А.И. Орлов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Москва
Ай Пи Ар Медиа
2022

УДК 519.8
ББК 22.18
О-66

Автор:
Орлов А.И. — д-р экон. наук, д-р техн. наук, канд. физ.-мат. наук, проф. кафедры «Экономика и организация производства» (ИБМ-2) Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана

Орлов, Александр Иванович.
О-66 Основы теории принятия решений : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 67 с. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-4497-1423-7

В учебном пособии рассмотрены основные понятия, подходы и результаты теории принятия решений. Дано введение в линейное и целочисленное программирование. Рассмотрены, описаны задачи оптимизации на графах. В теории экспертных оценок, выраженных бинарными отношениями, применены расстояние Кемени и медиана Кемени.

Подготовлено с учетом требований Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Учебное пособие предназначено для студентов, преподавателей и специалистов, заинтересованных в применении современных методов теории принятия решений в технике, экономике, управлении, медицине, социологии и иных областях, а также для разработчиков таких методов и соответствующего программного обеспечения.

Учебное электронное издание

ISBN 978-5-4497-1423-7

Технический редактор, компьютерная верстка *А.Д. Шиганова*
Обложка *С.С. Сизиумовой*

Подписано к использованию 01.10.2021. Объем данных 6 Мб.

Издание представлено в электронно-библиотечных системах
IPR BOOKS (www.iprbookshop.ru),
Библиокомплектатор (www.bibliocomplectator.ru)

Бесплатный звонок по России: **8-800-555-22-35**
Тел.: 8 (8452) 24-77-97, 8 (8452) 24-77-96

Отдел продаж и внедрения ЭБС:
доб. 206, 213, 144, 145
E-mail: sales@iprmedia.ru

Отдел комплектования ЭБС:
доб. 224, 227, 208
E-mail: mail@iprbookshop.ru

По вопросам приобретения издания обращаться:
доб. 208, 201, 222, 224
E-mail: izdat@iprmedia.ru, author@iprmedia.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие начинается с разбора типового примера — задачи принятия решения в производственном менеджменте о выборе образца для запуска в серию. Рассмотрены четыре аналитических подхода к принятию решений, а также пятый подход — голосование как один из методов экспертных оценок. Вводятся основные понятия теории принятия решений: лица, принимающие решения (ЛПР), порядок подготовки решения (регламент), цели и ресурсы, риски и неопределенности, критерии оценки решения. Обсуждаются реальные процедуры принятия решений и их математико-компьютерная поддержка.

Основное содержание пособия — описание задач оптимизации. В линейном программировании последовательно рассматриваются упрощенная производственная задача (с графическим решением) и двойственная к ней, задачи об оптимизации смеси, о планировании номенклатуры и объемов выпуска, транспортная задача. Дается первоначальное представление о линейном программировании как научно-практической дисциплине. Рассмотрены методы решения задач линейного программирования, включая симплекс-метод.

К целочисленному программированию относятся задача о выборе оборудования и задача о ранце. К ним примыкает тематика бинарных отношений и дискретной оптимизации в экспертных оценках — одном из инструментов принятия решений. Методы средних баллов рассмотрены на примере сравнения восьми проектов, а именно: метод средних арифметических рангов и метод медиан рангов. Проведено сравнение ранжировок, полученных этими методами. Затем предложен метод согласования кластеризованных ранжировок. Один из видов ответов экспертов — бинарные отношения. Дано их представление матрицами из 0 и 1 и введено расстояние Кемени между бинарными отношениями. Дискретная оптимизация применяется для получения результирующего мнения комиссии экспертов — медианы Кемени. Обсуждаются подходы к решению задач целочисленного программирования.

Заключительный раздел — оптимизация на графах. Рассмотрены задачи коммивояжера, о кратчайшем пути, о максимальном потоке. Сформулирована задача линейного программирования при максимизации потока.

Приведено 12 задач для проверки усвоения материала.

Автор искренне благодарен сотрудникам издательства Ай Пи Ар Медиа Юлии Вадимовне Ермоловой, Юлии Валентиновне Семеновой, Анне Дмитриевне Шигановой за большую работу по подготовке рукописи учебного пособия к публикации.

1. ПРИМЕР ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Совет директоров фирмы «Русские автомобили» должен принять важное решение. Какой образец запускать в серию — маленького верткого «Алешу» или представительного «Добрыню»? Отличаются эти типы автомобилей прежде всего расходом бензина на 100 км пробега — «Добрыня» больше, тяжелее, а потому и бензина ему надо больше, чем «Алеше». Зато «Добрыня» гораздо солиднее и вместительнее. При дешевом бензине потребители предпочтут «Добрыню», при дорогом — «Алешу».

Итак, каждый из двух вариантов решения имеет плюсы и минусы. Для принятия решения явно не хватает следующей количественной информации:

- насколько вероятна к моменту выхода продукции на рынок низкая цена бензина и насколько — высокая;
- каковы будут финансовые результаты работы фирмы при различных вариантах сочетания цены бензина и типа выпускаемого автомобиля (а таких сочетаний четыре: низкая цена бензина — автомобиль «Алеша», низкая цена бензина — автомобиль «Добрыня», высокая цена бензина — автомобиль «Алеша», высокая цена бензина — автомобиль «Добрыня»).

На эти вопросы генеральный директор фирмы заранее поручил ответить соответствующим специалистам. Перед началом заседания члены Совета директоров получают нужные для принятия решения количественные данные, сведенные в табл. 1.

Таблица 1

Прибыль фирмы «Русские автомобили» при выпуске автомобилей двух типов (млн. руб.)

Цена бензина	Автомобиль «Алеша»	Автомобиль «Добрыня»
Низкая (60 %)	750	1 000
Высокая (40 %)	500	200

На заседании Совета директоров началась дискуссия.

— Полагаю, надо получить максимум в самом плохом случае, — сказал осторожный Воробьев. — А хуже всего будет при высокой цене бензина, прибыль фирмы по сравнению со случаем низкой его цены уменьшается при любом нашем решении. Выпуская «Алешу», заработаем 500 миллионов, а «Добрыню» — 200 миллионов. Значит, надо выпускать «Алешу» — и как минимум 500 миллионов нам обеспечены.

— Нельзя быть таким пессимистом, — заявил горячий Лебедев. — Скорее всего, цена бензина будет низкой (за это — 60 шансов из 100), а высокой — лишь как исключение. Надо быть оптимистами — исходить из того, что все пойдет, как мы хотим, цена бензина будет низкой. Тогда, выпуская «Добрыню», получим миллиард в бюджет фирмы.

— На мой взгляд, и пессимист Воробьев, и оптимист Лебедев обсуждают крайние случаи — самую худшую ситуацию и самую лучшую. А надо подходить системно, обсудить ситуацию со всех сторон, учесть обе возможности, — начал свое выступление обстоятельный Чибисов, когда-то изучавший теорию вероятностей. — Рассмотрим сначала первый вариант — выпуск «Алеши». Мы получим 750 миллионов в 60 % случаев (при низкой цене бензина) и 500 миллионов в 40 % случаев (при высокой его цене), значит, в среднем $750 \times 0{,}6 + 500 \times 0{,}4 = 450 + 200 = 650$ миллионов. А для варианта «Добрыни» аналогичный расчет дает $1\,000 \times 0{,}6 + 200 \times 0{,}4 = 600 + 80 = 680$ миллионов, т.е. больше. Значит надо выпускать «Добрыню».

— Предыдущий оратор рассуждает так, как будто мы будем выбирать тип автомобиля на каждом заседании Совета директоров, да и все данные в табл. 1 лет сто не изменятся, — вступил в дискуссию экономист Куликов. — Но нам предстоит принять решение только один раз, и сделать это надо так, чтобы потом не жалеть об упущенных возможностях. Если мы решим выпускать «Добрыню», а к моменту выхода на рынок цена бензина окажется высокой, то получим 200 миллионов вместо 500 миллионов при решении, соответствующем будущей цене бензина. Значит, упущенная выгода составит $500 - 200 = 300$ миллионов. При выпуске «Алеши» в случае низкой цены бензина упущенная выгода составит $1\,000 - 750 = 250$ миллионов, т.е. будет меньше. Значит, надо выпускать «Алешу».

— Подведем итоги, — сказал председательствующий Медведев. — Выступили четверо, каждый привел убедительные доводы в пользу того или иного решения, каждый исходил из той или иной теоретической концепции. При этом за выпуск «Алеши» выступили Воробьев и Куликов, а за выпуск «Добрыни» — Лебедев и Чибисов. Будем голосовать.

Результаты голосования — 15 членов Совета директоров за выпуск «Добрыни», 8 (в основном более осторожные представители старшего поколения) — за выпуск «Алеши». Большинством голосов решение принято — фирма «Русские автомобили» будет выпускать «Добрыню» (см. также главу 8 книги [1]).

2. ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ — ОДИН ИЗ МЕТОДОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Какие выводы может извлечь менеджер из хода заседания Совета директоров фирмы «Русские автомобили»? Критерии принятия решения, выдвинутые четырьмя выступавшими, противоречили друг другу, два из них приводили к выводу о выгодности выпуска автомобиля «Алеша», а два — «Добрыня». И Совет директоров решил вопрос голосованием. При этом каждый из голосовавших интуитивно оценивал достоинства и недостатки вариантов. Т.е. выступал как эксперт, а весь Совет в целом — как экспертная комиссия. По-английски *expert* — это специалист. В русском языке эти два слова имеют несколько различающийся смысл: под экспертом обычно понимают весьма опытного высококвалифицированного специалиста, умеющего использовать свою интуицию для принятия решений.

Голосование — один из методов принятия решения комиссией экспертов. Организация голосования, в частности, на собрании акционеров имеет свои подводные камни. Многое зависит от регламента (т.е. правил проведения) голосования. Например, традиционным является принятие решений по большинству голосов: принимается то из двух конкурирующих решений, за которое поданы по крайней мере 50 % голосов и еще один голос. А вот от какого числа отсчитывать 50 % — от присутствующих или от списочного состава? Каждый из вариантов имеет свои достоинства и недостатки.

Если от присутствующих — то одно из двух решений будет почти наверняка принято (исключение — когда голоса разделятся точно поровну). Однако те, кто не был на собрании, могут быть недовольны. Если исходить из списочного состава, то возникает проблема явки на заседание. При слабой явке решения присутствующими должны приниматься почти единогласно, следовательно, в ряде случаев ни одно из конкурирующих решений не будет принято. А если придет меньше 50 % от утвержденного списочного состава, то принятие решений станет вообще невозможным. Перечисленные сложности увеличиваются, если регламентом предусмотрено квалифицированное большинство — 2/3 и еще один голос.

Еще одна проблема — как быть с воздержавшимися? Причислять ли их к голосовавшим «за» или к голосовавшим «против»? Рассмотрим условный пример — результат голосования по трем кандидатурам в Совет директоров (табл. 2). Наиболее активным и результативным менеджером является И.И. Иванов. У него больше всего сторонников, но и больше всего противников. Его соперник П.П. Петров меньше себя проявил, у него меньше и сторонников, и противников. Третий — С.С. Сидоров — никому не известен, и относительно его кандидатуры все участники голосования воздержались.

Таблица 2

Результаты голосования при выборах в Совет директоров

№ п/п	Кандидатура	За	Против	Воздержались
1	Иванов И.И.	200	100	100
2	Петров П.П.	150	50	200
3	Сидоров С.С.	0	0	400

Пусть надо выбрать одного человека в Совет директоров. Если председатель заседания спрашивает: «Кто за?», то проходит И.И. Иванов. Если он, видя усталость зала от обсуждения предыдущих вопросов, спрашивает: «Кто против?», то выбирают «темную лошадку» С.С. Сидорова, поскольку активные противники остальных менеджеров «выбивают» их из соревнования. При выборе двух членов Совета директоров вопрос «Кто за?» приводит к выборам И.И. Иванова и П.П. Петрова, а вопрос: «Кто против?» — к выборам С.С. Сидорова и П.П. Петрова. Поэтому, желая избавиться от И.И. Иванова, председатель может при выборах ставить вопрос так: «Кто против?».

Нетрудно видеть, что вопрос: «Кто за?» автоматически относит всех воздержавшихся к противникам данного кандидата, а вопрос «Кто против?» — к сторонникам. Успех никому не известного С.С. Сидорова связан именно с этим — он не нажил себе врагов.

Теория и практика экспертных оценок — развитая научная и практическая дисциплина с большим числом подходов, идей, алгоритмов, теорем и способов их практического использования. Однако необходимо подчеркнуть — *менеджер отвечает за принятие решений и не имеет права переложить ответственность на специалистов.*

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Разобранный нами пример наглядно демонстрирует ряд основных понятий теории принятия решений.

Кто принимает решения?

Решение о выборе того или иного типа автомобиля для запуска в серию принимал Совет директоров фирмы «Русские автомобили» большинством голосов. Однако в подготовке решения участвовали и другие люди — специалисты, подготовившие информацию, приведенную в табл. 1.

В теории принятия решений есть специальный термин — Лицо, Принимающее Решения, сокращенно ЛПР. Это тот, на ком лежит ответственность за принятое решение, тот, кто подписывает приказ или иной документ, в котором выражено решение. Обычно это генеральный директор или председатель правления фирмы, командир воинской части, мэр города и т.п., словом — ответственный работник. Но иногда действует коллективный ЛПР, как в случае с Советом директоров фирмы «Русские автомобили» или Государственной Думой Российской Федерации.

Проект решения готовят специалисты, как говорят, «аппарат ЛПР», часто вместе с сотрудниками иных организаций. Если ЛПР доверяет своим помощникам, то может даже не читать текст, а просто подписать его. Но ответственность все равно лежит на ЛПР, а не на тех, кто участвовал в подготовке решения.

При практической работе важно четко отделять этап дискуссий, когда рассматриваются различные варианты решения, от этапа принятия решения, после которого надо решение выполнять, а не обсуждать.

Порядок подготовки решения (регламент)

Часты конфликты между менеджерами по поводу сфер ответственности — кто за что отвечает, кто какие решения принимает. Поэтому очень важны регламенты, определяющие порядок работы. Недаром любое собрание принято начинать с утверждения председательствующего и повестки заседания, а работу любого предприятия или общественного объединения — с утверждения его устава. Влияние регламента на результаты принятия решений показано выше при обсуждении процедур голосования.

Цели

Каждое решение направлено на достижение одной или нескольких целей. Например, Совет директоров фирмы «Русские автомобили» желал:

- продолжать выполнять миссию фирмы, т.е. выпуск автомобилей;
- получить максимальную возможную прибыль (в условиях неопределенности будущих цен на бензин).

Эти две цели можно достичь одновременно. Однако так бывает не всегда.

Например, часто встречающаяся формулировка «максимум прибыли при минимуме затрат» внутренне противоречива. Минимум затрат равен 0, когда работа не проводится, но и прибыль тогда тоже равна 0. Если же прибыль велика, то и затраты велики, поскольку и то, и другое связано с объемом производства. Можно либо максимизировать прибыль при фиксированных затратах, либо минимизировать затраты при заданной прибыли, но невозможно добиться «максимума прибыли при минимуме затрат».

Одной и той же цели можно, как правило, добиться различными способами. Например, миссия фирмы «Русские автомобили» будет осуществляться и при выпуске машин типа «Алеша», и при выпуске «Добрыни».

Ресурсы

Каждое решение предполагает использование тех или иных ресурсов. Так, Совет директоров фирмы «Русские автомобили» исходит из существования производства (системы предприятий), позволяющего выпускать автомобили типа «Алеша» и типа «Добрыня». Если бы такого производства не было, то и дискуссия в Совете директоров не имела бы смысла. Конечно, можно было бы сначала обсудить вопрос о строительстве заводов, о посильности таких затрат для фирмы...

Кроме того, предполагается, что у фирмы достаточно средств для массового выпуска автомобилей. Ведь надо сначала подготовить производство и работников, закупить сырье и комплектующие, произвести и реализовать продукцию. И только потом получить прибыль (как разность между доходами и расходами).

В повседневной жизни мы чаще всего принимаем решения, покупая товары и услуги. И тут совершенно ясно, что такое ресурсы — это количество денег в нашем кошельке.

При практической работе над проектом решения важно все время повторять: «Чего мы хотим достичь? Какие ресурсы мы готовы использовать для этого?».

Риски и неопределенности

Почему четверо выступавших членов Совета директоров разошлись во мнениях? В частности, потому что они по-разному оценивали риск повышения цен на бензин, влияние этого риска на успешность достижения цели.

Многие решения принимаются в условиях риска, т.е. при возможной опасности потерь. Связано это с разнообразными неопределенностями, окружающими нас. Кроме отрицательных неожиданностей бывают положительные — мы называем их удачами. Менеджеры стараются застраховаться от потерь и не пропустить удачу.

