А.И. Орлов

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебник

Москва
Ай Пи Ар Медиа
2024

УДК 519.862.6
ББК 65в631
О-66

Автор:
Орлов А.И. — д-р экон. наук, д-р техн. наук, канд. физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры экономики и организации производства (ИБМ-2) Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана

Рецензенты:
Фалько С.Г. — д-р экон. наук, канд. техн. наук, проф., зав. кафедрой экономики и организации производства (ИБМ-2) Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана;
Луценко Е.В. — д-р экон. наук, канд. техн. наук, проф., проф. кафедры компьютерных технологий и систем Кубанского государственного аграрного университета им. И.Т. Трубилина

Орлов, Александр Иванович.
О-66 Эконометрика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2024. — 525 с. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-4497-2540-0

На современном уровне представлена эконометрика — наука, изучающая конкретные количественные и качественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей. В учебник включены основные эконометрические методы: выборочные исследования, проверка однородности двух независимых выборок, метод наименьших квадратов, анализ динамики цен, экспертные технологии, теория измерений и средние величины, статистика нечисловых данных, теория нечетких множеств.

Включенный в учебник материал дает представление об эконометрике, соответствующее общепринятому в мире. Изложение доведено до современного уровня научных исследований в этой области. Большое внимание уделено практическому применению методов и результатов эконометрики.

Подготовлен в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, предъявляемыми к изучению дисциплины «Эконометрика».

Предназначен для студентов, обучающихся по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки высшего образования «Экономика и управление». Также будет полезен преподавателям вузов, слушателям бизнес-школ, программ MBA, курсов повышения квалификации, менеджерам, экономистам, инженерам, научным и практическим работникам, связанным с анализом экономических и управленческих данных.

Учебное электронное издание

ISBN 978-5-4497-2540-0

Учебное издание

Орлов Александр Иванович

Редактор *Ю.Ю. Желтова*
Технический редактор, компьютерная верстка *Е.В. Савенкова*
Корректор *О.А. Адясова*
Обложка *Я.А. Кирсанов, С.С. Сизиумова*, фотобанк «Лори»

Подписано к использованию 24.11.2023. Объем данных 9,5 Мб.

ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа»
8 800 555 22 35 (бесплатный звонок по России)
E-mail: sale@iprmedia.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эконометрика — наука, изучающая конкретные количественные и качественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей.

Во вводных монографиях по экономической теории, как правило, выделяют в качестве ее разделов макроэкономику, микроэкономику и эконометрику. Статистические методы анализа экономических данных называют эконометрикой, что буквально означает «наука об экономических измерениях». Действительно, термин «эконометрика» состоит из двух частей: «эконо-» — от «экономика» и «-метрика» — от «измерение». О месте эконометрики среди экономических наук ярко говорит то, что многим эконометрикам присуждены Нобелевские премии по экономике.

Эконометрика — эффективный инструмент научного анализа и моделирования в профессиональной деятельности экономиста, менеджера и инженера. Настоящий учебник дает этот инструмент в руки будущим специалистам.

Содержание учебника. В учебник включены основные эконометрические методы. *Глава 1* посвящена организации выборочных исследований и методам анализа собранных данных. Построены модели случайных выборок, разобраны процедуры доверительного оценивания доли и проверки однородности двух биномиальных выборок. Проанализированы прикладные выборочные исследования, в том числе оценивание функции спроса и маркетинговые опросы потребителей.

Система моделей проверки однородности двух независимых выборок — предмет *главы 2*. Рассмотрены методы проверки согласия и однородности для признаков с конечным числом градаций. Для проверки равенства математических ожиданий обосновано применение непараметрического критерия Крамера — Уэлча (вместо критерия Стьюдента). Установлены границы применимости двухвыборочного критерия Вилкоксона. Из состоятельных критериев проверки однородности независимых выборок разобраны критерии Смирнова и Лемана — Розенблатта (типа омега-квадрат). Сопоставлены реальные и номинальные уровни значимости в задачах проверки статистических гипотез.

Непараметрический метод наименьших квадратов в *главе 3* позволяет восстановить линейную зависимость между двумя переменными. Рассмотрены коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена и основы линейного регрессионного анализа. Пример применения — прогнозирование в отрасли лома черных металлов. Обсуждаются и более глубокие проблемы: выбор вида регрессионной модели, непараметрическое оценивание точки пересечения регрессионных прямых, модель с периодической составляющей.

Эконометрическому анализу инфляции посвящена *глава 4*. Рассмотрены практически используемые потребительские корзины и соответствующие индексы инфляции, в том числе корзина Института высоких статистических технологий и эконометрики, и результаты расчетов индексов инфляции по независимо собранной информации. Проанализированы свойства индексов инфляции и возможности их использования в экономических расчетах. Обсуждается динамика цен на продовольственные товары в нашей стране.

Экспертные технологии стали неотъемлемой частью научного инструментария экономиста и менеджера. Им посвящена *глава 5*. Разобран ряд примеров процедур экспертных оценок, типовая организация работы экспертной комиссии, основания для классификации экспертных методов. Для обработки экспертных ранжировок предназначены методы средних арифметических рангов и медиан рангов, а также согласования кластеризованных ранжировок. Рассмотрена роль интуиции эксперта и информационных технологий.

Основные шкалы измерения (наименований, порядковая, интервалов, отношений, разностей, абсолютная) введены в *главе 6*. Поиск инвариантных алгоритмов анализа данных продемонстрирован на примере средних величин. Введены средние по Коши и средние по Колмогорову. Указаны все допустимые средние в порядковой шкале (среди средних по Коши), в шкалах интервалов и отношений (среди средних по Колмогорову).

Центральной области современной статистической науки — статистике нечисловых данных — посвящена *глава 7*. Среди видов статистических данных выделены объекты нечисловой природы, проанализированы связи между различными классами таких объектов и вероятностные модели порождения нечисловых данных. Рассмотрены расстояния в пространствах произвольной природы, их вывод из систем аксиом. Введены эмпирические и теоретические средние в пространствах произвольной природы и обоснованы законы больших чисел для них (сходимость эмпирических средних к соответствующим теоретическим при росте объемов выборок). В конце главы 7 введены и изучены непараметрические оценки плотности в пространствах нечисловых данных.

Сводка используемых в учебнике теоретических инструментов эконометрики дана в *приложении 1*. Приведены формулировки законов больших чисел, центральных предельных теорем и теорем о наследовании сходимости. Рассмотрены метод линеаризации и принцип инвариантности.

Нечеткие множества — важный частный случай нечисловых данных. Однако основы теории нечетких множеств пока не являются общеизвестными.

Для удобства читателей базовые факты этой теории приведены в *приложении 2*. Рассмотрены примеры практического применения нечетких множеств. Рассказано о сведении нечетких множеств к случайным, принципиально важном с методологической точки зрения. Дано представление о статистике нечетких множеств.

Методическому обеспечению учебной дисциплины «Эконометрика» посвящено *приложение 3*. Приведено типовое содержание лекций, практических занятий (семинаров), контрольных работ, домашних заданий.

Приложение 4 — это методическая разработка для студентов и преподавателей по выполнению домашнего задания «Функция спроса и метод наименьших квадратов» и проведению соответствующих практических занятий (семинаров).

В приложении 5 приведена краткая информация об авторе учебника.

В конце каждой главы и приложений 1 и 2 представлены списки литературных источников, контрольные вопросы и задачи, а также темы докладов, рефератов, исследовательских работ. Нумерация таблиц, рисунков, формул, теорем дана по главам и приложениям.

Знания, умения, навыки. В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

1) знать:

– основные статистические методы анализа эмпирических экономических данных;

– основные понятия, методы и процедуры теории принятия решений и моделирования;

– базовые идеи, модели, методы и результаты выборочных исследований, теории измерений, статистического анализа числовых, векторных и нечисловых данных, временных рядов, экспертных оценок;

– базовые идеи, подходы, методы и результаты теории принятия решений и организационно-экономического моделирования, в частности моделирования технологий обеспечения качества;

– методы статистики интервальных данных;

– методы принятия решений в условиях неопределенности и риска, в том числе в эколого-экономических задачах;

2) уметь:

– применять статистические модели, методы описания данных, оценивания, проверки гипотез;

– строить организационно-экономические модели для конкретных задач управления организацией и разрабатывать на основе таких моделей адекватные управленческие решения;

– проводить эконометрический анализ результатов выборочных исследований при оценивании характеристик и параметров распределений и зависимостей, проверке однородности выборок, нахождении группового мнения комиссии экспертов;

– проводить анализ управленческой ситуации, строить соответствующую ей организационно-экономическую модель, изучать ее свойства и характеристики, находить на ее основе оптимальное решение;

3) владеть:

– основными понятиями, относящимися к разработке, изучению и использованию статистических и организационно-экономических моделей, разработке управленческих решений, выборочным исследованиям, экспертным оценкам;

– методиками расчетов в следующих областях: описание данных, оценивание, проверка гипотез, оптимизация параметров эконометрических моделей, анализ и синтез планов статистического контроля, анализ экспертных оценок;

– необходимыми для решения эконометрических задач информационными технологиями,

– навыками проведения сбора и анализа конкретных технико-экономических данных на основе современных статистических методов;

– навыками проведения сбора и анализа конкретных технико-экономических данных на основе современных методов моделирования и принятия решений;

– навыками разработки и применения статистических и экспертных технологий.

Методические комментарии. Теоретическую базу эконометрики составляют математические дисциплины: общий курс (математический анализ, линейная алгебра), теория вероятностей и математическая статистика, дискретная математика, исследование операций. Полезно знание основ экономической теории и статистики (общей теории статистики, экономической статистики). Чтобы полностью овладеть материалом, представленным в учебнике, желательно знать базовые понятия и результаты указанных выше типовых учебных курсов.

Целью изучения учебной дисциплины «Эконометрика» является овладение современными эконометрическими методами анализа конкретных экономических и управленческих данных на уровне, достаточном для использования в практической деятельности менеджера, экономиста, инженера. В учебник включены как классические научные результаты, так и недавно полученные. В качестве примеров применения эконометрических методов описан ряд конкретных прикладных работ, выполненных под руководством автора. Можно утверждать, что учебник позволяет выйти на современный уровень теоретических и прикладных эконометрических исследований.

Учебник адресован в первую очередь студентам дневных отделений экономических и управленческих специальностей. Они найдут весь необходимый материал для изучения различных вариантов эконометрических курсов. Особенно хочется порекомендовать учебник тем, кто получает наиболее ценимое в настоящее время образование — на экономических факультетах в технических вузах. Слушатели вечерних отделений, в том числе получающие второе образование по экономике и менеджменту, смогут изучить основы эконометрики и познакомиться с основными вопросами ее практического использования.

Менеджерам, экономистам и инженерам, изучающим эконометрику самостоятельно или в бизнес-школах и институтах повышения квалификации, в том числе по программам MBA («Мастер делового администрирования»), учебник позволит познакомиться с ее ключевыми идеями и выйти на мировой уровень образования.

Специалистам по теории вероятностей и математической статистике эта книга также может быть интересна и полезна, в ней описан современный взгляд на статистические методы и их применение в экономике, основные подходы и результаты в этой области (касающиеся, в частности, непараметрических постановок и статистики нечисловых данных), открывающие большой простор для дальнейших математических исследований. Преподаватели эконометрики найдут в учебнике как теоретические результаты, так и примеры их практического использования в объеме, достаточном для разработки собственных программ обучения. Материалы учебника можно использовать также при чтении и изучении курсов «Организационно-экономическое моделирование», «Математические методы прогнозирования», «Теория принятия решений» и др.

В отличие от учебной литературы по математическим дисциплинам, в настоящей книге практически отсутствуют доказательства. В нескольких случаях мы сочли целесообразным их привести. При первом чтении доказательства теорем можно пропустить.

