №122. S. 807–832.

20. Orlov A.I. Osnovnye cherty novoj paradigmy matematicheskoj statistiki / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2013. №90. S. 187–213.
21. Orlov A.I. Novaya paradigma analiza statisticheskih i ekspertnyh dannyh v zadachah ekonomiki i upravleniya / Nauchnyj zhurnal KubGAU. 2014. №98. S. 105–125.