Внутренне противоречива формулировка: «Максимум прибыли и минимум риска». Обычно при возрастании прибыли возрастает и риск — возможность многое или все потерять.

Вернемся к табл. 1. Неопределенность не только в том, будет цена на бензин высокой или низкой. *Неопределенности — во всех числах таблицы.* Шансы низкой цены на бензин оценены в 60 %. Этот прогноз, очевидно, не может быть абсолютно точным. Вместо 60 % следовало бы поставить, скажем, (60 ± 3) %. Тем более содержат неустранимые неточности данные о предполагаемой прибыли. Ведь для того, чтобы ее рассчитать, необходимо:

- оценить затраты на подготовку производства и выпуск продукции (это можно сделать достаточно точно, особенно при отсутствии инфляции);

- оценить число будущих покупателей в зависимости от цены и установить оптимальную цену, обеспечивающую максимальную прибыль (отделу маркетинга сделать это достаточно трудно, хотя бы потому, что промежуточным этапом является прогноз социально-экономического развития страны, из которого вытекают финансовые возможности и предпочтения потребителей, размеры налогов и сборов и др.).

В результате вместо 1 000 в таблице должно стоять, скажем, 1 000 ± 200. Следовательно, рассуждения четырех членов Совета директоров, опирающихся на числа из табл. 1, строго говоря, некорректны. Реальные числа — иные, хотя и довольно близкие. Необходимо изучить устойчивость выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных, а также по отношению к малым изменениям предпосылок используемой математической модели. Речь идет об общеинженерной идее — любое измерение проводится с некоторой погрешностью, и эту погрешность необходимо указывать.

Критерии оценки решения

Вспомните еще раз дискуссию в Совете директоров фирмы «Русские автомобили». Каждый из выступавших использовал свой критерий для выбора наилучшего варианта решения.

Воробьев предлагал исходить из наихудшего случая высокой цены бензина. Фактически он рассматривал внешний (для фирмы) мир как врага, который всячески будет стараться уменьшить прибыль фирмы. И в условиях жесткого противодействия со стороны внешнего мира он предлагал выбрать наиболее выгодный вариант решения — выпуск «Алеши». Подход Воробьева хорош при рассмотрении совершенно бескомпромиссного противостояния двух противников, имеющих противоположные интересы, например, двух армий воюющих между собой государств. Существует математизированная наука — так называемая *теория игр*, — в которой рассматриваются методы оптимального поведения в условиях антагонистического или иного конфликта. В дискуссии о выборе типа автомобиля для запуска в серию позиция Воробьева — это позиция крайнего пессимиста, поскольку нет оснований считать внешний мир активным сознательным противником фирмы. Отметим также, что наиболее плохой случай, на который ориентируется теория игр, встречается сравнительно редко (согласно табл. 1 — в 40 % случаев).

Подход оптимиста Лебедева прямо противоположен подходу Воробьева. Предлагается исходить из самого благоприятного стечения обстоятельств. Внешний мир для Лебедева — друг, а не враг. И надо сказать, что для такой позиции есть основания — низкая цена на бензин в полтора раза вероятнее высокой. С точки зрения теории планирования предложение Лебедева можно было бы взять за основу, добавив возможности коррекции плана в случае неблагоприятных обстоятельств, а именно, повышения цены на бензин. И тут мы наталкиваемся на неполноту дискуссии в Совете директоров — никто не рассмотрел возможность подготовки производственной программы «двойного назначения», выполнение которой обеспечивало бы гибкость управления — при низкой цене на бензин был бы налажен выпуск «Добрыни», а при высокой — «Алеши». В частности, такую гибкость обеспечивало бы повышение стандартизации автомашин фирмы, использование в них одних и тех же узлов и деталей, применение для их изготовления одних и тех же технологических процессов.

С чисто логической точки зрения оптимизм Лебедева не менее и не более оправдан, чем пессимизм Воробьева. Люди вообще и менеджеры в частности делятся на два типа — оптимистов и пессимистов. Особенно четко различие проявляется при вложении капитала, поскольку, как правило, увеличение прибыли связано с увеличением риска. Одни люди предпочтут твердый доход (да еще и застрахуются), отказавшись от соблазнительных, но рискованных предложений. Другой тип людей — оптимисты и авантюристы, они уверены, что им повезет. Такие люди надеются разбогатеть, играя в лотерею.

Надо иметь в виду, что на человека выигрыш или проигрыш одной и той же суммы могут оказать совсем разное влияние. Выигрыш приносит радость (но не счастье), в то время как проигрыш может означать разорение, полный крах, т.е. несчастье. Недаром в микроэкономической теории полезности рассматривают парадоксальное понятие — полезность денег — и приходят к выводу, что полезность равна логарифму имеющейся суммы.

Вернемся к Совету директоров фирмы «Русские автомобили». Совсем с других позиций, чем Воробьев и Лебедев, подошел к делу Чибисов. Его подход фактически предполагает, что придется много раз принимать решения по аналогичным вопросам. Вот он и рассчитывает средний доход, исходя из того, что в 60 % случаев цена бензина будет низкой, а в 40 % случаев — высокой. Такой подход вполне обоснован, когда выбор технической политики проводится каждую неделю или каждый день. Например, к нему мог бы прибегнуть менеджер, проектирующий свой ресторан — ориентироваться ли на открытые столики с видом на живописные окрестности или замкнуться в четырех стенах, отгородившись от дождя. Если события происходят много раз, то для принятия решений естественно использовать методы современной прикладной статистики, как это делают, например, при статистическом контроле качества продукции и сертификации. Тогда оценка математического ожидания дохода, проведенная Чибисовым, вполне корректна.

Однако Совет директоров фирмы «Русские автомобили» решает вопрос об одном-единственном выборе. Поэтому 60 % и 40 % — это не вероятности как пределы частот, что обычно предполагается при применении теории вероятностей, это шансы низкой и высокой цены бензина (иногда употребляют термин «субъективные вероятности»). Эти шансы полезны, чтобы в одном критерии свести вместе пессимистический и оптимистический подходы.

Четвертый оратор, Куликов, вводит в обсуждение новый критерий — «упущенная выгода». Обратите внимание — средний доход, рассчитанный Чибисовым, больше при выпуске «Добрыни». А упущенная выгода, наоборот, меньше при выпуске «Алеши». Эти два критерия в данном случае противоречат друг другу.

Каждому менеджеру приходится решать, какой из критериев для него важнее. В этом ему может помочь теория полезности, хорошо разработанная в экономике (в частности, так называемая «маржинальная полезность» в теории поведения потребителя и др.) и имеющая развитый математический аппарат.

Математико-компьютерная поддержка принятия решения

В настоящее время менеджер может использовать при принятии решения различные компьютерные и математические средства. В памяти компьютеров держат массу информации, организованную с помощью баз данных и других программных продуктов, позволяющих оперативно ею пользоваться. Экономико-математические и эконометрические модели позволяют просчитывать последствия тех или иных решений, прогнозировать развитие событий. Методы экспертных оценок, о которых уже шла речь выше, также весьма математизированы и используют компьютеры.

Наиболее часто используются оптимизационные модели принятия решений. Их общий вид таков:

$$F(X) \rightarrow \max,$$
$$X \in A.$$

Здесь X — параметр, который менеджер может выбирать (управляющий параметр). Он может иметь различную природу — число, вектор, множество и т.п. Цель менеджера — максимизировать целевую функцию $F(X)$, выбрав соответствующий X. При этом он должен учитывать ограничения $X \in A$ на возможные значения управляющего параметра X — он должен лежать во множестве A. Ряд примеров оптимизационных задач приведен ниже.

Реальные процедуры принятия управленческих решений

Решения обычно оформляются в виде документов — приказов, планов, предложений и т.п., направляемых в другие организации, ответов на распоряжения и запросы и др. Обычно один из сотрудников — назовем его Исполнителем — готовит первоначальный вариант документа. Он размножается и рассылается на отзыв заинтересованным в нем менеджерам, а иногда и в другие организации. Исполнитель составляет сводку отзывов, с одними из замечаний соглашается, против других высказывает возражения. Затем собирают так называемое «согласительное совещание», на которое приглашают всех тех, с чьим мнением Исполнитель не согласен. В результате дискуссии по ряду позиций достигается компромисс, и возражения снимаются. Окончательное решение по проекту документа с учетом оставшихся возражений принимает ЛПР, например, генеральный директор или Совет директоров, т.е. высшая инстанция в данной организации. Именно такова процедура подготовки Законов РФ, государственных стандартов и иных ответственных документов.

Во многих случаях эта процедура упрощается и отзывы заменяются *визированием,* при котором свое согласие менеджеры выражают, накладывая на документ *визу,* т.е. расписываясь (иногда добавляя несколько слов по затрагиваемой проблеме). Например, подготовленное для отправки в другую организацию письмо или приказ по организации визируют руководители нескольких отделов, и генеральный директор его подписывает от имени фирмы, не вникая в суть (поскольку каждый день он подписывает десятки писем и приказов, то вникать некогда). Адресату уходит письмо, на обратной стороне которого указаны фамилия и телефон Исполнителя (поскольку адресат тоже хорошо знаком с процедурой подготовки документов, он понимает, что по конкретным вопросам надо обращаться к Исполнителю, а не к генеральному директору). В архиве фирмы остается письмо с визами, так что в случае необходимости легко выяснить, кто составил и одобрил документ.

4. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Среди оптимизационных задач в теории принятия решений наиболее известны задачи линейного программирования, в которых максимизируемая функция $F(X)$ является линейной, а ограничения A задаются линейными неравенствами. Начнем с примера (см. [2]).

Производственная задача

Цех может производить стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола — 20 единиц (футов красного дерева). Стул требует 10 человеко-часов, стол — 15. Имеется 400 единиц материала и 450 человеко-часов. Прибыль при производстве стула — 45 долларов США, при производстве стола — 80 долларов США. Сколько надо сделать стульев и столов, чтобы получить максимальную прибыль?

Обозначим: X_1 — число изготовленных стульев, X_2 — число сделанных столов. Задача оптимизации имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&45X_1 + 80X_2 \to \max,\\
&5X_1 + 20X_2 \le 400,\\
&10X_1 + 15X_2 \le 450,\\
&X_1 \ge 0,\\
&X_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

В первой строке выписана целевая функция — прибыль при выпуске X_1 стульев и X_2 столов. Ее требуется максимизировать, выбирая оптимальные значения переменных X_1 и X_2. При этом должны быть выполнены ограничения по материалу (вторая строчка) — истрачено не более 400 футов красного дерева. А также и ограничения по труду (третья строчка) — затрачено не более 450 часов. Кроме того, нельзя забывать, что число столов и число стульев неотрицательны. Если $X_1 = 0$, то это значит, что стулья не выпускаются. Если же хоть один стул сделан, то X_1 положительно. Но невозможно представить себе отрицательный выпуск — X_1 не может быть отрицательным с экономической точки зрения, хотя с математической точки зрения такого ограничения усмотреть нельзя. В четвертой и пятой строчках задачи и констатируется, что переменные неотрицательны.

Условия производственной задачи можно изобразить на координатной плоскости. Будем по горизонтальной оси абсцисс откладывать значения X_1, а по вертикальной оси ординат — значения X_2. Тогда ограничения по материалу и последние две строчки оптимизационной задачи выделяют возможные значения (X_1, X_2) объемов выпуска в виде треугольника (рис. 1).

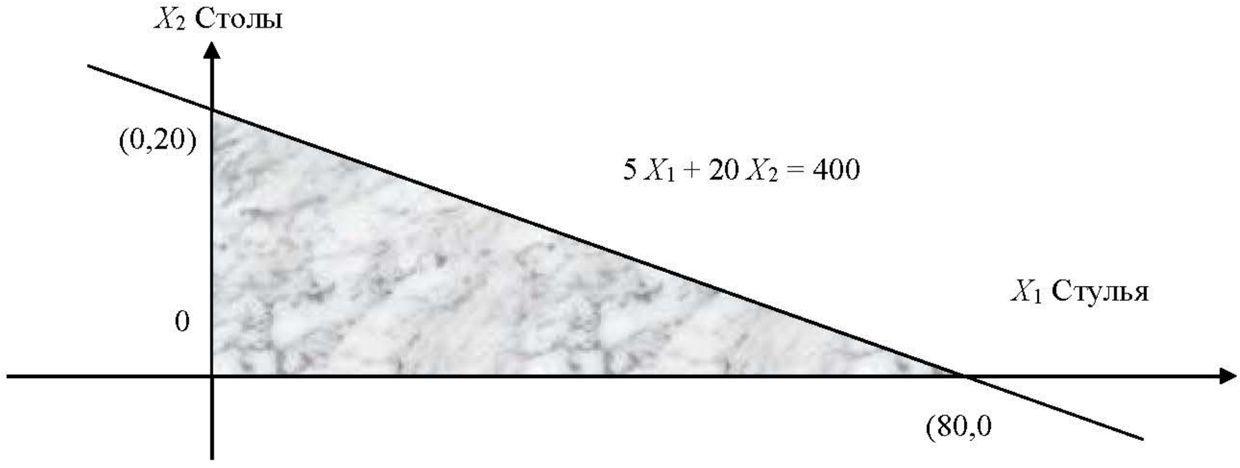


Рис. 1. Ограничения по материалу

Таким образом, ограничения по материалу изображаются в виде выпуклого многоугольника, конкретно, треугольника. Этот треугольник получается путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей второй строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось X_1, соответствующую стульям, в точке (80,0). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление стульев, то будет изготовлено 80 стульев. Та же прямая пересекает ось X_2, соответствующую столам, в точке (0,20). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление столов, то будет изготовлено 20 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, а не равенство — материал останется.

Аналогичным образом можно изобразить и ограничения по труду (рис. 2).

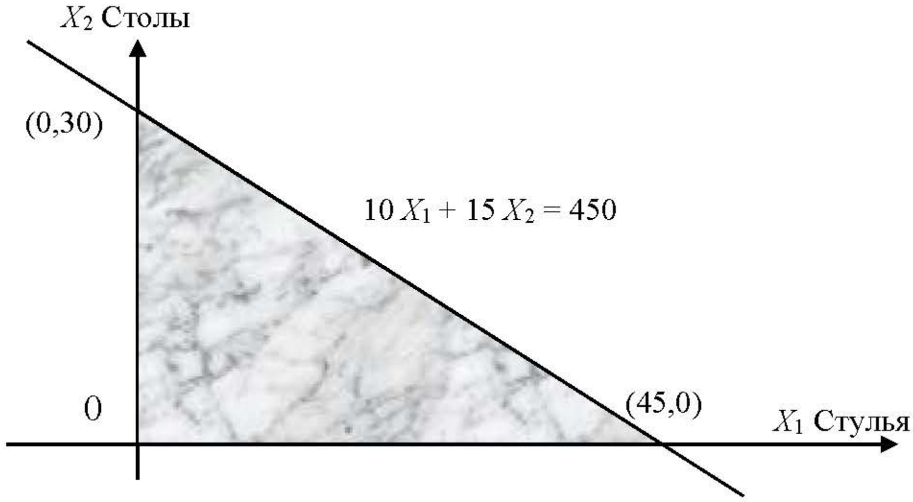


Рис. 2. Ограничения по труду

Таким образом, ограничения по труду также изображаются в виде треугольника. Этот треугольник также получается путем отсечения от первого квадранта примыкающей к началу координат зоны. Отсечение проводится прямой, соответствующей третьей строке исходной задачи, с заменой неравенства на равенство. Прямая пересекает ось X_1, соответствующую стульям, в точке (45,0). Это означает, что если все трудовые ресурсы пустить на изготовление стульев, то будет сделано 45 стульев. Та же прямая пересекает ось X_2, соответствующую столам, в точке (0,30). Это означает, что если всех рабочих поставить на изготовление столов, то будет сделано 30 столов. Для всех точек внутри треугольника выполнено неравенство, а не равенство — часть рабочих будет простаивать.

Мы видим, что очевидного решения нет — для изготовления 80 стульев есть материал, но не хватает рабочих рук, а для производства 30 столов есть рабочая сила, но нет материала. Значит, надо изготавливать и то, и другое. Но в каком соотношении?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо «совместить» рис. 1 и рис. 2, получив область возможных решений, а затем проследить, какие значения принимает целевая функция на этом множестве (рис. 3).