О роли литературных ссылок в учебнике необходимо сказать достаточно подробно. Прежде всего эта книга представляет собой замкнутый текст, не требующий для своего понимания ничего, кроме знания стандартных учебных курсов высшей математики. Зачем же нужны ссылки? Доказательства всех приведенных в учебнике теорем приведены в ранее опубликованных статьях и монографиях. Дотошный читатель, в частности при подготовке рефератов и при желании глубже проникнуть в материал учебника, может обратиться к приведенным в каждой главе спискам цитированной литературы. Каждая глава учебника — это введение в большую область эконометрики. Приведенные литературные ссылки помогут читателям выйти на передний край теоретических и прикладных работ, познакомиться с доказательствами теорем, включенных в учебник. За многие десятилетия накопились большие книжные богатства, и их надо активно использовать.

Мы исходим из принципа МГТУ им. Н.Э. Баумана «Образование — через науку», в соответствии с которым преподавание должно быть основано на современных результатах научных исследований, а обучающийся должен иметь возможность познакомиться с такими результатами.

Включенные в учебник материалы прошли многолетнюю и всестороннюю проверку. Кроме МГТУ им. Н.Э. Баумана, они использовались при преподавании во многих других отечественных и зарубежных образовательных структурах, в частности в Московском физико-техническом институте, Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, в Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова, Рижском институте мировой экономики. Наряду с дневным образованием, преподавание велось в структурах второго образования, повышения квалификации, бизнес-школах (программы MBA).

Первое издание учебника «Эконометрика» было выпущено издательством «Экзамен» в 2002 г., второе, переработанное и дополненное, — в 2003 г., третье — в 2004 г., четвертое, дополненное и переработанное, — в 2009 г.

В 2006 г. издательство «Экзамен» выпустило наши учебники «Прикладная статистика» и «Теория принятия решений». В эти книги (а также в ряд иных, перечисленных в разделе «Об авторе») была включена часть материала из первых трех изданий учебника «Эконометрика».

После выхода четвертого издания получены многочисленные научные результаты по тематике учебника. Поэтому мы сочли необходимым существенно переработать его для пятого издания. В частности, литературные ссылки доведены до 2023 г.

В четвертое и пятое издания «Эконометрики» включены разделы, соответствующие семестровому учебному курсу. Такой курс читается в МГТУ им. Н.Э. Баумана на факультете «Инженерный бизнес и менеджмент» под названием «Эконометрика — 1». В следующий за ним курс «Эконометрика — 2» входят разделы, посвященные эконометрическим методам управления качеством, теории и методам классификации, статистике интервальных данных, временным рядам, эконометрике прогнозирования и риска и др. Соответствующий материал содержится в первых трех изданиях учебника, но исключен из четвертого и пятого, поскольку перенесен в другие наши учебники.

Включенные в пятое издание разделы существенно доработаны. Укажем наиболее существенные изменения. Расширена глава 2: добавлены разделы, посвященные состоятельным критериям проверки однородности независимых выборок и взаимосвязи реальных и номинальных уровней значимости в задачах проверки статистических гипотез. На основе недавних разработок существенно дополнена глава 3, в том числе рассмотрены модель с периодической составляющей и методы непараметрического оценивания точки пересечения регрессионных прямых, а также примеры практического использования метода наименьших квадратов. Заново написана глава 4, посвященная эконометрическим методам анализа динамики цен, в частности в нее включены данные по инфляции в 2004–2023 гг. При этом в главе 4 мы специально разбираем примеры и проводим обсуждения для достаточно давно прошедших дат, поскольку хотим избежать дискуссий о современном положении дел, проще говоря, чтобы отделить научные положения от текущих политических вопросов. В главе 7 «Статистика нечисловых данных» рассмотрены расстояния в пространствах произвольной природы и подходы к их аксиоматическому введению. Заметной доработке подверглись и другие разделы учебника.

Благодарности. Автор выражает признательность заведующему кафедрой «Экономика и организация производства» факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, профессору, доктору экономических наук С.Г. Фалько за постоянную поддержку проекта по разработке и внедрению эконометрических курсов. Хотелось бы сказать спасибо всему коллективу кафедры и факультета в целом, прежде всего декану факультета, профессору, доктору экономических и технических наук И.Н. Омельченко, своим соавторам по ряду работ.

Автор относится к отечественной вероятностно-статистической научной школе, созданной академиком АН СССР А.Н. Колмогоровым, и искренне благодарен своим учителям: ушедшим от нас академику АН УССР Б.Г. Гнеденко, члену-корреспонденту АН СССР Л.Н. Большеву, профессору В.В. Налимову. Учебник подготовлен в рамках отечественной научной школы в области эконометрики[1].

[1] Орлов А.И. Отечественная научная школа в области эконометрики // Научный журнал КубГАУ. 2016. №121. С. 235–261; Орлов А.И. Отечественная научная школа в области организационно-экономического моделирования, эконометрики и статистики // Контроллинг. 2019. №73. С. 28-35.

Настоящий учебник разработан в соответствии с рекомендациями созданной в 1990 г. Всесоюзной статистической ассоциации и ее наследников — Российской ассоциации статистических методов и Российской академии статистических методов, а также разработками Всесоюзного центра статистических методов и информатики Центрального правления Всесоюзного экономического общества, действовавшего в 1989–1992 гг. под руководством автора настоящего учебника.

По ряду причин исторического характера основное место публикаций научных работ по статистическим методам анализа технических и технико-экономических данных в нашей стране — раздел «Математические методы исследования» журнала «Заводская лаборатория. Диагностика материалов». Многие статьи этого раздела пригодились при подготовке учебника. Автор искренне благодарен руководству и сотрудникам журнала, коллегам по секции редколлегии «Математические методы исследования».

Спасибо коллегам и ученикам, работы которых были использованы при подготовке учебника (В.С. Муравьевой, Е.М. Крюковой, М.С. Жукову, Л.А. Орловой и др.). Автор пользуется возможностью выразить признательность за совместную работу своим более чем 200 соавторам по различным публикациям, прежде всего сотрудникам Института высоких статистических технологий и эконометрики и Научно-исследовательской лаборатории «Экономико-математические методы в контроллинге» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Автор благодарен рецензентам: доктору экономических наук, кандидату технических наук, профессору, заведующему кафедрой экономики и организации производства Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана С.Г. Фалько и профессору, доктору экономических наук, кандидату технических наук, профессору кафедры компьютерных технологий и систем Кубанского государственного аграрного университета им. И.Т. Трубилина Е.В. Луценко.

Спасибо сотрудникам издательства «Ар Пи Ар Медиа» за большую работу по подготовке рукописи учебника к изданию.

С базовыми публикациями (более 20 книг и 200 статей) и текущей научной информацией по эконометрике можно познакомиться на нашем сайте «Высокие статистические технологии» (http://orlovs.pp.ru) и его форуме (http://forum.orlovs.pp.ru/), а также на странице Научно-исследовательской лаборатории «Экономико-математические методы в контроллинге» МГТУ им. Н.Э. Баумана (http://www.ibm.bmstu.ru/nil/lab.html) (она размещена на сайте научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана). Достаточно большой объем информации содержит еженедельник «Эконометрика» (электронная газета кафедры «Экономика и организация производства» научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана) (http://subscribe.ru/catalog/science.humanity.econometrika), выпускаемый с июля 2000 г. Автор искренне благодарен разработчику сайтов и редактору электронного еженедельника А.А. Орлову за многолетний энтузиазм.

Условия для написания книги создала моя любимая жена Л.А. Орлова. Спасибо!

Включенный в учебник материал дает представление об эконометрике, соответствующее общепринятому в мире. Изложение доведено до современного уровня научных исследований в этой области. Конечно, возможны различные точки зрения по тем или иным частным вопросам. Автор будет благодарен читателям, если они направят свои вопросы и замечания по адресу издательства или непосредственно автору по электронной почте: prof-orlov@mail.ru (или поместят их на форуме (http://forum.orlovs.pp.ru/) сайта «Высокие статистические технологии»).

ГЛАВА 1. ВЫБОРОЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Термин «выборочные исследования» применяют, когда невозможно изучить все единицы представляющей интерес совокупности. Приходится знакомиться с частью совокупности — с выборкой, а затем с помощью вероятностно-статистических методов и моделей переносить выводы с выборки на всю совокупность. Выборочные исследования — важный раздел эконометрики и прикладной статистики [1–3].

1.1. ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫБОРОЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В качестве примера рассмотрим выборочные исследования предпочтений потребителей, которые часто проводят специалисты по маркетингу (изучению рынка).

Оценивание функции спроса. Функция спроса часто встречается в учебниках по экономической теории, но при этом обычно не рассказывается, как она получена. Между тем оценить ее по эмпирическим данным не так уж трудно. Например, можно выяснять ожидаемый спрос с помощью следующего простого приема: спрашиваем потенциальных потребителей «Какую максимальную цену вы заплатили бы за такой-то товар?». Пусть для определенности выборка состояла из 20 опрошенных. Они назвали следующие максимально допустимые для них цены:

40, 25, 30, 50, 35, 20, 50, 32, 15, 40,
20, 40, 45, 30, 50, 25, 35, 20, 35, 40.

Сначала названные опрошенными величины упорядочим в порядке возрастания. Результаты представлены в табл. 1.1. В первом столбце — номера различных численных значений цены (в порядке возрастания), названных потребителями. Во втором столбце приведены сами значения цены, названные ими. В третьем столбце указано, сколько раз названо то или иное значение.

Таким образом, 20 потребителей назвали 9 конкретных значений цены (максимально допустимых или приемлемых для них значений), каждое из значений, как видно из третьего столбца, названо от 1 до 4 раз. Теперь легко построить выборочную функцию спроса в зависимости от цены. Она будет представлена в четвертом столбце, который заполним снизу вверх. Спрос как функция от цены p обозначен $D(p)$ (от *demand* (англ.) — спрос).

Таблица 1.1

Эмпирическая оценка функции спроса и ее использование

№ п/п (i)	**Цена p_i**	**Повторы N_i**	**Спрос $D(p_i)$**	**Прибыль $(p_i - 10)D(p_i)$**	**Прибыль $(p_i - 15)D(p_i)$**	**Прибыль $(p_i - 25)D(p_i)$**
1	15	1	20	100	0	–
2	20	3	19	190	95	–
3	25	2	16	240	160	0
4	30	2	14	280	210	70
5	32	1	12	264	204	84
6	35	3	11	275	220	110
7	40	4	8	240	200	120
8	45	1	4	140	120	80
9	50	3	3	120	105	75

Если мы будем предлагать товар по цене свыше 50 руб., то его не купит никто из опрошенных. При цене 50 руб. появляются 3 покупателя. Записываем 3 в четвертый столбец в девятую строку. А если цену понизить до 45? Тогда товар купят четверо: тот единственный, для кого максимально возможная цена — 45, и те трое, кто был согласен на более высокую цену — 50 руб. Таким образом, легко заполнить столбец 4, действуя по правилу: значение в клетке четвертого столбца равно сумме значений в находящейся слева клетке третьего столбца и в лежащей снизу клетке четвертого столбца. Например, за 30 руб. купят товар 14 человек, а за 20 руб. — 19.

Зависимость спроса от цены — это зависимость четвертого столбца от второго. Таблица 1.1 дает нам девять точек такой зависимости. Зависимость можно представить на рисунке, в координатах «спрос — цена». Если абсцисса — это спрос, а ордината — цена, то девять точек на кривой спроса, перечисленные в порядке возрастания абсциссы, имеют вид:

$$(3; 50), (4; 45), (8; 40), (11; 35), (12; 32),$$
$$(14; 30), (16; 25), (19; 20), (20; 15).$$

Эти девять точек можно использовать для построения кривой спроса каким-либо графическим (сделайте чертеж!) или расчетным способом, например методом наименьших квадратов (см. гл. 3). Кривая спроса, как и следует ожидать согласно учебникам экономической теории, убывает, имея направление от левого верхнего угла чертежа к правому. Однако заметны отклонения от гладкого вида функции, связанные, в частности, с естественным пристрастием потребителей к круглым числам. Заметьте, все опрошенные, кроме одного, назвали числа, кратные 5 руб.

Расчет оптимальной цены. Данные табл. 1.1 могут быть использованы для выбора цены продавцом-монополистом или организацией, действующей на рынке монополистической конкуренции. Пусть расходы на изготовление или оптовую покупку единицы товара равны 10 руб. По какой цене ее продавать на том рынке, функцию спроса для которого мы только что нашли? Для ответа на этот вопрос вычислим суммарную прибыль, т. е. произведение прибыли на одной единице товара ($p - 10$) на число проданных (точнее, запрошенных) экземпляров $D(p)$. Результаты приведены в пятом столбце табл. 1.1. Видно, что максимальная прибыль, равная 280 руб., достигается при цене 30 руб. за единицу товара. При этом из 20 потенциальных покупателей окажутся в состоянии заплатить за товар 14, т. е. 70 %.

Если же удельные издержки производства, приходящиеся на одну единицу товара (или оптовая цена), повысятся до 15 руб., то данные столбца 6 табл. 1.1 показывают, что максимальная прибыль, равная 220 руб. (она, разумеется, меньше, чем в предыдущем случае), достигается при более высокой цене — 35 руб. Эта цена доступна 11 потенциальным покупателям, т. е. 55 % от всех возможных покупателей. При дальнейшем повышении издержек, скажем, до 25 руб., как вытекает из данных столбца 7 табл. 1.1, максимальная прибыль, равная 120 руб., достигается при цене 40 руб. за единицу товара, что доступно 8 лицам, т. е. 40 % покупателей. Отметьте, что при повышении оптовой цены на 10 руб. оказалось выгодным увеличить розничную лишь на 5 руб., поскольку более резкое повышение привело бы к такому сокращению спроса, которое перекрыло бы эффект от повышения удельной прибыли (т. е. прибыли, приходящейся на одну проданную единицу товара).

Замечание. При более строгом подходе к использованию терминов следует вместо прибыли говорить о маржинальной прибыли, а вместо удельных издержек — о переменных издержках (на одну единицу продукции), поскольку постоянные издержки не учитываем. Кроме того, спрос целесообразно выражать не в числе потребителей, а в процентах от общего числа потенциальных потребителей. Мы не сочли необходимым придерживаться подобных уточнений, поскольку цель настоящей главы — в демонстрации возможности использования в маркетинговых исследованиях подходов, основанных на организационно-экономическом моделировании.

Представляет интерес анализ оптимального объема выпуска при различных значениях удельных издержек (табл. 1.2).

В табл. 1.2 звездочками указаны максимальные значения прибыли при том или ином значении издержек, не включенном в табл. 1.1. Для легкости обозрения результаты об оптимальных объемах выпуска и соответствующих ценах из табл. 1.1 и 1.2 приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.2

Прибыль при различных значениях издержек

№ п/п (i)	Цена p_i	Спрос $D(p_i)$	Прибыль $(p_i - 5)D(p_i)$	Прибыль $(p_i - 20)D(p_i)$	Прибыль $(p_i - 30)D(p_i)$	Прибыль $(p_i - 35)D(p_i)$	Прибыль $(p_i - 40)D(p_i)$
1	15	20	200	–	–	–	–
2	20	19	285	0	–	–	–
3	25	16	320	80	–	–	–
4	30	14	350*	140	0	–	–
5	32	12	324	144	24	–	–
6	35	11	330	165*	55	0	–
7	40	8	280	160	80*	40	0
8	45	4	160	100	60	40	20
9	50	3	135	90	60	45*	30*

Таблица 1.3

Зависимость оптимального выпуска и цены от издержек

Издержки	5	10	15	20	25	30	35	40
Оптимальный выпуск	14	14	11	11	8	8	3	3
Цена	30	30	35	35	40	40	50	50

Как видно из табл. 1.3, с ростом издержек оптимальный выпуск падает, а цена растет. При этом изменение издержек на 5 единиц может вызывать, а может и не вызывать повышения цены. В этом проявляется микроструктура функции спроса: небольшое повышение цены может привести к тому, что значительные группы покупателей откажутся от покупок, и прибыль упадет.

Этот эффект напоминает известное в экономической теории разделение налогового бремени между производителем и потребителем. Неверно говорить, что производитель перекладывает издержки или конкретно налоги на потребителя, повышая цену на их величину, поскольку при этом сокращается спрос (и выпуск), а потому и прибыль производителя.

Дальнейшее ясно: если оптовая цена будет повышаться, то и дающая максимальную прибыль розничная цена также будет повышаться, и все меньшая доля покупателей сможет приобрести товар. Крайняя точка — оптовая цена, равная 45 руб. Тогда только трое (15 %) купят товар за 50 руб., а прибыль продавца составит только 15 руб. Наглядно видно, что повышение издержек производства приводит к ориентации производителя на наиболее богатые слои населения. Но и повышение цен (до оптимального для монополиста-производителя уровня) не приводит к повышению прибыли, напротив, она снижается, и при этом большинство потенциальных потребителей не в состоянии купить товар.

Отметим, что рыночные структуры не в состоянии обеспечить всех желающих — это просто не выгодно. Так, при оптовой цене 10 руб. из 20 опрошенных лишь 14, т. е. 70 %, могут рассчитывать на покупку, даже при минимальных издержках и ценах. Если общество желает чем-либо обеспечить всех граждан, оно должно раздавать это благо бесплатно, как это делается, например, с учебниками в школах.

Описанный здесь метод оценивания спроса разработан в Институте высоких статистических технологий и эконометрики (Москва) [4].

Для изучения предпочтений потребителей часто используют более изощренные методы. Рассмотрим некоторые из них.

Маркетинговые опросы потребителей. Потенциального покупателя интересует не только цена, но и качество товара, красота упаковки (например, для подарочных наборов конфет) и многое другое. Хочешь узнать, чего желает потребитель, — спроси его. Эта простая мысль объясняет популярность маркетинговых опросов.

Бесспорно, что основная цель производственной и торговой деятельности — удовлетворение потребностей людей. Как получить представление об этих потребностях? Очевидно, необходимо опросить потребителей. В американском учебнике по рекламному делу [5] подробно рассматриваются различные методы опроса потребителей и обработки результатов с помощью методов эконометрики. Расскажем о результатах опроса потребителей растворимого кофе. Исследование проведено Институтом высоких статистических технологий и эконометрики по заказу АОЗТ «Д-2» в Москве.

Сбор данных. Один из важнейших разделов прикладной статистики — сбор данных. Обсудим постановку задачи в случае опроса потребителей растворимого кофе. Заказчика интересуют предпочтения как продавцов кофе (розничных и мелкооптовых), так и непосредственно потребителей. В результате совместного обсуждения было признано целесообразным использовать для опроса и тех, и других одну и ту же анкету из 14 основных и 4 социально-демографических вопросов с добавлением двух вопросов специально для продавцов. Анкета была разработана совместно представителями заказчика и исполнителя и утверждена заказчиком. Ниже приведен несколько сокращенный вариант этой анкеты.

Анкета для потребителей растворимого кофе (в сокращении)

Дорогой потребитель растворимого кофе,

Институт высоких статистических технологий и эконометрики просит вас ответить на несколько простых вопросов о том, какой кофе вы любите. Ваши ответы позволят составить объективное представление о вкусах российских любителей кофе и будут способствовать повышению качества этого товара на российском рынке.

1. Часто ли вы пьете растворимый кофе: иногда, каждый день 1 чашку, 2–3 чашки, больше, чем 3 чашки?

(Здесь и далее подчеркните нужное.)

2. Что вы цените в кофе: вкус, аромат, крепость, цвет, отсутствие вредных для здоровья веществ, что-либо еще (сообщите нам, что именно)? ______________

3. Как часто покупаете кофе: по мере надобности или по возможности?

4. Какую марку растворимого кофе вы обычно покупаете? ______________

5. Какой объем упаковки вы предпочитаете: в пакетиках, маленькая банка, средняя банка, большая банка, обязательно стеклянная банка, все равно?

6. Где вы покупаете растворимый кофе: в ларьках, в продуктовых магазинах, в специализированных отделах и магазинах, все равно, где купить, где-либо еще (опишите, пожалуйста)? ______________

7. Были ли случаи, когда купленный вами кофе оказывался низкого качества? Да, нет.

8. Согласны ли вы, что за высокое и гарантированное качество продукта можно и заплатить несколько дороже? Да, нет.

9. На сколько дороже вы готовы платить за экологически безопасный кофе? _________

10. Считаете ли вы нужным, чтобы вредные для здоровья вещества, в частности ионы тяжелых металлов, не проникали из материала упаковки в растворимый кофе? Да, нет.

Мы планируем сравнить потребительские предпочтения различных категорий жителей нашей страны. Поэтому просим ответить еще на несколько вопросов.

11. Пол: женский, мужской.

12. Возраст: до 20, 20–30, 30–50, более 50.

13. Род занятий: учащийся, работающий, пенсионер, инженер, врач, преподаватель, служащий, менеджер, предприниматель, научный работник, рабочий, др. (пожалуйста, расшифруйте).

14. Вся ваша семья любит растворимый кофе или же вы — единственный любитель этого восхитительного напитка современного человека? Вся семья, я один (одна).

Спасибо за ваше содействие работе по повышению качества продуктов на российском рынке!

Выбор метода опроса. Широко применяются процедуры опроса, когда респонденты (так социологи и маркетологи называют тех, от кого получают информацию, т. е. опрашиваемых) самостоятельно заполняют анкеты (розданные им или полученные по почте), а также личные и телефонные интервью. Из этих процедур нами было выбрано личное интервью по следующим причинам.

Возврат почтовых анкет сравнительно невелик (в данном случае можно было ожидать не более 5–10 %), оттянут по времени и искажает структуру совокупности потребителей (наиболее динамичные люди вряд ли найдут время для ответа на подобную анкету).

Самостоятельное заполнение анкеты, как показали специально проведенные эксперименты, не позволяет получить полные ответы на поставленные вопросы. Респондент утомляется или отвлекается, отказывается отвечать на часть вопросов, иногда не понимает их или отвечает не по существу. Некоторые категории респондентов, например продавцы в киосках, отказываются заполнять анкеты, но готовы устно ответить на вопросы.

Телефонный опрос искажает совокупность потребителей, поскольку наиболее активных индивидуумов трудно застать дома и уговорить ответить на вопросы анкеты. Репрезентативность нарушается также и потому, что на один номер телефона может приходиться различное количество продавцов и потребителей растворимого кофе, а некоторые из них не имеют телефонов вообще. Анкета достаточно длинна, и разговор по домашнему и тем более служебному телефону респондента может быть прекращен досрочно по его инициативе. Иногородних продавцов и потребителей растворимого кофе, приехавших в Москву, по телефону опросить практически невозможно.

Метод личного интервью лишен перечисленных недостатков. Соответствующим образом подготовленный интервьюер, получив согласие на интервью, удерживает внимание собеседника на анкете, добивается получения ответов на все ее вопросы, контролируя при этом соответствие ответов реальной позиции респондента. Ясно, что успех интервьюирования зависит от личных качеств и подготовки интервьюера. Однако расходы на получение одной анкеты при использовании этого метода больше, чем для других рассмотренных методов.

Формулировки вопросов. В маркетинговых и социологических опросах используют три типа вопросов: закрытые, открытые и полузакрытые, они же полуоткрытые. При ответе на закрытые вопросы респондент может выбирать лишь из сформулированных составителями анкеты вариантов ответа. В качестве ответа на открытые вопросы респондента просят изложить свое мнение в свободной форме. Полузакрытые, они же полуоткрытые, вопросы занимают промежуточное положение: кроме перечисленных в анкете вариантов, респондент может добавить свои соображения.