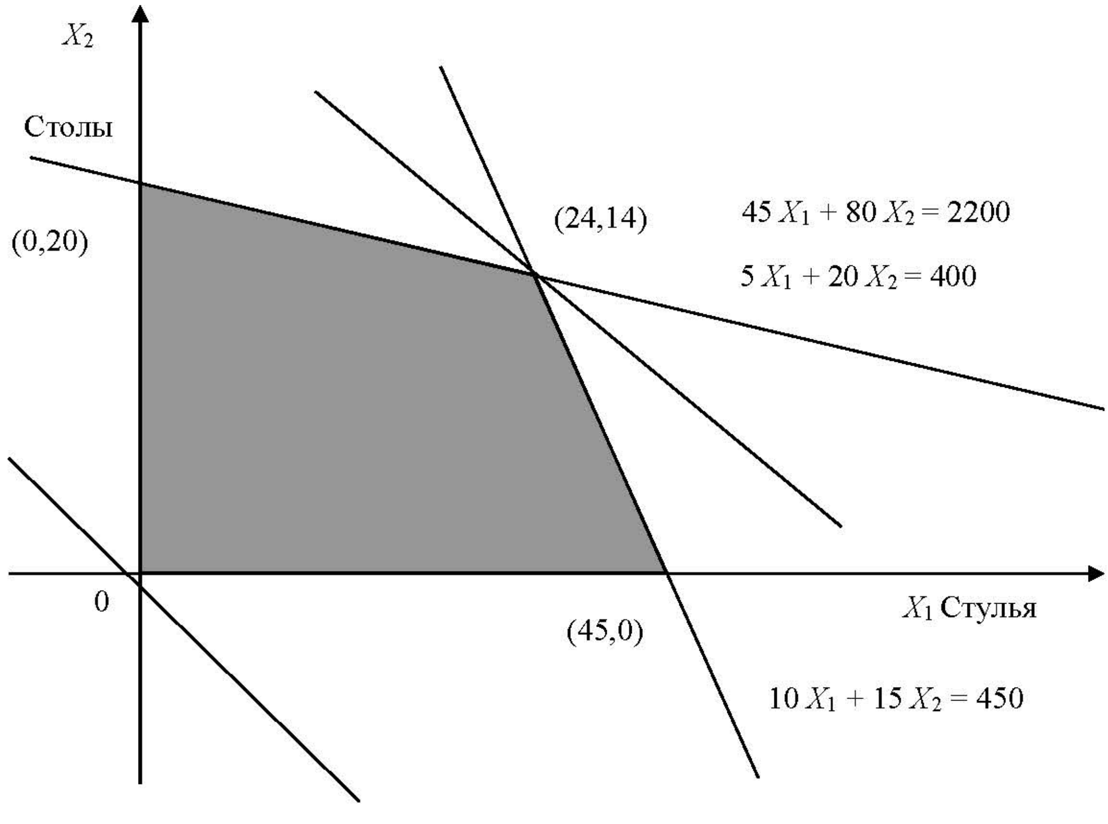


Рис. 3. Основная идея линейного программирования

Таким образом, множество возможных значений объемов выпуска стульев и столов (X_1, X_2), или, в других терминах, множество A, задающее ограничения на параметр управления в общей оптимизационной задаче, представляет собой пересечение двух треугольников, т.е. выпуклый четырехугольник, показанный на рис. 3. Три его вершины очевидны — это (0,0), (45,0) и (0,20). Четвертая — это пересечение двух прямых — границ треугольников на рис. 1 и рис. 2, т.е. решение системы уравнений:

$$5X_1 + 20X_2 = 400,$$
$$10X_1 + 15X_2 = 450.$$

Из первого уравнения: $5X_1 = 400 - 20X_2$, $X_1 = 80 - 4X_2$. Подставляем во второе уравнение: $10(80 - 4X_2) + 15X_2 = 800 - 40X_2 + 15X_2 = 800 - 25X_2 = 450$, следовательно, $25X_2 = 350$, $X_2 = 14$, откуда $X_1 = 80 - 4 \times 14 = 80 - 56 = 24$. Итак, четвертая вершина четырехугольника — это (24,14).

Надо найти максимум линейной функции на выпуклом многоугольнике. В общем случае линейного программирования — максимум линейной функции на выпуклом многограннике, лежащем в конечномерном линейном пространстве. Основная идея линейного программирования состоит в том, что максимум достигается в вершинах многоугольника. В общем случае — в одной вершине, и это — единственная точка максимума. В частном — в двух, и тогда отрезок, их соединяющий, тоже состоит из точек максимума.

Целевая функция $45X_1 + 80X_2$ принимает минимальное значение, равное 0, в вершине (0,0). При увеличении аргументов эта функция увеличивается. В вершине (24,14) она принимает значение 2 200. При этом прямая $45X_1 + 80X_2 =$ $= 2\,200$ проходит между прямыми ограничений $5X_1 + 20X_2 = 400$ и $10X_1 + 15X_2 =$ $= 450$, пересекающимися в той же точке. Отсюда, как и из непосредственной проверки двух оставшихся вершин, вытекает, что максимум целевой функции, равный 2 200, достигается в вершине (24,14).

Таким образом, оптимальный выпуск таков: 24 стула и 14 столов. При этом используется весь материал и все трудовые ресурсы, а прибыль равна 2 200 долларам США.

Двойственная задача

Каждой задаче линейного программирования соответствует так называемая двойственная задача. В ней, по сравнению с исходной задачей, строки переходят в столбцы, неравенства меняют знак, вместо максимума ищется минимум (или наоборот, вместо минимума — максимум). Задача, двойственная к двойственной — эта сама исходная задача. Сравним исходную задачу (слева) и двойственную к ней (справа):

$45\,X_1 + 80\,X_2 \to \max,$	$400\,W_1 + 450\,W_2 \to \min,$
$5\,X_1 + 20\,X_2 \le 400,$	$5\,W_1 + 10\,W_2 \ge 45,$
$10\,X_1 + 15X_2 \le 450,$	$20\,W_1 + 15\,W_2 \ge 80,$
$X_1 \ge 0,$	$W_1 \ge 0,$
$X_2 \ge 0.$	$W_2 \ge 0.$

Почему двойственная задача столь важна? Можно доказать, что оптимальные значения целевых функций в исходной и двойственной задачах совпадают (т.е. максимум в исходной задаче совпадает с минимумом в двойственной). При этом оптимальные значения W_1 и W_2 показывают стоимость материала и труда соответственно, если их оценивать по вкладу в целевую функцию. Чтобы не путать с рыночными ценами этих факторов производства, W_1 и W_2 называют «объективно обусловленными оценками» сырья и рабочей силы.

Линейное программирование как научно-практическая дисциплина

Из всех задач оптимизации задачи линейного программирования выделяются тем, что в них ограничения — системы линейных неравенств или равенств. Ограничения задают выпуклые линейные многогранники в конечном линейном пространстве. Целевые функции также линейны.

Впервые такие задачи решались советским математиком Л.В. Канторовичем (1912–1986 гг.) в 1930-х гг. как задачи производственного менеджмента с целью оптимизации организации производства и производственных процессов, например, процессов загрузки станков и раскройки листов материалов. После второй мировой войны аналогичными задачами занялись в США. В 1975 г. Т. Купманс (1910–1985 гг., родился в Нидерландах, работал в основном в США) и академик АН СССР Л.В. Канторович были награждены Нобелевскими премиями по экономике.

Рассмотрим несколько задач линейного программирования.

Задача об оптимизации смеси (упрощенный вариант)

На химическом комбинате для оптимизации технологического процесса надо составить самую дешевую смесь, содержащую необходимое количество определенных веществ (обозначим их T и H). Энергетическая ценность смеси (в калориях) должна быть не менее заданной. Пусть для простоты смесь составляется из двух компонентов — *К* и *С*. Сколько каждого из них взять для включения в смесь? Исходные данные для расчетов приведены в табл. 3.

Таблица 3

Исходные данные в задаче об оптимизации смеси

Характеристики компонентов	**Содержание в 1 унции *К***	**Содержание в 1 унции *С***	**Потребность**
Вещество *Т*	0,10 мг	0,25 мг	1,00 мг
Вещество *Н*	1,00 мг	0,25 мг	5,00 мг
Калории	110,00	120,00	400,00
Стоимость 1 унции, в центах	3,8	4,2	–

Задача линейного программирования имеет вид:

$$3{,}8\,K + 4{,}2\,C \to \min,$$
$$0{,}10\,K + 0{,}25\,C \geq 1{,}00,$$
$$1{,}00\,K + 0{,}25\,C \geq 5{,}00,$$
$$110{,}00\,K + 120{,}00\,C \geq 400{,}00,$$
$$K \geq 0,$$
$$C \geq 0.$$

Ее графическое решение представлено на рис. 4.

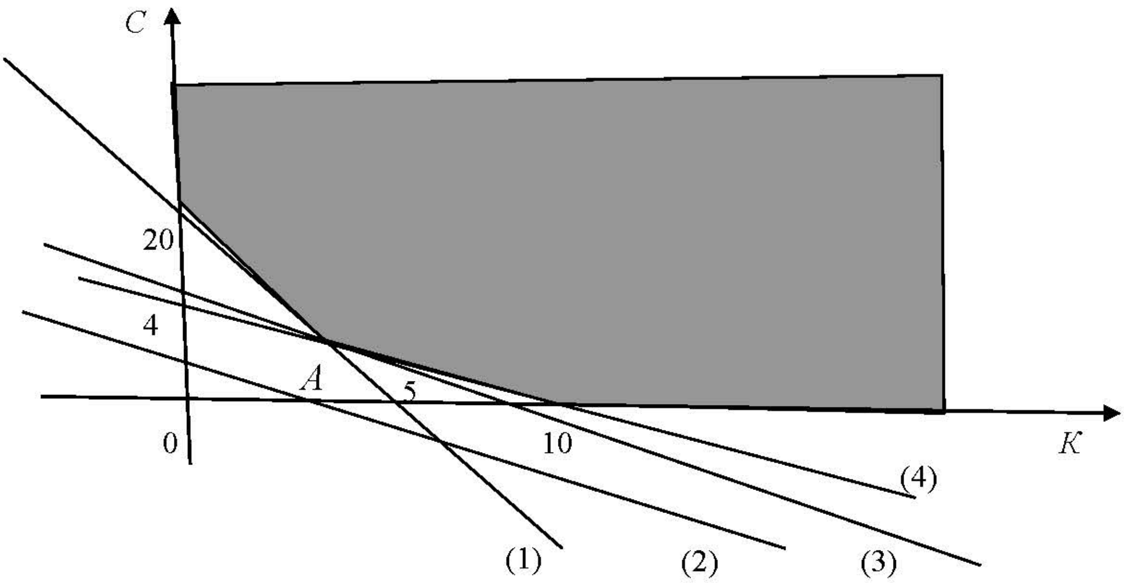


Рис. 4. Графическое решение задачи об оптимизации смеси

На рис. 4 ради облегчения восприятия четыре прямые обозначены номерами (1)–(4). Прямая (1) — это прямая 1,00 K + 0,25 C = 5,00 (ограничение по веществу H). Она проходит, как и показано на рисунке, через точки (5,0) на оси абсцисс и (0,20) на оси ординат. Обратите внимание, что допустимые значения параметров (K, C) лежат выше прямой (1), в отличие от ранее рассмотренных случаев в предыдущей производственной задаче.

Прямая (2) — это прямая 110,00 K + 120,00 C = 400,00 (ограничение по калориям). Обратим внимание, что в области неотрицательных C она расположена всюду ниже прямой (1). Действительно, это верно при $K = 0$, прямая (1) проходит через точку (0,20), а прямая (2) — через точку (0, 400 / 120). Точка пересечения двух прямых находится при решении системы уравнений.

$$1{,}00\,K + 0{,}25\,C = 5{,}00,$$
$$110{,}00\,K + 120{,}00\,C = 400{,}00.$$

Из первого уравнения $K = 5 - 0{,}25\,C$. Подставим во второе: $110\,(5 - 0{,}25\,C) + 120\,C = 400$, откуда $550 - 27{,}5\,C + 120\,C = 400$. Следовательно, $150 = -92{,}5\,C$, т.е. решение достигается при отрицательном C. Это и означает, что при всех положительных C прямая (2) лежит ниже прямой (1). Значит, если выполнено ограничения по H, то обязательно выполнено и ограничение по калориям. Мы столкнулись с новым явлением — некоторые ограничения с математической точки зрения могут оказаться лишними. С экономической точки зрения они необходимы, отражают существенные черты постановки задачи, но в данном случае внутренняя структура задачи оказалась такова, что ограничение по калориям не участвует в формировании допустимой области параметров и нахождении решения.

Прямая (4) — это прямая 0,1 K + 0,25 C = 1 (ограничение по веществу T). Она проходит, как и показано на рисунке, через точки (10,0) на оси абсцисс и (0,4) на оси ординат. Обратите внимание, что допустимые значения параметров (K, C) лежат выше прямой (4), как и для прямой (1).

Следовательно, область допустимых значений параметров (K, C) является неограниченной сверху. Из всей плоскости она выделяется осями координат (лежит в первом квадранте) и прямыми (1) и (4) (лежит выше этих прямых). Область допустимых значений параметров (K, C) можно назвать «неограниченным многоугольником». Минимум целевой функции 3,8 K + 4,2 C может достигаться только в вершинах этого «многоугольника». Вершин всего три. Это пересечения с осями абсцисс (10,0) и ординат (0,20) прямых (1) и (4) (в каждом случае из двух пересечений берется то, которое удовлетворяет обоим ограничениям). Третья вершина — это точка пересечения прямых (1) и (4), координаты которой находятся при решении системы уравнений:

$$0{,}10\ K + 0{,}25\ C = 1{,}00,$$
$$1{,}00\ K + 0{,}25\ C = 5{,}00.$$

Из второго уравнения $K = 5 - 0{,}25\ C$, из первого $0{,}10\ (5 - 0{,}25\ C) + 0{,}25\ C = 0{,}5 - 0{,}025\ C + 0{,}25\ C = 0{,}5 + 0{,}225\ C = 1$, откуда $C = 0{,}5 / 0{,}225 = 20 / 9$ и $K = 5 - 5 / 9 = 40 / 9$. Итак, $A = (40 / 9;\ 20 / 9)$.

Прямая (3) на рис. 4 — это прямая, соответствующая целевой функции $3{,}8\ K + 4{,}2\ C$. Она проходит между прямыми (1) и (4), задающими ограничения, и минимум достигается в точке A, через которую и проходит прямая (3). Следовательно, минимум равен $3{,}8 \times 40 / 9 + 4{,}2 \times 20 / 9 = 236 / 9$. Задача об оптимизации смеси полностью решена.

Двойственная задача, построенная по описанным выше правилам, имеет приведенный ниже вид (мы повторяем здесь и исходную задачу об оптимизации смеси, чтобы наглядно продемонстрировать технологию построения двойственной задачи):

$3{,}8\ K + 4{,}2\ C \to \min,$	$W_1 + 5\ W_2 + 400\ W_3 \to \max,$
$0{,}10\ K + 0{,}25\ C \geq 1{,}00,$	$0{,}1\ W_1 + 1{,}10\ W_2 + 110\ W_3 \leq 3{,}8,$
$1{,}00\ K + 0{,}25\ C \geq 5{,}00,$	$0{,}25\ W_1 + 0{,}25\ W_2 + 120\ W_3 \leq 4{,}2,$
$110{,}00\ K + 120{,}00\ C \geq 400{,}00,$	$W_1 \geq 0,$
$K \geq 0,$	$W_2 \geq 0,$
$C \geq 0.$	$W_3 \geq 0.$

Минимальное значение в прямой задаче, как и должно быть, равно максимальному значению в двойственной задаче, т.е. оба числа равны 236 / 9. Интерпретация двойственных переменных: W_1 — «стоимость» единицы вещества T, а W_2 — «стоимость» единицы вещества H, измеренные «по их вкладу» в целевую функцию. При этом $W_3 = 0$, поскольку ограничение на число калорий никак не участвует в формировании оптимального решения. Итак, W_1, W_2, W_3 — это так называемые объективно обусловленные оценки (по Л.В. Канторовичу) ресурсов (веществ T и H, калорий).

Планирование номенклатуры и объемов выпуска

Вернемся к организации производства. Предприятие может выпускать автоматические кухни (вид кастрюль), кофеварки и самовары. В табл. 4 приведены данные о производственных мощностях, имеющихся на предприятии (в штуках изделий).

При этом штамповка и отделка проводятся на одном и том же оборудовании. Оно позволяет штамповать за заданное время или 20 000 кухонь, либо 30 000 кофеварок, либо и то, и другое, не в меньшем количестве. А вот сборка проводится на отдельных участках.

Таблица 4

Производственные мощности (в шт.)