В социологических публикациях, посвященных выборочным исследованиям, продолжается дискуссия по поводу «мягких» и «жестких» форм сбора данных, т. е. фактически о том, какого типа вопросы более целесообразно использовать: открытые или закрытые (см., например, статью известного социолога В.А. Ядова [6]).

Преимущество открытых вопросов состоит в том, что респондент может свободно высказать свое мнение так, как сочтет нужным. Их недостаток — в сложности сопоставления мнений различных респондентов. Для такого сопоставления и получения сводных характеристик организаторы опроса вынуждены сами шифровать ответы на открытые вопросы, применяя разработанную ими схему шифровки.

Преимущество закрытых вопросов в том и состоит, что такую шифровку проводит сам респондент. Однако при этом организаторы опроса уподобляются древнегреческому мифическому персонажу Прокрусту. Как известно, Прокруст приглашал путников заночевать у него. Укладывал их на кровать. Если путник был маленького роста, он вытягивал его ноги так, чтобы они доставали до конца кровати. Если же путник оказывался высоким и ноги его торчали, он обрубал их так, чтобы достигнуть стандарта: «рост» путника должен равняться длине кровати. Так и организаторы опроса, применяя закрытые вопросы, заставляют респондента «вытягивать» или «обрубать» свое мнение, чтобы выразить его с помощью приведенных в формулировке вопроса возможных ответов.

Ясно, что для обработки данных по группам и сравнения групп между собой нужны формализованные данные, и фактически речь может идти лишь о том, кто — респондент или маркетолог (социолог, психолог и др.) — будет шифровать ответы. В проекте «Потребители растворимого кофе» практически для всех вопросов варианты ответов можно перечислить заранее, т. е. можно широко использовать закрытые вопросы. В отличие от опросов с вопросами типа «Одобряете ли вы идущие в России реформы?», в которых естественно просить респондента расшифровать, что он понимает под «реформами» (открытый вопрос). Поэтому в используемой в описываемом проекте анкете применялись в основном закрытые и полузакрытые вопросы. Как показали результаты обработки, этот подход оказался правильным: лишь в небольшом числе анкет оказались вписаны свои варианты ответов. Вместе с тем демонстрировалось уважение к мнению респондента, не выдвигалось требование обязательного выбора из заданного множества ответов: респондент мог добавить свое, но редко пользовался этой возможностью (не более чем в 5 % случаев).

В последнем вопросе анкеты респонденту предлагалось стать постоянным участником опросов о качестве товаров народного потребления. Ряд респондентов откликнулись на это предложение, в результате стало возможным развертывание постоянной сети «экспертов по качеству», подобной аналогичным в США и других странах.

1.2. МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ВЫБОРОК

Статистические методы выборочных исследований основаны на вероятностных моделях, описывающих получение ответов опрашиваемых на вопросы анкет. В случае ответов типа «да/нет» наиболее распространенными являются две вероятностные модели: биномиальная и гипергеометрическая.

В биномиальной модели предполагается, что ответы n опрашиваемых можно рассматривать как совокупность n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_i = 1$, если i-й респондент сказал «да», и $X_i = 0$, если его ответ «нет». Тогда число X ответов «да» в выборке равно:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n. \tag{1.1}$$

Из формулы (1.1) и центральной предельной теоремы теории вероятностей (см. прил. 1 к настоящему учебнику) вытекает, что при увеличении объема выборки n распределение X сближается с нормальным распределением. Известно, что распределение X имеет вид:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \tag{1.2}$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k, а p — доля ответов «да» в генеральной совокупности, т. е. $p = P(X_i = 1)$. Формула (1.2) задает биномиальное распределение, часто используемое при вероятностном моделировании реальных явлений и процессов.

Гипергеометрическое распределение соответствует иной схеме — случайному отбору респондентов в выборку. Пусть среди N лиц, составляющих генеральную совокупность, имеется D лиц, чье мнение «да». Случайность отбора респондентов в выборку означает, что каждое лицо имеет одинаковые шансы быть отобранным. Мало того, ни одна пара потенциальных респондентов не должна иметь при отборе в выборку преимущества перед любой другой парой. То же самое — для троек, четверок и т. д. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда каждое из C_N^n сочетаний по n лиц из N имеет одинаковые шансы быть отобранным в качестве выборки. Вероятность того, что будет отобрано заранее заданное сочетание, равна, очевидно, $1 / C_N^n$.

Пусть Y — число сказавших «да» лиц в случайной выборке, организованной таким образом. Известно, что тогда $P(Y = k)$ — гипергеометрическое распределение, т. е.

$$P(Y=k)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}. \qquad (1.3)$$

Отбор случайной выборки согласно описанным правилам организуют при проведении различных лотерей. Например, отбирают 6 номеров из 49. Тогда генеральная совокупность состоит из 49 единиц (номеров), а выборка — из 6. В этом случае отбирают номера, а не респондентов, но вероятностная модель та же. Удобно говорить, что генеральная совокупность и выборка состоят из единиц. В одном случае единицы — это люди (лица, потенциальные респонденты), в другом — номера. В статистических методах управления качеством рассматриваются единицы продукции: детали или изделия.

Замечательный математический факт состоит в том, что биномиальная модель (1.2) и гипергеометрическая модель (1.3) *весьма близки* (с практической точки зрения совпадают), когда объем генеральной совокупности (партии) по крайней мере в 10 раз превышает объем выборки. Другими словами, можно принять, что

$$P(X=k)=P(Y=k), \qquad (1.4)$$

если объем выборки мал по сравнению с объемом партии. При этом в качестве p в левой части формулы (1.4) берут D / N.

Близость результатов, получаемых с помощью биномиальной и гипергеометрической моделей, весьма важна не только с практической, но и с методологической точки зрения. Дело в том, что эти модели исходят из принципиально различных методологических предпосылок. В биномиальной модели случайность *присуща каждому респонденту*. Он с какой-то вероятностью отвечает «да», а с какой-то — «нет» (сумма этих вероятностей, очевидно, равна 1). В то же время в гипергеометрической модели ответ респондента полностью определен, а случайность проявляется лишь *в отборе*, вносится социологом или маркетологом при составлении выборки.

В науках о человеке противоречие между рассматриваемыми моделями выборки четко выражено. В среде специалистов, изучающих человека (маркетологов, социологов, психологов, политологов и др.), давно идет дискуссия о роли случайности в поведении человека. А именно о том, есть ли случайность в поведении отдельно взятого человека или же она проявляется лишь в отборе выборки из генеральной совокупности.

Биномиальная модель предполагает, что поведение человека, в частности выбор им определенного варианта при ответе на вопрос, определяется с участием случайных причин. Например, человек может случайно сказать «да», случайно — «нет». Некоторые философы отрицают случайность, присущую поведению человека согласно биномиальной модели. Они верят в причинность и считают поведение конкретного человека практически полностью детерминированным (его взглядами, психофизиологическими особенностями, прежним опытом и др.). Поэтому они принимают гипергеометрическую модель и считают, что случайность отличия ответов в выборке от ответов во всей генеральной совокупности определяется всецело случайностью, вносимой при отборе единиц наблюдения в выборку.

Сформулированные выше математические результаты (соотношение (1.4)) показывают, что позиция в этой давней дискуссии практически не влияет на алгоритмы обработки данных. Следовательно, во многих случаях нет необходимости принимать чью-либо сторону в этом споре, поскольку обе модели дают близкие численные результаты.

Отличия проявляются лишь при обсуждении вопроса о том, какую выборку считать *представительной*. В терминах контроля качества продукции: является ли таковой выборка, составленная из 20 изделий, лежащих сверху в первом вскрытом ящике? В биномиальной модели вполне допустим ответ «да», в гипергеометрической — только «нет».

Биномиальная модель легче для теоретического изучения, поэтому будем ее рассматривать в дальнейшем. Однако при реальном опросе лучше формировать выборку исходя из гипергеометрической модели. Это делают, выбирая респондентов из списка избирателей (для включения в выборку) с помощью датчиков псевдослучайных чисел на ЭВМ или с помощью таблиц псевдослучайных чисел. Алгоритмы формирования выборки встраивают во все современные программные продукты, предназначенные для поддержки проведения маркетинговых или социологических опросов, организации статистического контроля качества и др.

Обоснование объема выборки и проведение опроса. Вернемся к анализу результатов опроса потребителей растворимого кофе, о котором шла речь в предыдущем разделе. Как уже говорилось, модели выборочных исследований часто опираются на предположение о том, что реальную выборку можно описывать как случайную выборку из конечной совокупности. Типа той, когда из списков избирателей с помощью датчика случайных чисел отбирается необходимое число номеров для формирования жюри присяжных заседателей.

В рассматриваемом исследовании нельзя обеспечить формирование подобной выборки: не существует реестра потребителей растворимого кофе. Однако в этом и нет необходимости. Поскольку гипергеометрическое распределение хорошо приближается биномиальным, если объем выборки по крайней мере в 10 раз меньше объема всей совокупности (в рассматриваемом случае это так), то правомерно использование биномиальной модели, согласно которой мнение респондента (ответы на все вопросы анкеты) рассматривается как случайный вектор, а все такие векторы независимы между собой. Другими словами, можно использовать модель простой случайной выборки.

1.3. ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ДОЛИ

Зачем проводятся выборочные исследования? Чтобы получить необходимую информацию о генеральной совокупности. Для этого необходимо перенести выводы с выборки на генеральную совокупность. Как и с какой точностью можно это сделать?

Рассмотрим эту проблему для простейшего случая одного вопроса с двумя возможными ответами: «да» и «нет» [7].

Напомним, что биномиальная модель выборки как раз и применяется для описания ответов на закрытые вопросы, имеющие две подсказки, например «да» и «нет». Конечно, пары подсказок могут быть иными. Например, «согласен» и «не согласен». Или при опросе потребителей кондитерских товаров первая подсказка может иметь такой вид: «Больше люблю “Марс”, чем “Сникерс”». А вторая в этом случае такова: «Больше люблю “Сникерс”, чем “Марс”».

Пусть объем выборки равен n. Тогда ответы опрашиваемых можно представить как $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_i = 1$, если i-й респондент выбрал первую подсказку, и $X_i = 0$, если i-й респондент выбрал вторую подсказку, $i = 1, 2, \ldots, n$. В вероятностной модели предполагается, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены. Поскольку эти случайные величины принимают два значения, то ситуация описывается одним параметром p — долей выбирающих первую подсказку во всей генеральной совокупности. Тогда

$$P(X_i = 1) = p, P(X_i = 0) = 1 - p, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $m = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Оценкой вероятности p является частота $p^* = m / n$. При этом, как известно из теории вероятностей, математическое ожидание $M(p^*)$ и дисперсия $D(p^*)$ имеют вид:

$$M(p^*) = p, D(p^*) = p(1 - p) / n.$$

По закону больших чисел (ЗБЧ) теории вероятностей (в данном случае — по теореме Бернулли) частота p^* сходится (т. е. безгранично приближается) к вероятности p при росте объема выборки (см. прил. 1). Это означает, что оценивание проводится тем точнее, чем больше объем выборки. Точность оценивания можно указать. Займемся этим.

По теореме Муавра — Лапласа теории вероятностей:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где $\pi = 3{,}1415926\ldots$ — отношение длины окружности к ее диаметру, $e = 2{,}718281828\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

График плотности стандартного нормального распределения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

был очень точно изображен на германской денежной банкноте в 10 немецких марок (до введения евро). Банкнота была посвящена великому немецкому математику Карлу Гауссу (1777–1855), среди основных работ которого есть относящиеся к нормальному распределению. Эта подробность демонстрирует, что в Германии (и тем более в англосаксонских странах) гораздо шире распространено знакомство с основами теории вероятностей и математической статистики, чем в нашей стране.

В настоящее время нет необходимости вычислять функцию стандартного нормального распределения и ее плотность по приведенным выше формулам, поскольку давно составлены подробные таблицы (см., например, [8]), а распространенные программные продукты содержат алгоритмы нахождения этих функций.

С помощью теоремы Муавра — Лапласа могут быть построены доверительные интервалы для неизвестной статистику вероятности. Сначала заметим, что из этой теоремы непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{-x \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x) - \Phi(-x).$$

Поскольку функция стандартного нормального распределения симметрична относительно 0, т. е. $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, то справедливо полезное равенство $\Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$.

Зададим характеристику надежности переноса выводов с выборки на генеральную совокупность — доверительную вероятность γ, близкую к 1. Пусть функция $U(\gamma)$ удовлетворяет условию:

$$\Phi(U(\gamma)) - \Phi(-U(\gamma)) = \gamma,$$

т. е.

$$U(\gamma) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right).$$

Из последнего предельного соотношения следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{p^* - U(\gamma)\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le p \le p^* + U(\gamma)\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

К сожалению, это соотношение нельзя непосредственно использовать для доверительного оценивания, поскольку верхняя и нижняя границы зависят от неизвестной вероятности. Однако с помощью метода наследования сходимости (см. прил. 1 к настоящему учебнику или [2, п. 4.3]) можно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{p^* - U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}} \le p \le p^* + U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}\} = \gamma.$$

Следовательно, нижняя доверительная граница имеет вид:

$$p_{нижн} = p^* - U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}},$$

в то время как верхняя доверительная граница:

$$p_{верх} = p^* + U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}.$$

Наиболее распространенным (в прикладных исследованиях) значением доверительной вероятности является $\gamma = 0{,}95$. Иногда употребляют термин «95 %-й доверительный интервал». Тогда $U(\gamma) = 1{,}96$.

Пример 1. Пусть $n = 500$, $m = 200$. Тогда $p^* = 0{,}40$. Найдем доверительный интервал для $\gamma = 0{,}95$:

$$p_{нижн} = 0{,}40 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}4\times 0{,}6}}{\sqrt{500}} = 0{,}40 - 0{,}043 = 0{,}357, \quad p_{верх} = 0{,}40 + 0{,}043 = 0{,}443.$$

Таким образом, хотя в достаточно большой выборке 40 % респондентов говорят «да», можно утверждать лишь, что во всей генеральной совокупности таких от 35,7 до 44,3 % — крайние значения отличаются на 8,6 %.

Замечание. С достаточной для практики точностью можно заменить 1,96 на 2.

Величина

$$U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}$$

называется **ошибкой выборки**. Обычно, как в примере 1, используют значение доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и множитель $U(\gamma) = 1{,}96$.

Удобные для использования в практической работе специалиста по выборочным исследованиям, маркетолога и социолога таблицы точности оценивания разработаны во ВЦИОМ (Всероссийском центре по изучению общественного мнения). Приведем здесь несколько модифицированный вариант одной из них.

Таблица 1.4

Допустимая величина ошибки выборки (в процентах)

Объем группы *n* / **Доля *p****	1 000	750	600	400	200	100
Около 10 или 90 %	2	3	3	4	5	7
Около 20 или 80 %	3	4	4	5	7	9
Около 30 или 70 %	4	4	4	6	9	10
Около 40 или 60 %	4	4	5	6	8	11
Около 50 %	4	4	5	6	8	11

В условиях рассмотренного выше примера надо взять вторую снизу строку. Объема выборки 500 нет в таблице, но есть объемы 400 и 600, которым соответствуют ошибки в 6 и 5 % соответственно. Следовательно, в условиях примера целесообразно оценить ошибку как ((5 + 6) / 2) = 5,5 %. Эта величина несколько больше, чем рассчитанная выше (4,3 %). С чем связано это различие? Дело в том, что таблица ВЦИОМ связана с доверительной вероятностью не $\gamma = 0{,}95$, а $\gamma = 0{,}99$, которой соответствует множитель $U(\gamma) = 2{,}58$. Расчет ошибки по приведенным выше формулам дает 5,65 %, что практически совпадает со значением, найденным по табл. 1.4.

Необходимый объем выборки. В биномиальной модели выборки оценивание характеристик происходит тем точнее, чем объем выборки больше. Часто спрашивают: «Какой объем выборки нужен?» Разработан ряд методов определения необходимого объема выборки. Они основаны на разных подходах: либо на задании необходимой точности оценивания параметров, либо на явной формулировке альтернативных гипотез, между которыми необходимо сделать выбор, либо на учете погрешностей измерений (методы статистики интервальных данных [2]). Ни один из этих подходов нельзя применить в рассматриваемом случае.

Минимальный из обычно используемых объемов выборки n в маркетинговых или социологических исследованиях — 100, максимальный — до 5 000 (обычно в исследованиях, охватывающих ряд регионов страны, т. е. фактически разбивающихся на ряд отдельных исследований, как в ряде исследований ВЦИОМ). По данным Института социологии Российской академии наук [9], среднее число анкет в социологическом исследовании не превышает 700. В Институте маркетинговых исследований ГФК «Русь» стандартный объем выборки 1 000, иногда 500.

Поскольку стоимость исследования растет, по крайней мере как линейная функция объема выборки, а точность повышается как квадратный корень из этого объема, то верхняя граница объема выборки определяется обычно из экономических соображений. Объемы пилотных исследований (т. е. проводящихся впервые, предварительно или как первые в сериях подобных) обычно ниже, чем объемы исследований по обкатанной программе.

Нижняя граница определяется тем, что в минимальной по численности анализируемой подгруппе должно быть несколько десятков человек (не менее 30), поскольку по ответам попавших в эту подгруппу необходимо сделать обоснованные заключения, например о предпочтениях соответствующей подгруппы в совокупности всех потребителей растворимого кофе. Учитывая деление опрашиваемых на продавцов и покупателей, на мужчин и женщин, на четыре градации по возрасту и восемь — по роду занятий, наличие 5–6 подсказок во многих вопросах, приходим к выводу о том, что в рассматриваемом проекте объем выборки должен быть не менее 400–500. Вместе с тем существенное превышение этого объема было признано нецелесообразным, поскольку исследование являлось пилотным.

Поэтому в проекте «Потребители растворимого кофе» объем выборки был выбран равным 500. Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что в соответствии с целями исследования выборку следует считать репрезентативной.

1.4. ДВА ПРИКЛАДНЫХ ВЫБОРОЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯ

Продолжим обсуждение выборочного исследования потребителей растворимого кофе.

Организация опроса. Интервьюерами работали молодые люди — студенты первого курса экономико-математического факультета Московского государственного института электроники и математики (технического университетета) и лицея № 1140, проходившие обучение по экономике, всего 40 человек, имеющих специальную подготовку по изучению рынка и проведению маркетинговых опросов потребителей и продавцов (в объеме 8 ч). Опрос продавцов проводился на рынках г. Москвы, действующих в Лужниках, у Киевского вокзала и в других местах. Опрос покупателей — на рынках, в магазинах, на улицах около киосков и ларьков, а также в домашней и служебной обстановке.

Большое внимание уделялось качеству заполнения анкет. Интервьюеры были разбиты на шесть бригад, бригадиры персонально отвечали за качество заполнения анкет. Второй уровень контроля осуществляла специально созданная «группа организации опроса», третий происходил при вводе информации в базу данных. Каждая анкета заверена подписями интервьюера и бригадира, на ней указаны место и время интервьюирования. Поэтому необходимо признать высокую достоверность собранных анкет.

Обработка данных. В соответствии с целью исследования основной метод первичной обработки данных — построение частотных таблиц для ответов на отдельные вопросы. Кроме того, проводилось сравнение различных групп потребителей и продавцов, выделенных по социально-демографическим данным, с помощью критериев проверки однородности выборок (см. ниже). При более углубленном анализе применялись различные методы статистики объектов нечисловой природы (более 90 % маркетинговых и социологических данных имеют нечисловую природу [10, 11]). Использовались средства графического представления данных.

Итоги опроса. Итак, по заданию одной из торговых фирм были изучены предпочтения покупателей и мелкооптовых продавцов растворимого кофе. Совместно с представителями заказчика был составлен опросный лист (анкета типа социологической) из 16 основных вопросов и 4 дополнительных, посвященных социально-демографической информации. Опрос проводился в форме интервью с 500 покупателями и продавцами кофе. Места опроса — рынки, лотки, киоски, продуктовые и специализированные магазины. Другими словами, были охвачены все виды мест продаж кофе.

Интервью проводили более 40 специально подготовленных (примерно по 8-часовой программе) студентов, разбитых на 7 бригад. После тщательной проверки бригадирами и группой обработки информация была введена в специально созданную базу данных. Затем проводилась разнообразная статистическая обработка, строились таблицы и диаграммы, проверялись статистические гипотезы и т. д. Заключительный этап — осмысление и интерпретация данных, подготовка итогового отчета и предложений для заказчиков.

Технология организации и проведения маркетинговых опросов лишь незначительно отличается от технологии социологических опросов, многократно описанной в литературе. Так, мы предпочли использовать полуоткрытые вопросы, в которых для опрашиваемого дан перечень подсказок, а при желании он может высказать свое мнение в свободной форме. Не уложившихся в подсказки оказалось около 5 %, их мнения были внесены в базу данных и анализировались дополнительно. Для повышения надежности опроса о наиболее важных с точки зрения маркетинга моментах спрашивалось в нескольких вопросах.

Были вопросы-ловушки, с помощью которых контролировалась «осмысленность» заполнения анкеты. Например, в вопросе «Что вы цените в кофе: вкус, аромат, крепость, наличие пенки…» ловушкой является включение «крепости»: ясно, что крепость зависит не от кофе самого по себе, а от его количества в чашке. В ловушку никто из 500 не попался: никто не отметил «крепость». Этот факт свидетельствует о надежности выводов проведенного опроса. Мы считали нецелесообразным задавать вопрос об уровне доходов (поскольку в большинстве случаев отвечают «средний», что невозможно связать с определенной величиной). Вместо такого вопроса мы спрашивали: «Как часто вы покупаете кофе: по мере надобности или по возможности?» Поскольку кофе не является дефицитным товаром, первый ответ свидетельствовал о наличии достаточных денежных средств, второй — об их ограниченности (потребитель не всегда имел возможность позволить себе купить банку растворимого кофе).

Стоимость подобных исследований — 5–10 долл. США на одного обследованного. При этом трудоемкость (и стоимость) начальной стадии — подготовки анкеты и интервьюеров, пробного опроса и др. — 30 % от стоимости исследования. Стоимость непосредственно опроса — тоже 30 %, ввода информации в компьютер и проведения расчетов, построения таблиц и графиков — 20 %, интерпретации результатов, подготовки итогового отчета и предложений для заказчиков — 20 %. Таким образом, стоимость собственно опроса в два с лишним раза меньше стоимости остальных стадий исследования.

В выполнении работы участвуют различные специалисты. На первой стадии в основном нужны высококвалифицированные аналитики. На второй — многочисленные интервьюеры, в роли которых могут выступать студенты и школьники, прошедшие конкретный курс обучения в 8–10 ч. На третьей — требуется работа с компьютером (нужно уметь строить и обсчитывать электронные таблицы или базы данных, использовать статистические пакеты, составлять и печатать таблицы и диаграммы и т. п.). На четвертой — опять в основном нужны высококвалифицированные аналитики.