Характеристики изделий	Кухни	Кофеварки	Самовары
Штамповка	20 000	30 000	12 000
Отделка	30 000	10 000	10 000
Сборка	20 000	12 000	8 000
Объем выпуска	X_1	X_2	X_3
Удельная прибыль (на одно изделие)	15	12	14

Задача линейного программирования имеет вид:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, \quad (0)$$
$$X_1 / 200 + X_2 / 300 + X_3 / 120 \leq 100, \quad (1)$$
$$X_1 / 300 + X_2 / 100 + X_3 / 100 \leq 100, \quad (2)$$
$$X_1 / 200 \leq 100, \quad (3)$$
$$X_2 / 120 \leq 100, \quad (4)$$
$$X_3 / 80 \leq 100, \quad (5)$$
$$F = 15 X_1 + 12 X_2 + 14 X_3 \rightarrow \max.$$

Здесь:

(0) — обычное в экономике условие неотрицательности переменных,

(1) — ограничение по возможностям штамповки (выраженное для облегчения восприятия в процентах),

(2) — ограничение по возможностям отделки,

(3) — ограничение по сборке для кухонь,

(4) — то же для кофемолок,

(5) — то же для самоваров (как уже говорилось, все три вида изделий собираются на отдельных линиях).

Наконец, целевая функция F — общая прибыль предприятия.

Заметим, что неравенство (3) вытекает из неравенства (1), а неравенство (4) — из (2). Поэтому неравенства (3) и (4) можно сразу отбросить.

Отметим сразу любопытный факт. Как будет установлено, в оптимальном плане $X_3 = 0$, т.е. самовары выпускать невыгодно.

5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методы решения задач линейного программирования относятся к вычислительной математике, а не к экономике. Однако экономисту полезно знать о свойствах интеллектуального инструмента, которым он пользуется.

С ростом мощности компьютеров необходимость применения изощренных методов снижается, поскольку во многих случаях время счета перестает быть лимитирующим фактором, поскольку весьма мало (доли секунд). Поэтому мы разберем лишь три метода.

Простой перебор

Возьмем некоторый многомерный параллелепипед, в котором лежит многогранник, задаваемый ограничениями. Как его построить? Например, если имеется ограничение типа $2X_1 + 5X_2 \leq 10$, то, очевидно, $0 \leq X_1 \leq 10 / 2 = 5$ и $0 \leq X_2 \leq$ $\leq 10 / 2 = 5$. Аналогичным образом от линейных ограничений общего вида можно перейти к ограничениям на отдельные переменные. Остается взять максимальные границы по каждой переменной. Если многогранник, задаваемый ограничениями, неограничен, как было в задаче о диете, можно похожим, но несколько более сложным образом выделить его «обращенную» к началу координат часть, содержащую решение, и заключить ее в многомерный параллелепипед.

Проведем перебор точек параллелепипеда с шагом $1 / 10^n$ последовательно при $n = 2, 3, ...$, вычисляя значения целевой функции и проверяя наличие ограничений. Из всех точек, удовлетворяющих ограничениям, возьмем ту, в которой целевая функция максимальна. Решение найдено! (Более строго выражаясь, найдено с точностью до $1 / 10^n$.).

Направленный перебор

Начнем с точки, удовлетворяющей ограничениям (ее можно найти простым перебором). Будем последовательно (или случайно — так называемый метод случайного поиска) менять ее координаты на определенную величину Δ, каждый раз в точку с более высоким значением целевой функции. Если выйдем на плоскость ограничения, будем двигаться по ней (находя одну из координат по уравнению ограничения). Затем движение по ребру (когда два ограничения-неравенства переходят в равенства)... Остановка — в вершине линейного многогранника. Решение найдено! (Более строго выражаясь, найдено с точностью до Δ; если необходимо, в окрестности найденного решения проводим направленный перебор с шагом $\Delta / 2$, $\Delta / 4$ и т.д.).

Симплекс-метод

Этот один из первых специализированных методов оптимизации, нацеленный на решение задач линейного программирования, в то время как методы простого и направленного перебора могут быть применены для решения практически любой задачи оптимизации. Он был предложен американцем Г. Данцигом в 1951 г. Симплекс-метод состоит в продвижении по выпуклому многограннику ограничений от вершины к вершине, при котором на каждом шаге значение целевой функции улучшается до тех пор, пока не будет достигнут оптимум. Разберем пример со стр. 208 книги [3].

Рассмотрим задачу линейного программирования, сформулированную выше при рассмотрении оптимизации номенклатуры и объемов выпуска:

$$\begin{aligned}
&F = 15X_1 + 12X_2 + 14X_3 \to \max.\\
&X_1/200 + X_2/300 + X_3/120 \le 100,\\
&X_1/300 + X_2/100 + X_3/100 \le 100,\\
&X_3/80 \le 100.
\end{aligned}$$

Неотрицательность переменных не будем специально указывать, поскольку в задачах линейного программирования это предположение всегда принимается.

В соответствии с симплекс-методом введем так называемые «свободные переменные» X_4, X_5, X_6, соответствующие недоиспользованным мощностям, т.е. перейдем к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&X_1/200 + X_2/300 + X_3/120 + X_4 = 100,\\
&X_1/300 + X_2/100 + X_3/100 + X_5 = 100,\\
&X_3/80 + X_6 = 100,\\
&15X_1 + 12X_2 + 14X_3 = F.
\end{aligned}$$

У этой системы имеется очевидное решение, соответствующее вершине многогранника допустимых значений переменных:

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0, X_4 = X_5 = X_6 = 100, F = 0.$$

В терминах исходной задачи это значит, что ничего не надо выпускать. Такое решение приемлемо только на период летних отпусков.

Выбираем переменную, которая входит в целевую функцию F с самым большим положительным коэффициентом. Это X_1.

Сравниваем частные от деления свободных членов в первых трех уравнениях на коэффициенты при только что выбранной переменной X_1:

$$100 / (1 / 200) = 20\,000,\ 100 / (1 / 300) = 30\,000,\ 100 / 0 = +\infty.$$

Выбираем строку, которой соответствует минимальное из всех положительных отношений. В рассматриваемом примере — это первая строка, которой соответствует отношение 20 000.

Умножим первую строку на 200, чтобы получить X_1 с единичным коэффициентом:

$$X_1 + 2 / 3\,X_2 + 2 / 1{,}2\,X_3 + 200\,X_4 = 20\,000.$$

Затем умножим вновь полученную строку на (−1 / 300) и сложим со второй строкой, получим:

$$7 / 900\,X_2 + 4 / 900\,X_3 - 2 / 3\,X_4 + X_5 = 100 / 3.$$

Ту же преобразованную первую строку умножим на (−15) и сложим со строкой, в правой части которой стоит F, получим:

$$2\,X_2 - 11\,X_3 - 3\,000\,X_4 = F - 300\,000.$$

В результате система уравнений преобразуется к виду, в котором переменная X_1 входит только в первое уравнение:

$$\begin{aligned}
&X_1 + 2 / 3\,X_2 + 2 / 1{,}2\,X_3 + 200\,X_4 = 20\,000,\\
&7 / 900\,X_2 + 4 / 900\,X_3 - 2 / 3\,X_4 + X_5 = 100 / 3,\\
&X_3 / 80 + X_6 = 100,\\
&2\,X_2 - 11\,X_3 - 3\,000\,X_4 = F - 300\,000.
\end{aligned}$$

Очевидно, у новой системы имеется улучшенное по сравнению с исходным решение, соответствующее вершине в шестимерном пространстве:

$$X_1 = 20\,000,\ X_2 = X_3 = X_4 = 0,\ X_5 = 100 / 3,\ X_6 = 100,\ F = 300\,000.$$

В терминах исходной задачи это значит, что надо выпускать только кухни. Такое решение приемлемо, если допустимо выпускать только один вид продукции.

Повторим описанную выше операцию. В строке с F имеется еще один положительный коэффициент — при X_2 (если бы положительных коэффициентов было несколько — мы взяли бы максимальный из них). На основе коэффициентов при X_2 (а не при X_1, как в первый раз) образуем частные от деления соответствующих свободных членов на эти коэффициенты:

$$20\,000 / (2 / 3) = 30\,000, (100 / 3) / (7 / 900) = 30\,000 / 7, 100 / 0 = +\infty.$$

Таким образом, нужно выбрать вторую строку, для которой имеем наименьшее положительное отношение 30 000 / 7. Вторую строку умножим на 900 / 7 (чтобы коэффициент при X_2 равнялся 1). Затем добавим обновленную строку ко всем строкам, содержащим X_2, предварительно умножив их на подходящие числа, т.е. такие, чтобы все коэффициенты при X_2 стали бы после сложения равны 0, за исключением коэффициента второй строки, который уже стал равняться 1. Получим систему уравнений:

$$X_1 + 9 / 7\, X_3 + 1800 / 7\, X_4 - 600 / 7\, X_5 = 120\,000 / 7,$$
$$X_2 + 4 / 7\, X_3 - 600 / 7\, X_4 + 900 / 7 X_5 = 30\,000 / 7,$$
$$X_3 / 80 + X_6 = 100,$$
$$-85 / 7\, X_3 - 19\,800 / 7\, X_4 - 1\,800 / 7\, X_5 = F - 308\,571.$$

Поскольку все переменные неотрицательны, то из последнего уравнения следует, что прибыль F достигает своего максимального значения, равного 308 571, при $X_3 = X_4 = X_5 = 0$. Из остальных уравнений следует, что при этом $X_1 = 120\,000 / 7 = 17\,143$, $X_2 = 30\,000 / 7 = 4\,286$, $X_6 = 100$. Поскольку в строке с F не осталось ни одного положительного коэффициента при переменных, то алгоритм симплекс-метода закончил свою работу, оптимальное решение найдено.

Практические рекомендации таковы: надо выпустить 17 143 кухни, вчетверо меньше, т.е. 4 286 кофемолок, самоваров не выпускать вообще. При этом прибыль будет максимальной и равной 308 571. Все производственное оборудование будет полностью загружено, за исключением линии по сборке самоваров.

Транспортная задача

Различные технико-экономические и экономические задачи производственного менеджмента, от оптимальной загрузки станка и раскройки стального листа или полотна ткани до анализа межотраслевого баланса и оценки темпов роста экономики страны в целом, приводят к необходимости решения тех или иных задач линейного программирования. В книге [2] приведен обширный перечень публикаций, посвященный многочисленным применениям линейного программирования в металлургии, угольной, химической, нефтяной, бумажной и прочих отраслях промышленности, в проблемах транспорта и связи, планирования производства, конструирования и хранения продукции, сельском хозяйстве, в научных исследованиях, в том числе экономических, и даже при регулировании уличного движения.

В качестве очередного примера рассмотрим так называемую транспортную задачу. Имеются склады, запасы на которых известны. Известны потребители и объемы их потребностей. Необходимо доставить товар со складов потребителям. Можно по-разному организовать «прикрепление» потребителей к складам, т.е. установить, с какого склада какому потребителю и сколько вести. Кроме того, известна стоимость доставки единицы товара с определенного склада определенному потребителю. Требуется минимизировать издержки по перевозке.

Например, может идти речь о перевозке песка — сырья для производства кирпичей. В Москву песок обычно доставляет самым дешевым транспортом — водным. Поэтому в качестве складов можно рассматривать порты, а в качестве запасов — их суточную пропускную способность. Потребителями являются кирпичные заводы, а их потребности определяются суточным производством (в соответствии с имеющимися заказами). Для доставки необходимо загрузить автотранспорт, проехать по определенному маршруту и разгрузить его. Стоимость этих операций рассчитывается по известным правилам, на которых не имеет смысла останавливаться.

Рассмотрим пример транспортной задачи, исходные данные к которой представлены в табл. 5.

Таблица 5

Исходные данные к транспортной задаче

Склады	**Потребитель 1**	**Потребитель 2**	**Потребитель 3**	**Потребитель 4**	**Запасы на складах**
Склад 1	2	5	5	5	60
Склад 2	1	2	1	4	80
Склад 3	3	1	5	2	60
Потребности	50	40	70	40	200

В табл. 5, кроме объемов потребностей и величин запасов, приведены стоимости доставки единицы товара со склада i, $i = 1, 2, 3$, потребителю j,

$j = 1, 2, 3, 4$. Например, самая дешевая доставка — со склада 2 потребителям 1 и 3, а также со склада 3 потребителю 2. Однако на складе 2 имеется 80 единиц товара, а потребителям 1 и 3 требуется 50 + 70 = 120 единиц, поэтому к ним придется везти товар и с других складов. Обратите внимание, что в табл. 5 запасы на складах равны суммарным потребностям. Для примера с доставкой песка кирпичным заводам это вполне естественное ограничение — при невыполнении такого ограничения либо порты будут засыпаны горами песка, либо кирпичные заводы не выполнят заказы.

Надо спланировать перевозки, т.е. выбрать объемы X_{ij} поставок товара со склада i потребителю j, где $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, всего в задаче имеется 12 переменных. Они удовлетворяют двум группам ограничений. Во-первых, заданы запасы на складах:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 60,$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 80,$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 60.$$

Во-вторых, известны потребности клиентов:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 50,$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 40,$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 70,$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 40.$$

Итак, всего 7 ограничений типа равенств. Кроме того, все переменные неотрицательны — еще 12 ограничений.

Целевая функция — издержки по перевозке, которые необходимо минимизировать:

$$F = 2\,X_{11} + 5\,X_{12} + 4\,X_{13} + 5\,X_{14} + X_{21} + 2\,X_{22} + X_{23} +$$
$$+ 4\,X_{24} + 3\,X_{31} + X_{32} + 5\,X_{33} + 2\,X_{34} \to \min.$$

Рассматриваются также различные варианты транспортной задачи. Например, если доставка производится вагонами, то объемы поставок должны быть кратны вместимости вагона.

Количество переменных и ограничений в транспортной задаче таково, что для ее решения не обойтись без компьютера и соответствующего программного продукта.

6. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Задачи оптимизации, в которых переменные принимают целочисленные значения, относятся к целочисленному программированию. Рассмотрим несколько таких задач.

Задача о выборе оборудования

На приобретение оборудования для нового участка цеха выделено 20 000 долларов США. При этом можно занять площадь не более 38 м^2. Имеется возможность приобрести станки типа А и станки типа Б. При этом станки типа А стоят 5 000 долларов США, занимают площадь 8 м^2 (включая необходимые технологические проходы) и имеют производительность 7 тыс. единиц продукции за смену. Станки типа Б стоят 2 000 долларов США, занимают площадь 4 м^2 и имеют производительность 3 тыс. единиц продукции за смену. Необходимо рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий при заданных ограничениях максимум общей производительности участка.

Пусть X — количество станков типа А, а $У$ — количество станков типа Б, входящих в комплект оборудования. Требуется выбрать комплект оборудования так, чтобы максимизировать производительность C участка (в тыс. единиц за смену):

$$C = 7\,X + 3\,У \to \max.$$

При этом должны быть выполнены следующие ограничения:
- по стоимости (в тыс. долларов США)

$$5\,X + 2\,У \leq 20,$$

- по занимаемой площади (в м^2)

$$8\,X + 4\,У \leq 38,$$

а также вновь появляющиеся специфические ограничения по целочисленности, а именно,

$$X \geq 0,\ У \geq 0,\ X \text{ и } У \text{ — целые числа.}$$

Сформулированная математическая задача отличается от задачи линейного программирования только последним условием целочисленности. Однако наличие этого условия позволяет (в данном конкретном случае) легко решить задачу перебором. Действительно, как ограничение по стоимости, так и ограничение по площади дают, что $X \leq 4$. Значит, X может принимать лишь одно из 5 значений: 0, 1, 2, 3, 4.

Если $X = 4$, то из ограничения по стоимости следует, что $У = 0$, а потому $C = 7X = 28$.

Если $X= 3$, то из первого ограничения вытекает, что $У \leq 2$, из второго $У \leq 3$. Значит, максимальное C при условии выполнения ограничений достигается при $У =2$, а именно $C = 21 + 6 = 27$.

Если $X = 2$, то из первого ограничения следует, что $У \leq 5$, из второго также $У \leq 5$. Значит, максимальное C при условии выполнения ограничений достигается при $У = 5$, а именно $C = 14 + 15 = 29$.

Если $X = 1$, то из первого ограничения имеем $У \leq 7$, из второго также $У \leq 7$. Значит, максимальное C при условии выполнения ограничений достигается при $У = 7$, а именно $C = 7 + 21 = 28$.

Если $X = 0$, то из первого ограничения вытекает $У \leq 10$, из второго $У \leq 9$. Значит, максимальное C при условии выполнения ограничений достигается при $У = 9$, а именно $C = 27$.

Все возможные случаи рассмотрены. Максимальная производительность $C = 29$ (тыс. единиц продукции за смену) достигается при $X = 2$, $У = 5$. Следовательно, надо покупать 2 станка типа А и 5 станков типа Б.

Задача о ранце

Общий вес ранца заранее ограничен. Какие предметы положить в ранец, чтобы общая полезность отобранных предметов была максимальна? Вес каждого предмета известен.