Приведем некоторые из полученных результатов:

а) в отличие от западных потребителей, отечественные не отдавали предпочтения стеклянным банкам по сравнению с жестяными. Поскольку жестяные банки дешевле стеклянных, то можно было порекомендовать с целью снижения расходов закупку кофе в жестяных банках;

б) отечественные потребители готовы платить на 10–20 % больше за экологически безопасный кофе более высокого качества, имеющий сертификат Минздрава и символ экологической безопасности на упаковке;

в) средний объем потребления растворимого кофе одной семьей — 850 г в месяц;

г) потребители растворимого кофе могут быть разделены на классы (в другой терминологии — кластеры). Есть «продвинутые» потребители, обращающие большое внимание на качество и экологическую безопасность, марку и страну производства, терпимо относящиеся к изменению цены. Эти «тонкие ценители» — в основном женщины от 30 до 50 лет, служащие, менеджеры, научные работники, преподаватели, врачи (т. е. лица с высшим образованием), пьющие кофе как дома, так и на работе, причем «кофейный ритуал» зачастую входит в процедуру деловых переговоров или совещаний. Противоположный по потребительскому поведению класс состоит из мужчин двух крайних возрастных групп — школьников и пенсионеров. Для них важна только цена, что очевидным образом объясняется недостатком денег.

Результаты были использованы заказчиком в рекламной кампании. В частности, обращалось внимание на сертификат Минздрава и на экологическую безопасность упаковки.

Оценивание функции спроса и моделирование рынка. Выпускник программы «Топ-менеджер» Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ А.А. Пивень оценил функцию спроса на продукцию своего предприятия. Расчет и установление оптимальной цены на изделие с точки зрения максимизации прибыли были произведены по описанному выше методу. В табл. 1.5 приведена функция ожидаемого спроса в зависимости от цены. Как подсчитал А.А. Пивень, уровень издержек на производство одного изделия составляет 42 824,7 руб. (1 350 у.е.). Для удобства все расчеты будем производить в условных единицах.

Как видно из приведенных расчетов, оптимальная цена на подъемник должна находиться в диапазоне 1 600–1 700 у.е.

На основе многомерной регрессионной зависимости методом наименьших квадратов (см. гл. 3) была построена математическая модель рынка. Она довольно точно отражает реальное положение дел. При исходной цене 1 650 у.е. продажи ориентировочно должны составить 1 010 шт. На рис. 1.1 приведена кривая спроса.

Таблица 1.5

Функция ожидаемого спроса в зависимости от цены

№ п/п	Цена, у.е.	Объем продаж в год, шт.	Издержки на объем производства	Выручка, у.е.	Прибыль, у.е.
1	1 400	1 600	2 160 000	2 240 000	80 000
2	1 500	1 500	2 025 000	2 250 000	225 000
3	1 600	1 200	1 620 000	1 920 000	300 000
4	1 700	1 000	1 350 000	1 700 000	350 000
5	1 800	720	972 000	1 246 000	324 000
6	1 900	500	675 000	950 000	275 000
7	2 000	320	432 000	640 000	208 000
8	2 100	170	229 500	357 000	127 500
9	2 200	110	148 500	242 000	93 500

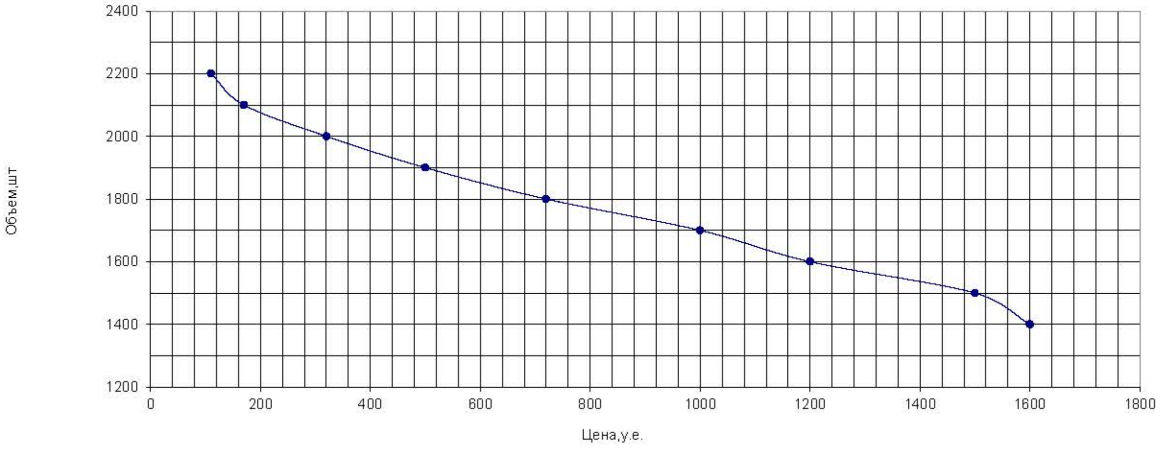


Рис. 1.1. Кривая спроса на изделие

Эти расчеты были сделаны при допущении, что издержки не меняются в течение длительного промежутка времени. Однако в реальных условиях постоянный рост стоимости энергоресурсов и непрекращающаяся инфляция издержек (рост затрат на сырье, материалы, комплектующие изделия, рабочую силу) приводят к увеличению издержек. Поэтому А.А. Пивень проанализировал оптимальный объем выпуска при их различных значениях. Данные его расчетов приведены в табл. 1.6. Поскольку инфляция в нашей стране (см. гл. 4) заметно искажает стоимостные характеристики, используем для их описания условные единицы (у.е.).

Таблица 1.6

Прибыль в зависимости от цены и издержек

№ п/п	Цена, у.е.	Объем продаж, шт.	Прибыль (тыс. у.е.) при издержках на единицу продукции, у.е.							
			1 350	**1 400**	**1 450**	**1 500**	**1 550**	**1 600**	**1 650**	**1 700**
1	1 400	1 600	80	0	–	–	–	–	–	–
2	1 500	1 500	225	150	75	0	–	–	–	–
3	1 600	1 200	300	240	180	120	60	0	–	–
4	1 700	1 000	350	300	250	200	150	100	50	0
5	1 800	720	324	288	252	216	180	144	108	72
6	1 900	500	275	250	225	200	175	150	125	100
7	2 000	320	208	192	176	160	144	128	112	96
8	2 100	170	127,5	119	110,5	102	93,5	85	76,5	68
9	2 200	110	93,5	88	82,5	77	71,5	66	60,5	55

Для удобства рассмотренные результаты оптимальных объемов производства при соответствующих ценах приведены в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Оптимальные выпуск и цена в зависимости от издержек

Издержки	1 350	1 400	1 450	1 500	1 550	1 600	1 650	1 700
Оптимальный выпуск	1 000	1 000	720	720	720	500	500	500
Цена	1 700	1 700	1 800	1 800	1 800	1 900	1 900	1 900

Как видно из табл. 1.7, увеличение издержек ведет к снижению оптимального выпуска при росте цены. Хотя изменение издержек на 50 у.е. может не сразу привести к изменению цены. Необоснованная цена может «переключить» большую группу потребителей на другое, аналогичное изделие, имеющее сходный по уровню набор технических характеристик, но более низкую рыночную цену.

По данным функции спроса (табл. 1.6) проведем расчет эластичности спроса по цене. Под **ценовой эластичностью спроса** понимается степень реагирования рыночного спроса на изменение цен. В классическом понимании эластичность спроса по цене показывает, на сколько изменится объем спроса при изменении цены на 1 %. Спрос квалифицируется как эластичный, если понижение цены вызывает такой рост оборота, при котором увеличение объема продаж с лихвой компенсирует более низкие цены. Если же понижение цены, приводя к некоторому увеличению объема продаж, тем не менее не ведет к увеличению оборота или даже уменьшает его, то такой спрос называется **неэластичным**. *Коэффициент ценовой эластичности спроса* определяется по формуле:

$$K_{цэс} = \frac{(Q_1 - Q_2) \big/ (Q_1 + Q_2)}{(P_1 - P_2) \big/ (P_1 + P_2)},$$

где Q_1, Q_2 — значения объема продаж; P_1, P_2 — значения цены изделия.

В рассматриваемом случае $K_{цэс}$ будет различен на протяжении всей функции спроса (рис. 1.1). Однако произведем расчет на той части кривой (в том диапазоне), где присутствует расчетная цена подъемника, а именно: Q_1 = 1 200 шт.; Q_2 = 720 шт.; P_1 = 1 600 у.е.; P_2 = 1 800 у.е. В этом случае:

$$K_{цэс} = \frac{(1200 - 720)/(1200 + 720)}{(1600 - 1800)/(1600 + 1800)} = -4{,}25.$$

Коэффициент $K_{цэс}$ имеет отрицательный знак и абсолютную величину, значительно превышающую 1. Это говорит о сильной обратной зависимости объемов продаж от цены. Спрос на подъемник эластичен. Валовая выручка увеличивается при снижении цены и уменьшается при ее повышении. Компании необходимо быть готовой к тому, что покупатели очень чутко реагируют на всякое повышение цены на изделие значительным снижением объемов закупок. Как отмечает А.А. Пивень, снижение эластичности спроса на изделие возможно только при общем росте благосостояния населения страны и, в частности, значительном росте доходной части бюджетов промышленных предприятий.

1.5. ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ ДВУХ БИНОМИАЛЬНЫХ ВЫБОРОК

Проверка однородности — одна из базовых проблем, решаемых статистическими методами. Она часто обсуждается в литературе, а методы проверки однородности применяются при решении многих практических задач. Например, как сравнить две группы: мужчин и женщин, молодых и пожилых и т. п.? В маркетинге это важно для сегментации рынка. Если две группы не отличаются по ответам, значит, их можно объединить в один сегмент и проводить по отношению к ним одну и ту же маркетинговую политику, в частности осуществлять одни и те же рекламные воздействия. Если же две группы различаются, то и относиться к ним надо по-разному. Это представители двух разных сегментов рынка, требующих разного подхода при борьбе за их завоевание.

Обсуждаемая далее постановка задачи в статистических терминах такова [7]. Рассматривается вопрос с двумя возможными ответами, например «да» и «нет». В первой группе из n_1 опрошенных m_1 человек сказали «да», а во второй группе из n_2 опрошенных m_2 сказали «да». В вероятностной модели предполагается, что m_1 и m_2 — биномиальные случайные величины $B(n_1, p_1)$ и $B(n_2, p_2)$ соответственно. Запись $B(n, p)$ означает, что случайная величина m имеет биномиальное распределение с параметрами n — объем выборки и p — вероятность определенного ответа (скажем, ответа «да»). Такая случайная величина может быть представлена в виде суммы $m = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, где случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены, принимают два значения — 1 и 0, причем $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$, $I = 1, 2, \ldots, n$.

Однородность двух групп означает, что соответствующие им вероятности равны, неоднородность — что эти вероятности отличаются. В терминах прикладной математической статистики задача ставится так: необходимо проверить гипотезу однородности

$$H_0\colon p_1 = p_2$$

при альтернативной гипотезе о наличии эффекта

$$H_1\colon p_1 \neq p_2$$

(иногда представляют интерес односторонние альтернативные гипотезы: $H'_1\colon p_1 > p_2$ и $H''_1\colon p_1 < p_2$).

Оценкой вероятности p_1 является частота $p_1^* = m_1 / n_1$, а оценкой вероятности p_2 — частота $p_2^* = m_2 / n_2$. Даже при совпадении вероятностей p_1 и p_2 частоты, как правило, различаются. Как говорят, «по чисто случайным причинам». Рассмотрим случайную величину $p_1^* - p_2^*$. Тогда:

$$M(p_1^* - p_2^*) = p_1 - p_2, D(p_1^* - p_2^*) = p_1 (1 - p_1) / n_1 + p_2(1 - p_2) / n_2.$$

Из теоремы Муавра — Лапласа и теоремы о наследовании сходимости (см. прил. 1 к настоящему учебнику или [2, п. 4.3]) следует, что

$$\lim_{n_1\to\infty, n_2\to\infty} P\left\{\frac{p_1^* - p_2^* - M(p_1^* - p_2^*)}{\sqrt{D(p_1^* - p_2^*)}} \le x\right\} = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Для практического применения этого соотношения следует заменить неизвестную статистику дисперсию разности частот на оценку этой дисперсии:

$$D^*(p_1^* - p_2^*) = p_1^*(1 - p^*_1) / n_1 + p_2^*(1 - p_2^*) / n_2.$$

(Могут использоваться и другие оценки рассматриваемой дисперсии, например при справедливости нулевой гипотезы — по объединенной выборке.) С помощью указанной выше математической техники можно показать, что при такой замене предельное распределение не меняется:

$$\lim_{n_1\to\infty, n_2\to\infty} P\left\{\frac{p_1^* - p_2^* - M(p_1^* - p_2^*)}{\sqrt{D^*(p_1^* - p_2^*)}} \le x\right\} = \Phi(x).$$

При справедливости гипотезы однородности (т. е. при отсутствии эффекта) $M(p_1^* - p_2^*) = 0$. Поэтому правило принятия решения при проверке однородности двух выборок выглядит так:

1. Вычислить статистику:

$$Q = \frac{p_1^* - p_2^*}{\sqrt{\dfrac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \dfrac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}}.$$

2. Сравнить значение модуля статистики $|Q|$ с граничным значением K. Если $|Q| \le K$, то нужно принять гипотезу однородности H_0. Если же $|Q|>K$ — заявить об отсутствии однородности и принять альтернативную гипотезу H_1.

Граничное значение K определяется выбором уровня значимости статистического критерия проверки однородности. Из приведенных выше предельных соотношений следует, что при справедливости гипотезы однородности H_0 для уровня значимости $\alpha = P(|Q| > K)$ имеем (при $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$):

$$\alpha \to 1 - \Phi(K) + \Phi(-K) = 2 - 2\Phi(K).$$

Следовательно, граничное значение в зависимости от уровня значимости целесообразно выбирать из условия:

$$K = K(\alpha) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Здесь $\Phi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к функции стандартного нормального распределения. В социально-экономических исследованиях наиболее распространен 5 % уровень значимости, т. е. $\alpha = 0{,}05$. Для него $K = 1{,}96$.

Пример 2. Пусть в первой группе из 500 опрошенных мужчин ответили «да» 200, а во второй группе из 700 опрошенных женщин сказали «да» 350. Есть ли разница по доле отвечающих «да» между генеральными совокупностями, представленными этими двумя группами?

Для установления взаимопонимания с маркетологом уберем из формулировки примера относящийся к теории статистики термин «генеральная совокупность». Получим следующую постановку.

Пусть из 500 опрошенных мужчин ответили «да, я люблю пепси-колу» 200, а из 700 опрошенных женщин 350 сказали «да, я люблю пепси-колу». Есть ли разница между мужчинами и женщинами по доле отвечающих «да» на вопрос о любви к пепси-коле?

В рассматриваемом примере нужные для расчетов величины таковы: $n_1 = 500$, $p_1^* = 200 / 500 = 0{,}4$; $n_1 = 700$, $p_2^* = 350 / 700 = 0{,}5$. Вычислим статистику:

$$Q = \frac{0{,}4 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{500} + \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{700}}} = \frac{-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}24}{500} + \frac{0{,}25}{700}}} = \frac{-0{,}1}{\sqrt{0{,}00048 + 0{,}0003571}}$$

$$= \frac{-0{,}1}{\sqrt{0{,}0008371}} = \frac{-0{,}1}{0{,}029} = -3{,}45.$$

Поскольку $|Q| = 3{,}45 > 1{,}96$, то необходимо отклонить нулевую гипотезу и принять альтернативную. Таким образом, мужчины и женщины отличаются по рассматриваемому признаку — любви к пепси-коле.

Необходимо отметить, что результат проверки гипотезы однородности зависит не только от частот, но и от объемов выборок. Предположим, что частоты (доли) зафиксированы, а объемы выборок растут. Тогда числитель статистики Q не меняется, а знаменатель уменьшается, значит, вся дробь возрастает. Поскольку знаменатель стремится к 0, то дробь возрастает до бесконечности и рано или поздно превзойдет любую границу. Есть только одно исключение — когда в числителе стоит 0. Следовательно, при строгом подходе к формулировкам вывод статистика должен выглядеть так: «различие обнаружено» или «различие не обнаружено». Во втором случае различие, возможно, было бы обнаружено при увеличении объемов выборок.

Как и для доверительного оценивания вероятности, во ВЦИОМ разработаны две полезные таблицы, позволяющие оценить вызванные чисто случайными причинами допустимые расхождения между частотами в группах. Эти таблицы рассчитаны при выполнении нулевой гипотезы однородности и соответствуют ситуациям, когда частоты близки к 50 (табл. 1.8) или 20 % (табл. 1.9). Если наблюдаемые частоты от 30 до 70 %, то рекомендуется пользоваться первой из этих таблиц, если от 10 до 30 % или от 70 до 90 %, то второй. Если наблюдаемые частоты меньше 10 или больше 90 %, то теорема Муавра — Лапласа и основанные на ней асимптотические формулы дают не очень хорошие приближения, целесообразно применять иные, более продвинутые математические средства, в частности приближения с помощью распределения Пуассона.

В условиях разобранного выше примера табл. 1.8 дает допустимое расхождение 7 %. Действительно, объем первой группы 500 отсутствует в таблице, но строки, соответствующие объемам 400 и 600, совпадают для первых двух столбцов слева. Эти столбцы соответствуют объемам второй группы 750 и 600, между которыми расположен объем 700, данный в примере. Он ближе к 750, поэтому берем величину расхождения, стоящую на пересечении первого столбца и второй (и третьей) строк, т. е. 7 %. Поскольку реальное расхождение (10 %) больше, чем 7 %, то делаем вывод о наличии значимого различия между группами. Естественно, этот вывод совпадает с полученным ранее расчетным путем.

Как и в случае табл. 1.4, значения в табл. 1.8 и 1.9 несколько больше, чем рассчитанные по приведенным выше формулам. Дело в том, что таблицы

ВЦИОМ связаны не с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$, а с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$, которому соответствует граничное значение 2,58.

Таблица 1.8

Допустимые расхождения (в %) между частотами в двух группах, когда наблюдаются частоты от 30 до 70 %

Объемы групп	750	600	400	200	100
750	6	7	7	10	12
600	7	8	8	11	13
400	7	8	10	11	14
200	10	11	11	13	16
100	12	13	14	16	18

Таблица 1.9

Допустимые расхождения (в %) между частотами в двух группах, когда наблюдаются частоты от 10 до 30 % или от 70 до 90 %

Объемы групп	750	600	400	200	100
750	5	5	6	8	10
600	5	6	7	8	10
400	6	7	8	9	11
200	8	8	9	10	12
100	10	10	11	12	14

Допустимое расхождение $\Delta = \Delta(\alpha)$ между частотами нетрудно получить расчетным путем. Для этого достаточно воспользоваться формулой для статистики Q и определить, при каком максимальном расхождении частот все еще делается вывод о том, что верна гипотеза однородности. Следовательно, допустимое расхождение $\Delta = \Delta(\alpha)$ находится из уравнения:

$$K(\alpha) = \frac{\Delta(\alpha)}{\sqrt{\dfrac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \dfrac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}}.$$

Таким образом:

$$\Delta(\alpha) = K(\alpha)\sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}.$$

Для данных примера 2 $\Delta = \Delta(\alpha) = 1{,}96 \times 0{,}029 = 0{,}057$, или 5,7 %, для уровня значимости 0,05.

Для других уровней значимости надо использовать другие коэффициенты $K(\alpha)$. Так, $K(0{,}01) = 2{,}58$ для уровня значимости 1 % и $K(0{,}10) = 1{,}64$ для уровня значимости 10 %. Для данных примера $\Delta = \Delta(\alpha) = 2{,}58 \times 0{,}029 = 0{,}7482 \approx 0{,}075$, или 7,5 %, для уровня значимости 0,01. Если округлить до ближайшего целого числа процентов, то получим 7 %, как при использовании табл. 1.8.

Анализ табл. 1.9 и 1.10 показывает, что для обнаружения эффекта (констатации различия генеральных совокупностей) частоты должны отличаться не менее чем на 6 %, а при некоторых объемах выборок — более чем на 10 %, например при объемах выборок 100 и 100 — на 19 %. Если же частоты отличаются на 5 % или менее, можно сразу сказать, что статистический анализ приведет к выводу о том, что различие не обнаружено (для выборок объемов не более 750).

В связи со сказанным возникает вопрос: каково типовое отличие частот в двух выборках из одной и той же совокупности? Разность частот в этом случае имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию:

$$p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) = \frac{p(1-p)(n_1+n_2)}{n_1 n_2}.$$

Величина $p(1-p)$ достигает максимума при $p = 1/2$, и этот максимум равен 1/4. Если $p = 1/2$, а объемы двух выборок совпадают и равны 500, то дисперсия разности частот составляет:

$$\sigma^2 = \frac{0{,}25 \times 1000}{500 \times 500} = \frac{250}{250 \times 1000} = \frac{1}{1000}.$$

Следовательно, среднее квадратическое отклонение σ равно 0,032, или 3,2 %. Поскольку для стандартной нормальной случайной величины в 50 % случаев ее значение не превосходит по модулю 0,67 (а в 50 % случаев — больше 0,67), то типовой разброс равен 0,67σ, а в рассматриваемом случае — 2,1 %.

Приведенные соображения дают возможность построить метод контроля правильности (корректности) проведения повторных опросов. Если частоты излишне устойчивы, значения при повторных опросах слишком близки — это подозрительно! Возможно, нарушены правила проведения опросов, выборки не являются случайными, ответы фальсифицированы и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Саратов : ИНТУИТ : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 676 с.

2. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

3. *Агаларов, З.С.* Эконометрика / З.С. Агаларов, А.И. Орлов. — 2-е изд. — Москва : Дашков и К, 2023. — 380 с.

4. *Орлов, А.И.* Метод ценообразования на основе оценивания функции спроса / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2020. — № 158. — С. 250–267.

5. *Сэндидж, Ч.* Реклама: теория и практика / Ч. Сэндидж, В. Фрайбургер, К. Ротцолл. — Москва : Прогресс, 1989. — 630 с.

6. *Ядов, В.А.* Стратегии и методы качественного анализа данных / В.А. Ядов // Социология: методология, методы, математические модели. — 1991. — № 1. — С. 14–31.

7. *Муравьева, В.С.* Статистический анализ таблиц четырех полей / В.С. Муравьева, А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2021. — № 174. — С. 285–314.

8. *Большев, Л.Н.* Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. — Москва : Наука, 1983. — 416 с.

9. Опыт применения ЭВМ в социологических исследованиях. — Москва : Институт социологических исследований АН СССР : Советская социологическая ассоциация, 1977. — 158 с.

10. *Орлов, А.И.* Общий взгляд на статистику объектов нечисловой природы / А.И. Орлов // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. — Москва : Наука, 1985. — С. 58–92.

11. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: нечисловая статистика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 446 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Почему выборочные исследования необходимы для решения многих практических задач?

2. Из партии продукции объема $N = 100$ изделий, содержащей $D = 10$ дефектных изделий, извлекают выборку объема $n = 5$. Для биномиальной и гипергеометрической моделей выборки рассчитайте распределения числа дефектных изделий в выборке, постройте и сравните функции распределения.

3. Какова роль теоремы Муавра — Лапласа в теории выборочных исследований?

В задачах 4–8 выберите наиболее подходящий вариант ответа.

4. При какой цене максимальна прибыль в условиях п. 1, если издержки (оптовая цена товара) равны 12?

а) 30;

б) 32;

в) 35.

5. При исследовании предпочтений потребителей открытые вопросы:

а) труднее для опрашиваемых, но легче для обработки;

б) легче для опрашиваемых, но труднее для обработки.