Есть много эквивалентных формулировок. Например, можно вместо ранца рассматривать спутник, а в качестве предметов — научные приборы. Тогда задача интерпретируется как отбор приборов для запуска на орбиту. Правда, при этом предполагается решенной предварительная задача — оценка сравнительной ценности исследований, для которых нужны те или иные приборы.

Перейдем к математической постановке. Предполагается, что имеется n предметов, и для каждого из них необходимо решить, класть его в ранец или не класть. Для описания решения вводятся булевы переменные X_k, $k = 1, 2, ..., n$ (т.е. переменные, принимающие два значения, а именно, 0 и 1). При этом $X_k = 1$, если предмет размещают в ранце, и $X_k = 0$, если нет, $k = 1, 2, ..., n$. Для каждого предмета известны две константы: A_k — вес k-го предмета и C_k — полезность k-го предмета, $k = 1, 2, ..., n$. Максимально возможную вместимость ранца обозначим B. Оптимизационная задача имеет вид:

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + ... + C_n X_n \to \max,$$
$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + ... + A_n X_n \leq B.$$

В отличие от предыдущих задач, управляющие параметры X_k, $k = 1, 2, ..., n$ принимают значения из множества, содержащего два элемента — 0 и 1.

К целочисленному программированию относятся задачи размещения (производственных объектов), теории расписаний, календарного и оперативного планирования, назначения персонала и т.д. (см., например, монографию [3]).

7. ЭКСПЕРТНЫЕ ОЦЕНКИ, БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Целочисленное программирование успешно применяется и для усреднения ответов экспертов. В теории принятия решений большое место занимают экспертные опросы. Сначала рассмотрим балльные оценки.

Методы средних баллов

Часто опрашиваемых просят выставить баллы объектам, изделиям, технологическим процессам, предприятиям, проектам, заявкам на выполнение научно-исследовательских работ, идеям, проблемам, программам, политикам и т.п., а затем рассчитывают средние баллы и рассматривают их как интегральные оценки, выставленные коллективом опрошенных. Какими формулами пользоваться для вычисления средних величин? Ведь видов средних величин очень много. По традиции обычно применяют среднее арифметическое. Мы уже более 25 лет знаем, что такой способ некорректен, поскольку баллы обычно измерены в так называемой порядковой шкале. Как доказано в монографии [6], обоснованным является использование медиан в качестве средних баллов. Однако полностью игнорировать средние арифметические нерационально из-за их привычности и распространенности. Поэтому целесообразно использовать одновременно оба метода — и метод средних арифметических рангов (баллов), и методов медианных рангов. Такая рекомендация находится в согласии с концепцией устойчивости, рекомендующей использовать различные методы для обработки одних и тех же данных с целью выделить выводы, получаемые одновременно при всех методах [6]. Такие выводы, видимо, соответствуют реальной действительности, в то время как заключения, меняющиеся от метода к методу, зависят от субъективизма исследователя, выбирающего метод обработки исходных экспертных оценок.

Пример сравнения восьми проектов

Рассмотрим конкретный пример применения только что сформулированного подхода. По заданию руководства фирмы анализировались восемь проектов, предлагаемых для включения в план стратегического развития фирмы. Они были обозначены следующим образом: Д, Л, М-К, Б, Г-Б, Сол, Стеф, К (по фамилиям менеджеров, предложивших их для рассмотрения). Все проекты были направлены 12 экспертам, назначенным Правлением фирмы. В приведенной ниже табл. 6 приведены ранги восьми проектов, присвоенные им каждым из 12 экспертов в соответствии с их представлением о целесообразности включения проекта в стратегический план фирмы (ранг 1 — самый лучший проект, который обязательно надо реализовать, ранг 2 — второй по привлекательности проект, ..., ранг 8 — наиболее сомнительный проект).

Таблица 6

Ранги 8 проектов по степени привлекательности для включения в план стратегического развития фирмы

№ эксперта	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
1	5	3	1	2	8	4	6	7
2	5	4	3	1	8	2	6	7
3	1	7	5	4	8	2	3	6
4	6	4	2,5	2,5	8	1	7	5
5	8	2	4	6	3	5	1	7
6	5	6	4	3	2	1	7	8
7	6	1	2	3	5	4	8	7
8	5	1	3	2	7	4	6	8
9	6	1	3	2	5	4	7	8
10	5	3	2	1	8	4	6	7
11	7	1	3	2	6	4	5	8
12	1	6	5	3	8	4	2	7

Примечание. Эксперт № 4 считает, что проекты М-К и Б равноценны, но уступают лишь одному проекту — проекту Сол. Поэтому проекты М-К и Б должны были бы стоять на втором и третьем местах и получить баллы 2 и 3. Поскольку они равноценны, то получают средний балл $(2 + 3) / 2 = 5 / 2 = 2{,}5$.

Анализируя результаты работы экспертов (т.е. упомянутую табл. 6), члены Правления фирмы были вынуждены констатировать, что полного согласия между экспертами нет, а потому данные табл. 6 следует подвергнуть более тщательному математическому анализу.

Метод средних арифметических рангов

Сначала был применен метод средних арифметических рангов. Для этого прежде всего была подсчитана сумма рангов, присвоенных проектам (см. табл. 7). Затем эта сумма была разделена на число экспертов, в результате рассчитан средний арифметический ранг (именно эта операция дала название методу). По средним рангам строится итоговая ранжировка (в другой терминологии — упорядочение), исходя из принципа — чем меньше средний ранг, тем лучше проект. Наименьший средний ранг, равный 2,625, у проекта Б, — следовательно, в итоговой ранжировке он получает ранг 1. Следующая по величине сумма, равная 3,125, у проекта М-К, — и он получает итоговый ранг 2. Проекты Л и Сол имеют одинаковые суммы (равные 3,25), значит, с точки зрения экспертов они равноценны (при рассматриваемом способе сведения вместе мнений экспертов), а потому они должны бы стоять на 3 и 4 местах и получают средний балл (3 + 4) / 2 = 3,5. Дальнейшие результаты приведены в табл. 7 ниже.

Таблица 7

Результаты расчетов для данных, приведенных в табл. 6

Показатель	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
Сумма рангов	60	39	37,5	31.5	76	39	64	85
Среднее арифметическое рангов	5	3,25	3,125	2,625	6,333	3,25	5,333	7,083
Итоговый ранг по среднему арифметическому	5	3,5	2	1	7	3,5	6	8
Медианы рангов	5	3	3	2,25	7,5	4	6	7
Итоговый ранг по медианам	5	2,5	2,5	1	8	4	6	7

Итак, ранжировка по суммам рангов (или, что то же, по средним арифметическим рангам) имеет вид:

$$Б < М\text{-}К < \{Л, Сол\} < Д < Стеф < Г\text{-}Б < К. \quad (1)$$

Здесь запись типа «А < Б» означает, что проект А предшествует проекту Б (т.е. проект А лучше проекта Б). Поскольку модели Л и Сол получили одинаковую сумму баллов, то по рассматриваемому методу они эквивалентны, а потому объединены в группу (в фигурных скобках). В терминологии математической статистики ранжировка (1) имеет одну связь.

Метод медиан рангов

Значит, наука сказала свое слово, итог расчетов — ранжировка (1), и на ее основе предстоит принимать решение? Но тут наиболее знакомый с современной эконометрикой член Правления вспомнил, что ответы экспертов измерены в порядковой шкале, а потому для них неправомерно проводить усреднение методом средних арифметических. Надо использовать метод медиан.

Что это значит? Надо взять ответы экспертов, соответствующие одному из проектов, например, проекту Д. Это ранги 5, 5, 1, 6, 8, 5, 6, 5, 6, 5, 7, 1. Затем их надо расположить в порядке неубывания (проще было бы сказать — «в порядке возрастания», но поскольку некоторые ответы совпадают, то приходится использовать непривычный термин «неубывание»). Получим последовательность: 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8. На центральных местах — шестом и седьмом — стоят 5 и 5. Следовательно, медиана равна 5.

Медианы совокупностей из 12 рангов, соответствующих определенным проектам, приведены в предпоследней строке табл. 7. При этом медианы вычислены по обычным правилам статистики — как среднее арифметическое центральных членов вариационного ряда. Итоговое упорядочение по методу медиан приведено в последней строке таблицы. Ранжировка (т.е. упорядочение — итоговое мнение комиссии экспертов) по медианам имеет вид:

$$\text{Б} < \{\text{М-К, Л}\} < \text{Сол} < \text{Д} < \text{Стеф} < \text{К} < \text{Г-Б}. \quad (2)$$

Поскольку проекты Л и М-К имеют одинаковые медианы баллов, то по рассматриваемому методу ранжирования они эквивалентны, а потому объединены в группу (кластер), т.е. с точки зрения математической статистики ранжировка (2) имеет одну связь.

Сравнение ранжировок по методу средних арифметических и методу медиан

Сравнение ранжировок (1) и (2) показывает их близость (похожесть). Можно принять, что проекты М-К, Л, Сол упорядочены как М-К < Л < Сол, но из-за погрешностей экспертных оценок в одном методе признаны равноценными проекты Л и Сол (ранжировка (1)), а в другом — проекты М-К и Л (ранжировка (2)). Существенным является только расхождение, касающееся упорядочения проектов К и Г-Б: в ранжировке (1) Г-Б < К, а в ранжировке (2), наоборот, К < Г-Б. Однако эти проекты — наименее привлекательные из восьми рассматриваемых, и при выборе наиболее привлекательных проектов для дальнейшего обсуждения и использования на это расхождение можно не обращать внимания.

Рассмотренный пример демонстрирует сходство и различие ранжировок, полученных по методу средних арифметических рангов и по методу медиан, а также пользу от их совместного применения.

Метод согласования кластеризованных ранжировок

Проблема состоит в выделении общего нестрогого порядка из набора кластеризованных ранжировок (на статистическом языке — ранжировок со связями). Этот набор может отражать мнения нескольких экспертов или быть получен при обработке мнений экспертов различными методами. Предлагается метод согласования кластеризованных ранжировок, позволяющий «загнать» противоречия внутрь специальным образом построенных кластеров (групп), в то время как упорядочение кластеров соответствует всем исходным упорядочениям.

В различных прикладных областях возникает необходимость анализа нескольких кластеризованных ранжировок объектов. К таким областям относятся прежде всего менеджмент (особенно производственный менеджмент), экономика, экология, социология, прогнозирование, технические исследования, и т.д., особенно те их разделы, что связаны с экспертными оценками. В качестве объектов могут выступать образцы продукции, технологии, математические модели, проекты, кандидаты на должность и др. Кластеризованные ранжировки могут быть получены как с помощью экспертов, так и объективным путем, например, при сопоставлении математических моделей с экспериментальными данными с помощью того или иного критерия качества.

В настоящем пункте рассматривается метод построения кластеризованной ранжировки, согласованной (в раскрытом ниже смысле) со всеми рассматриваемыми кластеризованными ранжировками. При этом противоречия между отдельными исходными ранжировками оказываются заключенными внутри кластеров согласованной ранжировки. В результате упорядоченность кластеров отражает общее мнение экспертов, точнее, то общее, что содержится в исходных ранжировках.

В кластеры заключены объекты, по поводу которых некоторые из исходных ранжировок противоречат друг другу. Для их упорядочения необходимо провести новые исследования. Эти исследования могут быть как формально-математическими (например, вычисление медианы Кемени (см. ниже), упорядочения по средним рангам или по медианам и т.п.), так и требовать привлечения новой информации из соответствующей прикладной области, возможно, проведения дополнительных научных или прикладных работ.

Введем необходимые понятия, затем сформулируем алгоритм согласования кластеризованных ранжировок в общем виде и рассмотрим его свойства. Пусть имеется конечное число объектов, которые мы для простоты изложения будем изображать натуральными числами 1, 2, 3 ..., k и называть «носителем».

Под кластеризованной ранжировкой, определенной на заданном носителе, понимаем следующую математическую конструкцию. Пусть объекты разбиты на группы, которые будем называть кластерами. В кластере может быть и один элемент. Входящие в один кластер объекты будем заключать в фигурные скобки. Например, объекты 1, 2, 3, ..., 10 могут быть разбиты на 7 кластеров: {1}, {2, 3}, {4}, {5, 6, 7}, {8}, {9}, {10}. В этом разбиении один кластер {5, 6, 7} содержит три элемента, другой — {2, 3} — два, остальные пять — по одному элементу. Кластеры не имеют общих элементов, а объединение их (как множеств) есть все рассматриваемое множество объектов.

Вторая составляющая кластеризованной ранжировки — это строгий линейный порядок между кластерами. Задано, какой из них первый, какой второй, и т.д. Будем изображать упорядоченность с помощью знака <. При этом кластеры, состоящие из одного элемента, будем для простоты изображать без фигурных скобок. Тогда кластеризованную ранжировку на основе введенных выше кластеров можно изобразить так:

$$A = [1 < \{2, 3\} < 4 < \{5, 6, 7\} < 8 < 9 < 10].$$

Конкретные кластеризованные ранжировки будем заключать в квадратные скобки. Если для простоты речи термин «кластер» применять только к кластеру не менее чем из 2-х элементов, то можно сказать, что в кластеризованную ранжировку A входят два кластера {2, 3} и {5, 6, 7} и 5 отдельных элементов.

Введенная описанным образом кластеризованная ранжировка является бинарным отношением на множестве {1, 2, 3, ..., 10}. Его структура такова. Задано отношение эквивалентности с 7-ю классами эквивалентности, а именно, {2, 3}, {5, 6, 7}, а остальные состоят из оставшихся 5 отдельных элементов. Затем введен строгий линейный порядок между классами эквивалентности.

Следующее важное понятие — противоречивость. Оно определяется для четверки — две кластеризованные ранжировки на одном и том же носителе и два различных объекта — элементы того же носителя. При этом два элемента из одного кластера будем связывать символом равенства =, как эквивалентные. Пусть A и B — две кластеризованные ранжировки. Пару объектов (a, b) назовем «противоречивой» относительно A и B, если эти два элемента по-разному упорядочены в A и B, т.е. $a < b$ в A и $a > b$ в B (первый вариант противоречивости) либо $a > b$ в A и $a < b$ в B (второй вариант противоречивости). Подчеркнем, что в соответствии с этим определением пара объектов (a, b), эквивалентная хотя бы в одной кластеризованной ранжировке, не может быть противоречивой: равенство $a = b$ не образует «противоречия» ни с $a < b$, ни с $a > b$.

В качестве примера рассмотрим две кластеризованные ранжировки:

$$B = [\{1, 2\} < \{ 3, 4, 5\} < 6 < 7 < 9 < \{8, 10\}],$$
$$C = [3 < \{1, 4\} < 2 < 6 < \{5, 7, 8\} < \{9, 10\}].$$

Совокупность противоречивых пар объектов для двух кластеризованных ранжировок A и B назовем «ядром противоречий» и обозначим $S(A, B)$. Для рассмотренных выше в качестве примеров трех кластеризованных ранжировок A, B и C, определенных на одном и том же носителе $\{1, 2, 3, ..., 10\}$, имеем

$$S(A, B) = [(8, 9)], S(A, C) = [(1, 3), (2, 4)],$$
$$S(B, C) = [(1, 3), (2, 3), (2, 4), (5, 6), (8, 9)].$$

Как при ручном, так и при программном нахождении ядра можно в поисках противоречивых пар просматривать пары (1, 2), (1, 3), (1, 4), ..., (1, k), затем (2, 3), (2, 4), ..., (2, k), потом (3, 4), ..., (3, k), и т.д., вплоть до (k-1, k).

Пользуясь понятиями дискретной математики, «ядро противоречий» можно изобразить графом с вершинами в точках носителя. При этом противоречивые пары задают ребра этого графа. Граф для $S(A, B)$ имеет только одно ребро (одна связная компонента более чем из одной точки), для $S(A, C)$ — 2 ребра (две связные компоненты более чем из одной точки), для $S(B, C)$ — 5 ребер (три связные компоненты более чем из одной точки, а именно, $\{1, 2 , 3, 4\}$, $\{5, 6\}$ и $\{8, 9\}$).

Предлагаемый алгоритм согласования некоторого числа кластеризованных ранжировок состоит из трех этапов. На первом выделяются противоречивые пары объектов во всех парах кластеризованных ранжировок. На втором формируются кластеры итоговой кластеризованной ранжировки (т.е. классы эквивалентности — связные компоненты графов, соответствующих объединению попарных ядер противоречий). На третьем этапе эти кластеры (классы эквивалентности) упорядочиваются. Для установления порядка между кластерами произвольно выбирается один объект из первого кластера и второй — из второго, порядок между кластерами устанавливается такой же, какой имеет быть между выбранными объектами в любой из рассматриваемых кластеризованных ранжировок. Корректность подобного упорядочивания, т.е. его независимость от выбора той или иной пары объектов, вытекает из соответствующих теорем, доказанных в статье [9]. Два объекта из разных кластеров согласующей кластеризованной ранжировки могут оказаться эквивалентными в одной из исходных кластеризованных ранжировок (т.е. находиться в одном кластере). В таком случае надо рассмотреть упорядоченность этих объектов в какой-либо другой из исходных кластеризованных ранжировок. Если же во всех исходных кластеризованных ранжировках два рассматриваемых объекта находились в одном кластере, то естественно считать (и это является уточнением к этапу 3 алгоритма), что они находятся в одном кластере и в согласующей кластеризованной ранжировке.

Результат согласования кластеризованных ранжировок A, B, C, ... обозначим $f(A, B, C, ...)$. Тогда

$$f(A, B) = [1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < \{8, 9\} < 10],$$
$$f(A, C) = [\{1, 3\} < \{2, 4\} < 6 < \{5, 7\} < 8 < 9 < 10],$$
$$f(B, C) = [\{1, 2, 3, 4\} < \{5, 6\} < 7 < \{8, 9\} < 10],$$
$$f(A, B, C) = f(B, C) = [\{1, 2, 3, 4\} < \{5, 6\} < 7 < \{8, 9\} < 10].$$

В случае $f(A, B)$ дополнительного изучения с целью упорядочения требуют только объекты 8 и 9. В случае $f(B, C)$ объекты 1, 2, 3, 4 объединились в один кластер, т.е. кластеризованные ранжировки оказались настолько противоречивыми, что процедура согласования не позволила провести достаточно полную декомпозицию задачи нахождения итогового мнения экспертов.

Замечание. В $f(A, C)$ объекты 5 и 7 объединены в кластер потому, что и в A, и в C они равноценны. Таким образом, кластер {5, 7} имеет другие свойства, чем остальные — в нем нет элементов, образующих противоречивые пары, наоборот, его элементы равноценны.

Рассмотрим некоторые свойства алгоритмов согласования.

1. Пусть $D = f(A, B, C, ...)$. Если $a < b$ в согласующей кластеризованной ранжировке D, то $a < b$ или $a = b$ в каждой из исходных ранжировок A, B, C, ...

2. Построение согласующих кластеризованных ранжировок может осуществляться поэтапно. В частности, $f(A, B, C) = f(f(A, B), f(A, C), f(B, C))$. Ясно, что ядро противоречий для набора кластеризованных ранжировок является объединением таких ядер для всех пар рассматриваемых ранжировок.

3. Построение согласующих кластеризованных ранжировок нацелено на выделение общего упорядочения в исходных кластеризованных ранжировках. Однако при этом некоторые общие свойства исходных кластеризованных ранжировок могут теряться. Так, при согласовании ранжировок B и C, рассмотренных выше, противоречия в упорядочении элементов 1 и 2 не было — в ранжировке B эти объекты входили в один кластер, т.е. $1 = 2$, в то время как $1 < 2$ в кластеризованной ранжировке C. Значит, при их отдельном рассмотрении можно принять упорядочение $1 < 2$. Однако в $f(B, C)$ они попали в один кластер, т.е. возможность их упорядочения исчезла. Это связано с поведением объекта 3, который «перескочил» в C на первое место и «увлек с собой в противоречие»

пару (1, 2), образовав противоречивые пары и с 1, и с 2. Другими словами, связная компонента графа, соответствующего ядру противоречий, сама по себе не всегда является полным графом. Недостающие ребра при этом соответствуют парам типа (1, 2), которые сами по себе не являются противоречивыми, но «увлекаются в противоречие» другими парами.

Бинарные отношения и дискретная оптимизация

Как известно, бинарное отношение A на конечном множестве $Q = \{q_1, q_2, ..., q_k\}$ — это подмножество так называемого декартова квадрата $Q^2 = \{(q_m, q_n), m, n = 1, 2, ..., k\}$. При этом пара (q_m, q_n) входит в A тогда и только тогда, когда между q_m и q_n имеется рассматриваемое отношение.

Каждую кластеризованную ранжировку, как и любое бинарное отношение, можно задать матрицей $\| x(a, b) \|$ из 0 и 1 порядка k x k. При этом $x(a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a < b$ либо $a = b$. В первом случае $x(b, a) = 0$, а во втором $x(b, a) = 1$. При этом хотя бы одно из чисел $x(a, b)$ и $x(b, a)$ равно 1. Из определения противоречивости пары (a, b) (см. выше) вытекает, что для нахождения всех таких пар достаточно поэлементно перемножить две матрицы $\| x(a, b) \|$ и $\| y(a, b) \|$, соответствующие двум кластеризованным ранжировкам, и отобрать те и только те пары, для которых $x(\mathrm{a}, b)\, y(a, b) = x(b, a)\, y(b, a) = 0$.

В экспертных методах принятия решений в производственном менеджменте используют, в частности, такие бинарные отношения, как ранжировки (упорядочения, или разбиения на группы, между которыми имеется строгий порядок), отношения эквивалентности, толерантности (отношения сходства). Как известно, каждое бинарное отношение А можно описать матрицей $\| a\,(i, j) \|$ из 0 и 1, причем $a\,(i, j) = 1$ тогда и только тогда, когда q_i и q_j находятся в отношении A, и $a\,(i, j) = 0$ в противном случае.

Определение. Расстоянием Кемени между бинарными отношениями A и B, описываемыми матрицами $\| a\,(i, j) \|$ и $\| b\,(i, j) \|$ соответственно, называется число

$$D\,(A, B) = \sum \left| a\,(i, j) - b\,(i, j) \right| ,$$

где суммирование производится по всем i, j от 1 до k.

Легко видеть, что расстояние Кемени — это число несовпадающих элементов в матрицах $\| a\,(i, j) \|$ и $\| b\,(i, j) \|$.

Расстояние Кемени основано на некоторой системе аксиом. Эта система аксиом и вывод из нее формулы для расстояния Кемени между упорядочениями содержится в книге [4], которая сыграла большую роль в развитии в нашей стране такого научного направления, как анализ нечисловой информации [5]. В дальнейшем под влиянием Кемени были предложены различные системы аксиом для получения расстояний в тех или иных нужных для социально-экономических исследований пространствах, например, в пространствах множеств [6].

С помощью расстояния Кемени находят итоговое мнение комиссии экспертов. Пусть $A_1, A_2, A_3, ..., A_p$ — ответы p экспертов, представленные в виде бинарных отношений. Для их усреднения используют так называемую **медиану Кемени**:

$$\text{Arg min} \sum D(A_i, A),$$

где Arg min — то или те значения A, при которых достигает минимума указанная сумма расстояний Кемени от ответов экспертов до текущей переменной A, по которой и проводится минимизация. Таким образом,

$$\sum D(A_i, A) = D(A_1, A) + D(A_2, A) + D(A_3, A) + ... + D(A_p, A).$$

Кроме медианы Кемени, иногда применяют **среднее по Кемени,** в котором вместо $D(A_i, A)$ используют $D^2(A_i, A)$.

Медиана Кемени — частный случай определения эмпирического среднего в пространствах нечисловой природы. Для нее справедлив закон больших чисел, т.е. эмпирическое среднее приближается при росте числа составляющих, т.е. p — числа слагаемых в сумме, к теоретическому среднему:

$$\text{Arg min} \sum D(A_i, A) \to \text{Arg min}\, MD(A_1, A).$$

Здесь M — символ математического ожидания. Предполагается, что ответы p экспертов $A_1, A_2, A_3, ..., A_p$ есть основания рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные элементы (т.е. как случайную выборку) в соответствующем пространстве произвольной природы, например, в пространстве упорядочений или отношений эквивалентности. Систематически эмпирические и теоретические средние и соответствующие законы больших чисел изучены в работе [7].

Вычисление медианы Кемени — задача целочисленного программирования. В частности, для ее нахождения используются различные алгоритмы, основанные на методе ветвей и границ (см. ниже). Применяют также алгоритмы, основанные на идее случайного поиска, поскольку для каждого бинарного отношения нетрудно найти множество его соседей.

8. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Кратко рассмотрим два типа методов решения задач целочисленного программирования.

Методы приближения непрерывными задачами

В соответствии с ними сначала решается задача линейного программирования без учета целочисленности, а затем тем или иным способом выделяется окрестность оптимального решения и в ней ищутся целочисленные точки.

Методы направленного перебора

Из них наиболее известен метод ветвей и границ. Суть метода такова. Каждому подмножеству X множества возможных решений X_0 ставится в соответствие число — «граница» $A(X)$. При решении задачи минимизации необходимо, чтобы $A(X_1) \subseteq A(X_2)$, если X_1 входит в X_2 или совпадает с X_2.

Каждый шаг метода ветвей и границ состоит в делении выбранного на предыдущем шаге множества X_C на два — X_{1C} и X_{2C}. При этом пересечение X_{1C} и X_{2C} пусто, а их объединение совпадает с X_C. Затем вычисляют границы $A(X_{1C})$ и $A(X_{2C})$ и выделяют «ветвь» X_{C+1} — то из множеств X_{1C} и X_{2C}, для которого граница меньше. Алгоритм прекращает работу, когда диаметр вновь выделенной ветви оказывается меньше заранее заданного малого числа.

Для каждой конкретной задачи целочисленного программирования (другими словами, дискретной оптимизации) метод ветвей и границ реализуется посвоему. Есть много модификаций этого метода.

9. ТЕОРИЯ ГРАФОВ И ОПТИМИЗАЦИЯ

Один из разделов дискретной математики, часто используемый при принятии решений — *теория графов* (см., например, учебное пособие [8]). Граф — это совокупность точек, называемых вершинами графа, некоторые из которых соединены дугами. Примеры графов приведены на рис. 5.

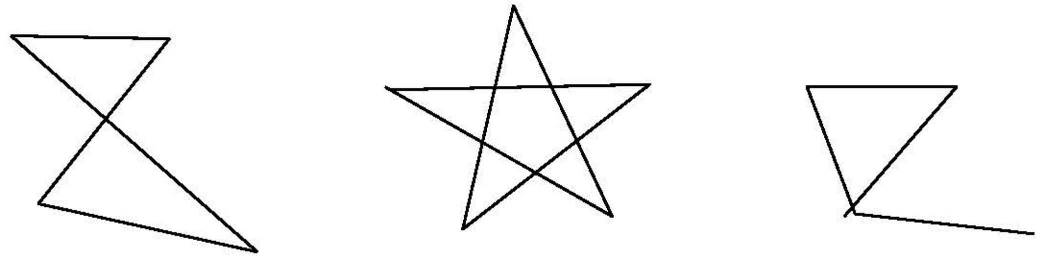


Рис. 5. Примеры графов

На только что введенное понятие графа «навешиваются» новые свойства. Исходному объекту приписывают новые качества. Например, вводится и используется понятие ориентированного графа. В таком графе дуги имеют стрелки, направленные от одной вершины к другой. Примеры ориентированных графов даны на рис. 6.

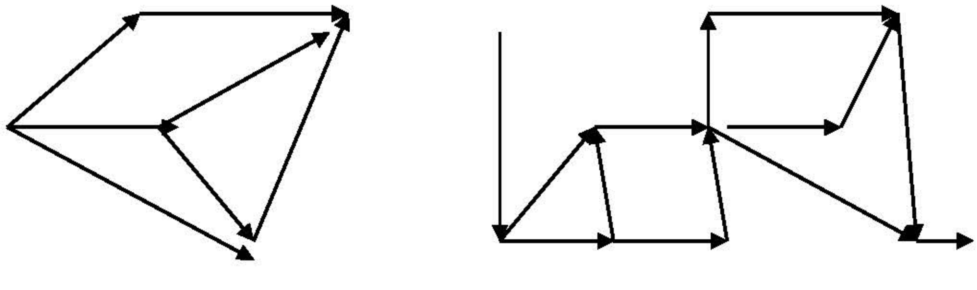


Рис. 6. Примеры ориентированных графов

Ориентированный граф был бы полезен, например, для иллюстрации организации перевозок в транспортной задаче. В экономике дугам ориентированного или обычного графа часто приписывают числа, например, стоимость проезда или перевозки груза из пункта А (начальная вершина дуги) в пункт Б (конечная вершина дуги).

Рассмотрим несколько типичных задач принятия решений, связанных с оптимизацией на графах. Одна из таких задач уже разобрана нами при рассмотрении метода согласования кластеризованных ранжировок.

Задача коммивояжера

Требуется посетить все вершины графа и вернуться в исходную вершину, минимизировав затраты на проезд (или минимизировав время).

Исходные данные здесь — это граф, дугам которого приписаны положительные числа — затраты на проезд или время, необходимое для продвижения из одной вершины в другую. В общем случае граф является ориентированным, и каждые две вершины соединяют две дуги — туда и обратно. Действительно, если пункт А расположен на горе, а пункт Б — в низине, то время на проезд из А в Б, очевидно, меньше времени на обратный проезд из Б в А.

Многие постановки экономического содержания сводятся к задаче коммивояжера. Например:

- составить наиболее выгодный маршрут обхода наладчика в цехе (контролера, охранника, милиционера), отвечающего за должное функционирование заданного множества объектов (каждый из этих объектов моделируется вершиной графа);

- составить наиболее выгодный маршрут доставки деталей рабочим или хлеба с хлебозавода по заданному числу булочных и других торговых точек (парковка у хлебозавода).

Задача о кратчайшем пути

Как кратчайшим путем попасть из одной вершины графа в другую? В терминах производственного менеджмента: как кратчайшим путем (и, следовательно, с наименьшим расходом топлива и времени, наиболее дешево) попасть из пункта А в пункт Б? Для решения этой задачи каждой дуге ориентированного графа должно быть сопоставлено число — время движения по этой дуге от начальной вершины до конечной. Рассмотрим пример (рис. 7).

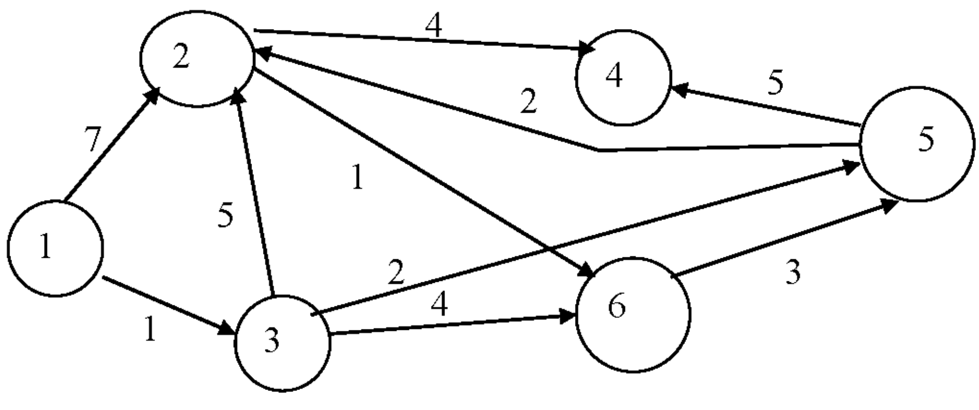


Рис. 7. Исходные данные к задаче о кратчайшем пути

Ситуацию можно описать не только ориентированным графом с весами, приписанными дугам, но и таблицей (табл. 8).

Таблица 8

Исходные данные к задаче о кратчайшем пути

Начало дуги	Конец дуги	Время в пути
1	2	7
1	3	1
2	4	4
2	6	1
3	2	5
3	5	2
3	6	3
5	2	2
5	4	5
6	5	3

Спрашивается в задаче: как кратчайшим путем попасть из вершины 1 в вершину 4?

Решение. Введем обозначение: $C(T)$ — длина кратчайшего пути из вершины 1 в вершину T. Поскольку любой путь, который надо рассмотреть, состоит из дуг, а дуг конечное число, и каждая входит не более одного раза, то претендентов на кратчайший путь конечное число, и минимум из конечного числа элементов всегда достигается. Рассматриваемая задача состоит в вычислении $C(4)$ и указании пути, на котором этот минимум достигается.

Для исходных данных, представленных на рис. 7 и в табл. 6, в вершину 3 входит только одна стрелка, как раз из вершины 1, и около этой стрелки стоит ее длина, равная 1, поэтому $C(3) = 1$. Кроме того, очевидно, что $C(1) = 0$.

В вершину 4 можно попасть либо из вершины 2, пройдя путь, равный 4, либо из вершины 5, пройдя путь, равный 5. Поэтому справедливо соотношение

$$C(4) = \min \{C(2) + 4; C(5) + 5\}.$$

Таким образом, проведена реструктуризация задачи — нахождение $C(4)$ сведено к нахождению $C(2)$ и $C(5)$.

В вершину 5 можно попасть либо из вершины 3, пройдя путь, равный 2, либо из вершины 6, пройдя путь, равный 3. Поэтому справедливо соотношение

$$C(5) = \min \{C(3) + 2; C(6) + 3\}.$$

Мы знаем, что $C(3) = 1$. Поэтому

$$C(5) = \min \{3; C(6) + 3\}.$$

Поскольку очевидно, что $C(6)$ — положительное число, то из последнего соотношения вытекает, что $C(5) = 3$.

В вершину 2 можно попасть либо из вершины 1, пройдя путь, равный 7, либо из вершины 3, пройдя путь, равный 5, либо из вершины 5, пройдя путь, равный 2. Поэтому справедливо соотношение

$$C(2) = \min \{C(1) + 7; C(3) + 5; C(5) + 2\}.$$

Нам известно, что $C(1) = 0$, $C(3) = 1$, $C(5) = 3$. Поэтому

$$C(2) = \min \{0 + 7; 1 + 5; 3 + 2\} = 5.$$

Теперь мы можем найти C (4):

$$C(4) = \min \{C(2) + 4; C(5) + 5\} = \min \{5 + 4; 3 + 5\} = 8.$$

Таким образом, длина кратчайшего пути равна 8. Из последнего соотношения ясно, что в вершину 4 надо идти через вершину 5. Возвращаясь к вычислению $C(5)$, видим, что в вершину 5 надо идти через вершину 3. А в вершину 3 можно попасть только из вершины 1. Итак, кратчайший путь таков:

$$1 \to 3 \to 5 \to 4.$$

Задача о кратчайшем пути для конкретных исходных данных (рис. 7 и табл. 6) полностью решена.

Оптимизационные задачи на графах, возникающие при подготовке управленческих решений в производственном менеджменте, весьма многообразны. Рассмотрим в качестве примера еще одну задачу, связанную с перевозками.

Задача о максимальном потоке

Как (т.е. по каким маршрутам) послать максимально возможное количество грузов из начального пункта в конечный пункт, если пропускная способность путей между пунктами ограничена?

Для решения этой задачи каждой дуге ориентированного графа, соответствующего транспортной системе, должно быть сопоставлено число — пропускная способность этой дуги. Рассмотрим пример (рис. 8).

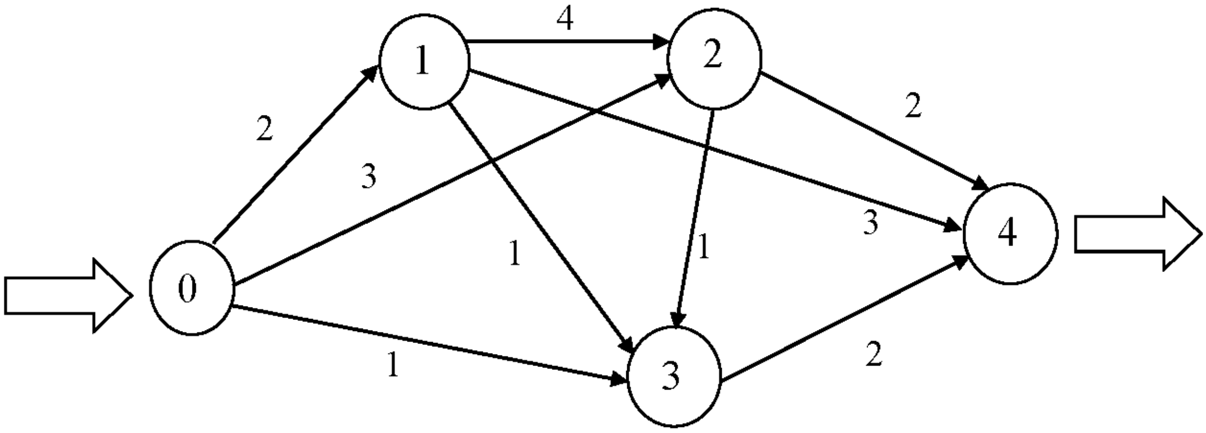


Рис. 8. Исходные данные к задаче о максимальном потоке

Исходные данные о транспортной системе, например, внутризаводской, приведенные на рис. 8, можно также задать таблицей (табл. 9).

Таблица 9

Исходные данные к задаче о максимальном потоке

Пункт отправления	**Пункт назначения**	**Пропускная способность**
0	1	2
0	2	3
0	3	1
1	2	4
1	3	1
1	4	3
2	3	1
2	4	2
3	4	2

Решение задачи о максимальном потоке может быть получено из следующих соображений.

Очевидно, максимальная пропускная способность транспортной системы не превышает 6, поскольку не более 6 единиц грузов можно направить из начального пункта 0, а именно, 2 единицы в пункт 1, 3 единицы в пункт 2 и 1 единицу в пункт 3.

Далее надо добиться, чтобы все 6 вышедших из пункта 0 единиц груза достигли конечного пункта 4. Очевидно, 2 единицы груза, пришедшие в пункт 1, можно непосредственно направить в пункт 4. Пришедшие в пункт 2 грузы придется разделить: 2 единицы сразу направить в пункт 4, а 1 единицу — в промежуточный пункт 3 (из-за ограниченной пропускной способности участка между пунктами 2 и 4). В пункт 3 доставлены такие грузы: 1 единица из пункта 0 и 1 единица из пункта 3. Их направляем в пункт 4.

Итак, максимальная пропускная способность рассматриваемой транспортной системы — 6 единиц груза. При этом не используются внутренние участки (ветки) между пунктами 1 и 2, а также между пунктами 1 и 3. Не догружена ветка между пунктами 1 и 4 — по ней направлены 2 единицы груза при пропускной способности в 3 единицы.

Решение можно представить в виде таблицы (табл. 10).

Таблица 10

Решение задачи о максимальном потоке

Пункт отправления	Пункт назначения	План перевозок	Пропускная способность
0	1	2	2
0	2	3	3
0	3	1	1
1	2	0	4
1	3	0	1
1	4	2	3
2	3	1	1
2	4	2	2
3	4	2	2

Задача линейного программирования при максимизации потока

Дадим формулировку задачи о максимальном потоке в терминах линейного программирования. Пусть X_{KM} — объем перевозок из пункта K в пункт M. Согласно рис. 8, $K = 0, 1, 2, 3$, $M = 1, 2, 3, 4$, причем перевозки возможны лишь в пункт с большим номером. Значит, всего имеется 9 переменных X_{KM}, а именно: X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}, X_{34}. Задача линейного программирования, нацеленная на максимизацию потока, имеет вид:

$$F \to \max,$$

$$X_{01} + X_{02} + X_{03} = F \qquad (0)$$

$$-X_{01} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 0 \qquad (1)$$

$$-X_{02} - X_{12} + X_{23} + X_{24} = 0 \quad (2)$$
$$-X_{03} - X_{13} - X_{23} + X_{34} = 0 \quad (3)$$
$$-X_{14} - X_{24} - X_{34} = -F \quad (4)$$
$$X_{01} \le 2$$
$$X_{02} \le 3$$
$$X_{03} \le 1$$
$$X_{12} \le 4$$
$$X_{13} \le 1$$
$$X_{14} \le 3$$
$$X_{23} \le 1$$
$$X_{24} \le 2$$
$$X_{34} \le 2$$
$$X_{KM} \ge 0, K, M = 0, 1, 2, 3, 4$$
$$F \ge 0.$$

Здесь F — целевая функция, условие (0) описывает вхождение грузов в транспортную систему. Условия (1)–(3) задают балансовые соотношения для узлов 1–3 системы. Другими словами, для каждого из внутренних узлов входящий поток грузов равен выходящему потоку, грузы не скапливаются внутри и системы и не «рождаются» в ней. Условие (4) — это условие «выхода» грузов из системы. Вместе с условием (0) оно составляет балансовое соотношение для системы в целом («вход» равен «выходу»). Следующие девять неравенств задают ограничения на пропускную способность отдельных «веток» транспортной системы. Затем указана неотрицательность объемов перевозок и целевой функции. Ясно, что последнее неравенство вытекает из вида целевой функции (соотношения (0) или (4)) и неотрицательности объемов перевозок. Однако последнее неравенство несет некоторую общую информацию — через систему может быть пропущен либо положительный объем грузов, либо нулевой (например, если внутри системы происходит движение по кругу), но не отрицательный (он не имеет экономического смысла, но формальная математическая модель об этом «не знает»).

О многообразии оптимизационных задач

В различных проблемах принятия решений возникают самые разнообразные задачи оптимизации. Для их решения применяются те или иные методы, точные или приближенные. Задачи оптимизации часто используются в теоретико-экономических исследованиях. Достаточно вспомнить оптимизацию экономического роста страны с помощью матрицы межотраслевого баланса Василия Леонтьева или микроэкономические задачи определения оптимального объема выпуска по функции издержек при фиксированной цене (или в условиях монополии) или минимизации издержек при заданном объеме выпуска путем выбора оптимального соотношения факторов производства (с учетом платы за них).

Кроме затронутых выше методов решения задач оптимизации, напомним о том, что гладкие функции оптимизируют, приравнивая 0 производную (для функций нескольких переменных — частные производные). При наличии ограничений используют множители Лагранжа. Эти методы обычно излагаются в курсах высшей математики и потому опущены здесь.

10. ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ»

1. Какой образец мотоцикла запустить в серию? Исходные данные для принятия решения приведены в табл. 11. Разберите четыре критерия принятия решения: пессимистичный, оптимистичный, средней прибыли, минимальной упущенной выгоды.

Таблица 11

Прибыль фирмы при различном выборе образца мотоцикла для запуска в серию (млн. руб.)

Цена бензина	Мотоцикл «Витязь»	Мотоцикл «Комар»
Низкая (20 %)	900	700
Средняя (60 %)	700	600
Высокая (20 %)	100	400

2. Изобразите на плоскости ограничения задачи линейного программирования и решите (графически) эту задачу:

$$
\begin{aligned}
&400\,W_1 + 450\,W_2 \to \min,\\
&5\,W_1 + 10\,W_2 \geq 45,\\
&20\,W_1 + 15\,W_2 \geq 80,\\
&W_1 \geq 0,\\
&W_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

3. Решите задачу линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&W_1 + 5\,W_2 \to \max,\\
&0{,}1\,W_1 + W_2 \leq 3{,}8,\\
&0{,}25\,W_1 + 0{,}25\,W_2 \leq 4{,}2,\\
&W_1 \geq 0,\\
&W_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

4. Решите задачу целочисленного программирования:

$$
\begin{aligned}
&10\,X + 5\,У \to \max.\\
&8\,X + 3\,У \leq 40,\\
&3\,X + 10\,У \leq 30,\\
&X \geq 0,\ У \geq 0,\ X \text{ и } У \text{ — целые числа.}
\end{aligned}
$$

5. Решите задачу о ранце:

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + 2X_4 + X_5 + X_6 \to \max,$$
$$0{,}5X_1 + X_2 + 1{,}5X_3 + 2X_4 + 2{,}5X_5 + 3X_6 \le 3.$$

Управляющие параметры X_k, $k = 1, 2, ..., 6$, принимают значения из множества, содержащего два элемента — 0 и 1.

6. В табл. 12 приведены упорядочения 7 инвестиционных проектов, представленные 7 экспертами.

Таблица 12

Упорядочения проектов экспертами

Эксперты	Упорядочения
1	1 < {2, 3} < 4 < 5 < {6, 7}
2	{1, 3} < 4 < 2 < 5 < 7 < 6
3	1 < 4 < 2 < 3 < 6 < 5 < 7
4	1 < {2, 4} < 3 < 5 < 7 < 6
5	2 < 3 < 4 < 5 < 1 < 6 < 7
6	1 < 3 < 2 < 5 < 6 < 7 < 4
7	1 < 5 < 3 < 4 < 2 < 6 < 7

Найдите:

а) итоговое упорядочение по средним арифметическим рангам;

б) итоговое упорядочение по медианам рангов;

в) кластеризованную ранжировку, их согласующую.

7. Выпишите матрицу из 0 и 1, соответствующую бинарному отношению (кластеризованной ранжировке):

$$5 < \{1, 3\} < 4 < 2 < \{6, 7\}.$$

8. Найдите расстояние Кемени между бинарными отношениями — упорядочениями $A = [3 < 2 < 1 < \{4, 5\}]$ и $B = [1 < \{2, 3\} < 4 < 5]$.

9. Дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний для множества бинарных отношений из 9 элементов $A_1, A_2, A_3, ..., A_9$ (табл. 13). Найдите в этом множестве медиану для множества из 5 элементов $\{A_2, A_4, A_5, A_8, A_9\}$.

Таблица 13

Попарные расстояния между бинарными отношениями

0	2	13	1	7	4	10	3	11
2	0	5	6	1	3	2	5	1
13	5	0	2	2	7	6	5	7
1	6	2	0	5	4	3	8	8
7	1	2	5	0	10	1	3	7
4	3	7	4	10	0	2	1	5
10	2	6	3	1	2	0	6	3
3	5	5	8	3	1	6	0	9
11	1	7	8	7	5	3	9	0

10. Решите задачу коммивояжера для четырех городов (маршрут должен быть замкнутым и не содержать повторных посещений). Затраты на проезд из города отправления в город назначения приведены в табл. 14 (в условных денежных единицах).

Таблица 14

Исходные данные к задаче коммивояжера

Город отправления	Город назначения	Затраты на проезд
А	Б	2
А	В	1
А	Д	5
Б	А	3
Б	В	2
Б	Д	1
В	А	4
В	Б	1
В	Д	2
Д	А	5
Д	Б	3
Д	В	3

11. Транспортная сеть (с указанием расстояний) приведена на рис. 9. Найдите кратчайший путь из пункта 1 в пункт 4.

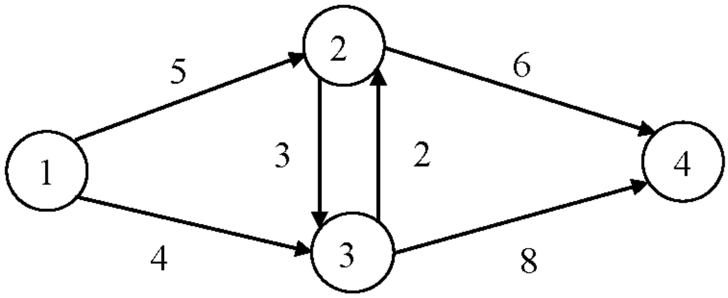


Рис. 9. Исходные данные к задаче о кратчайшем пути

12. Как послать максимальное количество грузов из начального пункта 1 в конечный пункт 8, если пропускная способность путей между пунктами транспортной сети (рис. 10) ограничена (табл. 15)?

Таблица 15

Исходные данные к задаче о максимальном потоке

Пункт отправления	**Пункт назначения**	**Пропускная способность**
1	2	1
1	3	2
1	4	3
2	5	2
3	2	2
3	4	2
3	6	1
4	7	4
5	8	3
6	5	2
6	7	1
6	8	1
7	8	3

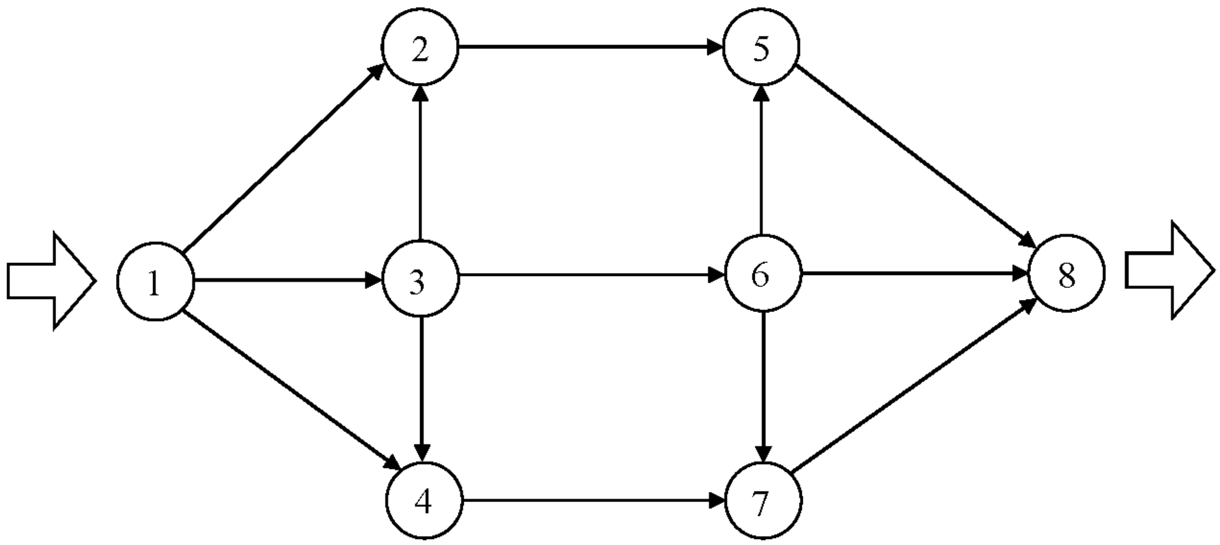


Рис. 10. Транспортная сеть к задаче о максимальном потоке

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время теория принятия решений — весьма развитая научная, прикладная и учебная дисциплина. В наших учебниках [18, 19] представлена широкая панорама методов теории принятия решений — инструментов современного управленца (менеджера в исходном смысле этого слова), экономиста, инженера. На основе обширного арсенала методов теории принятия решений могут быть составлены различные учебные курсы. В настоящей книге подробно изложено содержание одного из таких курсов. Автор в течение нескольких лет вел занятия по курсу «Основы теории принятия решений». Его изучали студенты ряда вузов, в том числе обучающие по программам дополнительного (второго) образования, слушатели бизнес-школ.

Представленный в настоящей книге курс отличается нацеленностью на задачи оптимизации, в то время как не рассматриваются разделы теории принятия решений, опирающиеся на использование вероятностно-статистических моделей, теории нечеткости, интервальную математику и др. С различными разделами теории принятия решений можно познакомиться в других наших учебниках (см., например, [18, 19]).

В настоящее время обсуждается возможность преподавания основ теории принятия решений в средней школе. Для этого можно использовать ряд разделов настоящей книги.

Теория принятий решений становится все более актуальной в эпоху взрывного развития цифровой экономики [20]. Технологии принятия управленческих решений необходимы для реализации инноваций в менеджменте [21, 22]. Так, на основе научных результатов теории принятия решений разработаны методы определения приоритетности реализации научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ на предприятиях ракетно-космической отрасли [23]. Теория принятия решений — важная составляющая научного обеспечения искусственного интеллекта [24, 25]. Развитие теории принятия решений и экспертных оценок проанализировано в статье [26].

ЛИТЕРАТУРА

1. Менеджмент : учебное пособие / Под редакцией Ж.В. Прокофьевой. — Москва : Знание, 2000. — 288 с.

2. *Гасс, С.* Путешествие в страну линейного программирования / С. Гасс ; перевод с английского. — Москва : Мир, 1973. — 176 с.

3. *Кофман, А.* Займемся исследованием операций / А. Кофман, Р. Фор ; перевод с французского. — Москва : Мир, 1966. — 280 с.

4. *Кемени, Дж.* Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения / Дж. Кемени, Дж. Снелл. — Москва : Советское радио, 1972. — 192 с.

5. Анализ нечисловой информации / Ю.Н. Тюрин, Б.Г. Литвак, А.И. Орлов [и др.]. — Москва : Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981. — 80 с.

6. *Орлов, А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях / А.И. Орлов. — Москва : Наука, 1979. — 296 с. — (Серия «Проблемы советской экономики»).

7. *Жихарев, В.Н.* Законы больших чисел и состоятельность статистических оценок в пространствах произвольной природы / В.Н. Жихарев, А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. — Пермь : Изд-во Пермского государственного университета, 1998. — С. 65–84.

8. *Белов, В.В.* Теория графов / В.В. Белов, Е.М. Воробьев, В.Е. Шаталов. — Москва : Высшая школа, 1976. — 392 с.

9. *Горский, В.Г.* Метод согласования кластеризованных ранжировок / В.Г. Горький, А.А. Гриценко, А.И. Орлов // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 3. — С. 159–167.

10. *Орлов, А.И.* Экспертные оценки / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. — 1996. — Т. 62. — № 1. — С. 54–60.

11. *Орлов, А.И.* Современная прикладная статистика / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 1998. — Т. 64. — № 3. — С. 52–60.

12. *Науман,* Э. Принять решение, но как? / Э. Науман. — Москва : Мир, 1987. — 198 с.

13. Контроллинг в бизнесе. Методологические и практические основы построения контроллинга в организациях / А.М. Карминский, Н.И. Оленев, А.Г. Примак, С.Г. Фалько. — Москва : Финансы и статистика, 1998. — 256 с.

14. *Бурков, В.Н.* Как управлять проектами / В.Н. Бурков, Д.А. Новиков. — Москва : СИНТЕГ-ГЕО, 1997. — 188 с.

15. *Литвак, Б.Г.* Управленческие решения : учебник / Б.Г. Литвак. — Москва : ЭКМОС, 1998. — 247 с.

16. *Шмален, Г.* Основы и проблемы экономики предприятия / Г. Шмален. — Москва : Финансы и статистика, 1996. — 512 с.

17. *Хан, Д.* Планирование и контроль: концепция контроллинга / Д. Хан ; перевод с немецкого. — Москва : Финансы и статистика, 1997. — 800 с.

18. *Орлов, А.И.* Теория принятия решений : учебник для вузов / А.И. Орлов. — Москва : Экзамен, 2006. — 576 с.

19. *Орлов, А.И.* Методы принятия управленческих решений : учебник. — Москва : КНОРУС, 2018. — 286 с.

20. *Лойко, В.И.* Современная цифровая экономика / В.И. Лойко, Е.В. Луценко, А.И. Орлов. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2018. — 508 с.

21. *Орлов, А.И.* Цифровая экономика, инновации в менеджменте и идеи Аристотеля / А.И. Орлов // Инновации в менеджменте. — 2019. — № 20. — С. 74–79.

22. *Орлов, А.И.* Инновации в менеджменте, экология, хрематистика и цифровизация / А.И. Орлов, Ю.Б. Сажин // Инновации в менеджменте. — 2019. — № 4 (22). — С. 52–60.

23. *Орлов, А.И.* Определение приоритетности реализации НИОКР на предприятиях ракетно-космической отрасли / А.И. Орлов, А.Д. Цисарский // Контроллинг. — 2020. — № 2 (76). — С. 58–65.

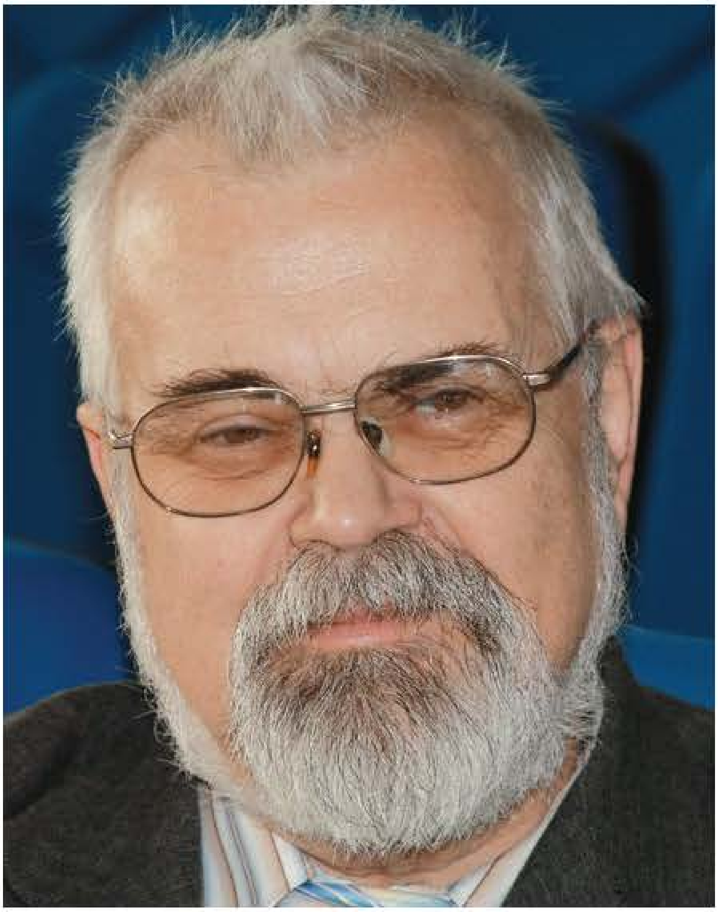
24. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование и искусственный интеллект в цифровой экономике (на примере управления качеством) / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2021. — № 169. — С. 216–242.

25. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование и искусственный интеллект в организации производства в эпоху цифровой экономики / А.И. Орлов // Инновации в менеджменте. — 2021. — № 2 (28). — С. 36–45.

26. *Орлов, А.И.* О развитии теории принятия решений и экспертных оценок / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2021. — № 167. — С. 177–198.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Об авторе этой книги



Орлов Александр Иванович (1949 г.р.) — профессор (1995 г. — кафедра математической экономики), доктор экономических наук (2009 г. — кафедра математических и инструментальных методов экономики), доктор технических наук (1992 г. — кафедра применения математических методов), кандидат физико-математических наук (1976 г. — кафедра теории вероятностей и математической статистики).

Профессор кафедр «Экономика и организация производства» (факультет «Инженерный бизнес и менеджмент») и «Вычислительная математика и математическая физика» (факультет «Фундаментальные науки») Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, руководитель секции «Организационно-экономическое моделирование, эконометрика и статистика», директор Института высоких статистических технологий и эконометрики, заведующий Лабораторией экономико-математических методов в контроллинге.

Член редколлегий журналов «Заводская лаборатория. Диагностика материалов», «Контроллинг», «Инновации в менеджменте», «Социология: методология, методы, математическое моделирование», «Управление большими системами: сборник трудов». Главный редактор электронного еженедельника «Эконометрика».

Академик Международной академии исследований будущего, Российской Академии статистических методов. Вице-президент Всесоюзной Статистической Ассоциации, президент Российской ассоциации статистических методов.

Основные направления научной и педагогической деятельности: теория принятия решений, прикладная статистика и другие статистические методы, эконометрика, экономико-математические методы, экспертные оценки, менеджмент, экономика предприятия, макроэкономика, экология.

Автор более 1 100 научных и методических публикаций в России и за рубежом, в том числе более 50 книг. Один из наиболее цитируемых математиков и экономистов России.

Более подробная информация приведена на сайте «Википедия», в статье «Орлов, Александр Иванович (ученый)».

Основные публикации профессора А.И. Орлова

1. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях / А.И. Орлов. — Москва : Наука,1979. — 296 с.

2. *Орлов, А.И.* Задачи оптимизации и нечеткие переменные / А.И. Орлов. — Москва : Знание, 1980. — 64 с.

3. Анализ нечисловой информации (препринт) / А.И. Орлов, Ю.Н. Тюрин, Б.Г. Литвак [и др.]. — Москва : Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981. — 80 с.

4. *Гусев, В.А.* Внеклассная работа по математике в 6–8 классах / В.А. Гусев, А.И. Орлов, А.Л. Розенталь. — Москва : Просвещение, 1977. — 288 с.

5. *Гусев, В.А.* Внеклассная работа по математике в 6–8 классах / В.А. Гусев, А.И. Орлов, А.Л. Розенталь. — 2-е изд., перераб. — Москва : Просвещение, 1984. — 286 с.

6. *Орлов, А.И.* Пакет программ анализа данных «ППАНД» : учебное пособие / А.И. Орлов, И.Л. Легостаевая, О.М. Черномордик. — Москва : Сотрудничающий центр Всемирной организации здравоохранения по профессиональной гигиене, 1990. — 93 с.

7. *Орлов, А.И.* Математическое моделирование процессов налогообложения (подходы к проблеме) / А.И. Орлов, В.Г. Кольцов, Н.Ю. Иванова. — Москва : Изд-во ЦЭО Министерства общего и профессионального образования РФ, 1997. — 232 с.

8. *Орлов, А.И.* Экология : учебное пособие / А.И. Орлов, С.А. Боголюбов. — Москва : Знание, 1999. — 288 с.

9. *Орлов, А.И.* Менеджмент : учебное пособие / А.И. Орлов, С.А. Боголюбов, Ж.В. Прокофьева. — Москва : Знание, 2000. — 288 с.

10. *Орлов, А.И.* Управление качеством окружающей среды : учебник / А.И. Орлов, С.А. Боголюбов. — Т. 1. — Москва : Изд-во МГИЭМ(ту), 2000. — 283 с.

11. *Орлов, А.И.* Системы экологического управления : учебник / А.И. Орлов, С.А. Боголюбов. — Москва : Европейский центр по качеству, 2002. — 224 с.

12. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Экзамен, 2002. — 576 с.

13. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебник / А.И. Орлов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Экзамен, 2003. — 575 с.

14. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебник / А.И. Орлов. — 3-е изд. — Москва : Экзамен, 2004. — 573 с.

15. Управление промышленной и экологической безопасностью : учебное пособие / А.И. Орлов, В.Н. Федосеев, В.Г. Ларионов, А.Ф. Козьяков. — Москва : Изд-во УРАО, 2002. — 220 с.

16. Управление промышленной и экологической безопасностью : учебное пособие / А.И. Орлов, В.Н. Федосеев, В.Г. Ларионов, А.Ф. Козьяков. — 2-е изд. — Москва : Изд-во УРАО, 2003. — 220 с.

17. *Орлов, А.И.* Менеджмент в техносфере : учебное пособие / А.И. Орлов, В.Н. Федосеев. — Москва : Академия, 2003. — 384 с.

18. *Орлов, А.И.* Теория и методы разработки управленческих решений : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : МарТ ; Ростов-на-Дону : МарТ, 2005. — 496 с.

19. *Орлов, А.И.* Прикладная статистика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Экзамен, 2006. — 672 с.

20. *Орлов, А.И.* Теория принятия решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Экзамен, 2006. — 576 с.

21. Проектирование интегрированных производственно-корпоративных структур: эффективность, организация, управление / А.И. Орлов, С.Н. Анисимов, А.А. Колобов [и др.] ; под редакцией А.А. Колобова, А.И. Орлова. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 728 с.

22. *Колобов, А.А.* Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость / А.А. Колобов, И.Н. Омельченко, А.И. Орлов. — Москва : Экзамен, 2008. — 621 с.

23. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование : учебник : в 3 ч. Ч. 1. Нечисловая статистика / А.И. Орлов. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 542 с.

24. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебник для вузов / А.И. Орлов. — 4-е изд., доп. и перераб. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2009. — 572 с.

25. *Орлов, А.И.* Менеджмент: организационно-экономическое моделирование : учебное пособие для вузов / А.И. Орлов. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2009. — 475 с.

26. *Орлов, А.И.* Вероятность и прикладная статистика: основные факты : справочник / А.И. Орлов. — Москва : КноРус, 2010. — 192 с.

27. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : КноРус, 2011. — 568 с.

28. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование : учебник : в 3 ч. Ч. 2. Экспертные оценки / А.И. Орлов. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 486 с.

29. *Орлов, А.И.* Устойчивые экономико-математические методы и модели. Разработка и развитие устойчивых экономико-математических методов и моделей для модернизации управления предприятиями / А.И. Орлов. — Саарбрюккен : Lambert Academic Publishing, 2011. — 436 с.

30. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование : учебник : в 3 ч. Ч. 3. Статистические методы анализа данных / А.И. Орлов. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. — 624 с.

31. *Орлов, А.И.* Проблемы управления экологической безопасностью. Итоги двадцати лет научных исследований и преподавания / А.И. Орлов. — Саарбрюккен: Palmarium Academic Publishing, 2012. — 344 с.

32. *Орлов, А.И.* Системная нечеткая интервальная математика : монография / А.И. Орлов, Е.В. Луценко. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2014. — 600 с.

33. *Орлов, А.И.* Перспективные математические и инструментальные методы контроллинга : монография / А.И. Орлов, Е.В. Луценко, В.И. Лойко ; под научной редакцией профессора С.Г. Фалько. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2015. — 600 с.

34. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое, математическое и программное обеспечение контроллинга, инноваций и менеджмента : монография / А.И. Орлов, Е.В. Луценко, В.И. Лойко ; под общей редакцией С.Г. Фалько. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2016. — 600 с.

35. *Лойко, В.И.* Современные подходы в наукометрии : монография / В.И. Лойко, Е.В. Луценко, А.И. Орлов ; под научной редакцией профессора С.Г. Фалько. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2017. — 532 с.

36. *Орлов, А.И.* Методы принятия управленческих решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : КНОРУС, 2018. — 286 с.

37. *Лойко, В.И.* Современная цифровая экономика / В.И. Лойко, Е.В. Луценко, А.И. Орлов. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2018. — 508 с.

38. *Лойко, В.И.* Высокие статистические технологии и системно-когнитивное моделирование в экологии : монография / В.И. Лойко, Е.В. Луценко, А.И. Орлов. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2019. — 258 с.

39. *Агаларов, З.С.* Эконометрика : учебник / З.С. Агаларов, А.И. Орлов. — Москва : Дашков и К°, 2021. — 380 с.