6. Пусть из 657 опрошенных 289 сказали «да». Доверительный интервал для доли отвечающих «да» в генеральной совокупности, соответствующий доверительной вероятности 0,95, таков:

а) [0,245; 0,398];

б) [0,435; 0,445];

в) [0,405; 0,556];

г) [0,402; 0,478];

д) [0,247; 0,633].

7. Из 513 юношей 193 любят «Сникерс», а из 748 девушек — 327. Значение статистического критерия Q для проверки гипотезы о равенстве вероятностей равно:

а) 3,38;

б) –2,176;

в) 0,25;

г) 12,56;

д) –0,173.

8. В условиях задачи 7 гипотеза об одинаковой привлекательности «Сникерса» для юношей и девушек (на уровне значимости 0,05):

а) принимается;

б) отклоняется.

9. Как понятие допустимого расхождения между частотами можно использовать при планировании выборочных исследований?

10. Рассчитайте коэффициент ценовой эластичности спроса по данным табл. 1.1 при цене p = 35 и при цене p = 40.

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ, РЕФЕРАТОВ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Проведите выборочное исследование с целью построения оценки функции ожидаемого спроса на выбранный вами товар (услугу).

2. Найдите адекватное приближение функции спроса в табл. 1.1 с помощью метода наименьших квадратов.

3. Постройте экономико-математическую модель оптимизации цены при заданных функциях спроса (в зависимости о цены) и издержек (в зависимости от выпуска).

4. Сопоставьте теорию квотной выборки с теорией простой случайной выборки.

5. Рассмотрите статистическую теорию доверительного оценивания и проверки гипотез о равенстве вероятностей в случае нескольких возможных ответов (соответственно, с использованием мультиномиального распределения вместо биномиального).

6. В каких случаях может быть использована теория малых выборок (теорема Пуассона) для доверительного оценивания вероятности определенного ответа?

ГЛАВА 2. ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ

В последнем разделе предыдущей главы шла речь о проверке однородности двух биномиальных выборок. В настоящей главе продолжим обсуждать проблему однородности: рассмотрим систему эконометрических моделей и методов, предназначенных для проверки однородности двух независимых выборок. Подобные системы разработаны в прикладной статистике [1, 2] для решения многих других важных для практики задач статистического анализа данных, однако объем настоящего учебника не позволяет провести подробный разбор всех таких задач и систем. Настоящую главу следует рассматривать как пример разработки системы эконометрических моделей и методов, предназначенной для решения определенной задачи.

2.1. СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ВЫБОРОК

В прикладных исследованиях часто возникает необходимость выяснить, различаются ли генеральные совокупности, из которых взяты две независимые выборки. Например, надо выяснить, зависят ли от способа упаковки потребительские качества подшипников, измеренные через год после хранения, или влияет ли система оплаты на производительность труда.

В математико-статистических терминах постановка задачи такова: имеются две выборки: $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, требуется проверить их однородность. Напомним, что выборка моделируется как совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин. Термин «однородность» уточняется ниже.

Противоположным понятием является «различие» (или «наличие эффекта»). Можно переформулировать задачу: требуется проверить, есть ли различие между выборками. Если различия нет, то для дальнейшего изучения две рассматриваемые выборки часто объединяют в одну.

Например, в маркетинге важно выделить сегменты потребительского рынка. Если установлена однородность двух выборок мнений потребителей, то возможно объединение сегментов, из которых эти выборки взяты, в один. В дальнейшем это позволит осуществлять по отношению к ним одинаковую маркетинговую политику (проводить одни и те же рекламные мероприятия и т. п.). Если же установлено различие, то поведение потребителей в двух сегментах различно, объединять эти сегменты нельзя и могут понадобиться различные маркетинговые стратегии, своя для каждого из этих сегментов.

Вероятностная модель порождения данных. Для обоснованного выбора и применения организационно-экономических (эконометрических, статистических) методов необходимо прежде всего построить и обосновать вероятностную модель порождения данных. При проверке однородности двух выборок общепринята модель, в которой $x_1, x_2, \ldots, x_m$ рассматриваются как результаты m независимых наблюдений некоторой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, неизвестной статистику, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — как результаты n независимых наблюдений, вообще говоря, другой случайной величины Y с функцией распределения $G(x)$, также неизвестной статистику. Предполагается также, что наблюдения в одной выборке не зависят от наблюдений в другой, поэтому выборки и называют независимыми.

Возможность применения этой модели в конкретной реальной ситуации требует обоснования. Независимость и одинаковая распределенность результатов наблюдений, входящих в выборку, могут быть установлены или исходя из методики проведения конкретных наблюдений, или путем проверки статистических гипотез независимости и одинаковой распределенности с помощью соответствующих критериев проверки статистических гипотез [2].

Если проведено $(m + n)$ измерений объемов продаж в $(m + n)$ торговых точках, то описанную выше модель, как правило, можно применять. Если же, например, x_i и y_i — объемы продаж одного и того же товара до и после определенного рекламного воздействия, то рассматриваемую модель применять нельзя, поскольку очевидно, что эти объемы продаж определяются не только и не столько рекламным воздействием, сколько особенностями конкретной торговой точки (ее расположением, продолжительностью работы, репутацией и т. д.). В последнем случае используют модель связанных выборок. В ней обычно строят новую выборку $z_i = x_i - y_i$ и используют статистические методы анализа одной выборки, а не двух. Методы проверки однородности для связанных выборок рассматриваются в [1, 2, 4].

При дальнейшем изложении принимаем описанную выше вероятностную модель двух выборок.

Классификация моделей по типам данных. В предыдущей главе рассматривались результаты измерений по альтернативным признакам. Каждое из чисел x_i и y_i принимало одно из двух значений: 0 или 1. Если респондент дает ответ «да» на вопрос анкеты, то $x_i = 1$, если его ответ «нет», то $x_i = 0$. Такие признаки называют также дихотомическими, или бинарными. Распределение элементов первой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ описывается одним числом $P(x_i = 1) = p_1$. Распределение элементов второй выборки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ также описывается одним числом $P(y_i = 1) = p_2$. Проверка однородности двух независимых выборок состоит в проверке статистической гипотезы H_0: $p_1 = p_2$ при альтернативной гипотезе о наличии эффекта H_1: $p_1 \neq p_2$. Метод проверки гипотезы H_0 разобран в конце предыдущей главы (см. также [5]). Есть и другие методы проверки этой гипотезы, основанные на использовании иных статистик [6].

Обобщением альтернативного признака является такой признак, значениями которого выступают элементы некоторого конечного множества. Например, респондент выбирает не из двух ответов («да» или «нет»), а из трех («да», «нет», «может быть»). Пусть множество значений состоит из k элементов (их часто называют градациями признака). Занумеруем их натуральными числами $j = 1, 2, \ldots, k$. Для простоты записи будем считать, что элемент выборки — это номер значения (градации), которое принимает признак. Тогда распределение случайного элементов двух выборок со значениями в одном и том же конечном множестве описывается вероятностями:

$$P(x_i = j) = p_j(1), P(y_i = j) = p_j(2), j = 1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, в отличие от альтернативного признака каждое распределение задается не одним числом, а k числами, неотрицательными и в сумме составляющими 1, так что «свободных параметров» всего $(k - 1)$.

Подобные k-значные признаки обычно возникают при измерениях по качественным шкалам (шкалам наименований и порядковой (см. гл. 6)). Однако иногда они возникают в результате группировки значений количественных (числовых) признаков. Будем называть их «признаки с конечным числом градаций». Проверка однородности для таких признаков — это проверка сложной гипотезы:

$$H_0: p_j(1) = p_j(2), j = 1, 2, \ldots, k.$$

Альтернативную гипотезу наиболее общего вида можно записать так:

$$H_1: \sum_{j=1}^{k} (p_j(1) - p_j(2))^2 > 0\ .$$

Третий тип рассматриваемых здесь данных — количественные признаки, значения которых — действительные числа, а функции распределения непрерывны.

Уточнения понятия однородности для количественных данных. Понятие «однородность», т. е. отсутствие различия, может быть формализовано в терминах вероятностной модели различными способами.

Наивысшая степень однородности (абсолютная однородность) достигается, если обе выборки взяты из одной и той же генеральной совокупности, т. е. справедлива нулевая гипотеза:

$$H_0\colon F(x) = G(x) \text{ при всех } x.$$

Отсутствие абсолютной однородности означает, что верна альтернативная гипотеза, согласно которой:

$$H_1\colon F(x_0) \neq G(x_0).$$

хотя бы при одном значении аргумента x_0. Если гипотеза H_0 принята, то выборки можно объединить в одну, если нет — то нельзя.

В некоторых случаях целесообразно проверять не совпадение функций распределения, а лишь совпадение некоторых характеристик случайных величин X и Y — математических ожиданий, медиан, дисперсий, коэффициентов вариации и др. (однородность тех или иных характеристик). Например, однородность математических ожиданий означает, что справедлива гипотеза:

$$H'_0\colon M(X) = M(Y),$$

где $M(X)$ и $M(Y)$ — математические ожидания случайных величин X и Y, результаты наблюдений над которыми составляют первую и вторую выборки соответственно. Доказательство различия между выборками в рассматриваемом случае — это доказательство справедливости альтернативной гипотезы:

$$H'_1\colon M(X) \neq M(Y).$$

Если гипотеза H_0 верна, то и гипотеза H'_0 верна, но из справедливости H'_0, вообще говоря, не следует справедливость H_0. Математические ожидания могут совпадать для различающихся между собой функций распределения. В частности, если в результате обработки выборочных данных принята гипотеза H'_0, то отсюда не следует, что две выборки можно объединить в одну. Однако в ряде ситуаций целесообразна проверка именно гипотезы H'_0.

Например, пусть функция спроса на определенный товар или услугу оценивается путем опроса потребителей (первая выборка) или с помощью данных о продажах (вторая выборка). Тогда маркетологу важно проверить гипотезу об отсутствии систематических расхождений результатов этих двух методов, т. е. гипотезу о равенстве математических ожиданий. Другой пример — из производственного менеджмента. Пусть изучается эффективность управления бригадами рабочих на предприятии с помощью двух организационных схем, результаты наблюдения — объем производства продукции или услуг на одного члена бригады (производительность), а показатель эффективности организационной схемы — средний (по предприятию) объем производства на одного рабочего. Тогда для сравнения эффективности препаратов достаточно проверить гипотезу H'_0.

Иногда нужно проверить однородность дисперсий. Например, различаются ли два способа измерения по величине случайной ошибки, т. е. по дисперсии случайных погрешностей.

Построению и анализу системы моделей и методов проверки однородности двух независимых выборок посвящены работы [7, 8].

Рассмотрим проверку однородности для признаков с конечным числом градаций, а затем — для количественных признаков.

2.2. ПРОВЕРКА СОГЛАСИЯ И ОДНОРОДНОСТИ ДЛЯ ПРИЗНАКОВ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ГРАДАЦИЙ

Проведем в качестве примера обработку данных, относящихся к известной всем тематике. Дональд А. Уиндзор подсчитал, сколько ученых родилось под каждым из знаков зодиака (журнал «Химия и жизнь», 1976, № 4, с. 112–113). Им были взяты две научные специальности: таксономия (т. е. теория классификация биологических организмов) и молекулярная биология. Результаты приведены в табл. 2.1.

Видно, что под знаком Овна родилось гораздо больше молекулярных биологов, чем под любым другим — почти в 1,5 раза больше, чем приходится в среднем на один знак зодиака. Таксономисты чаще рождались под знаком Рака, а реже всего — под знаком Скорпиона. Для этой специальности среднее число рождений больше числа рождений под знаком Скорпиона почти в 1,6 раза, а отношение максимального числа в столбце таксономистов к минимальному равно 38 / 18 ≈ 2,1 (!). Разве все эти факты не доказывают, что специальность ученого и знак зодиака, под которым он родился, связаны между собой, что молекулярные биологи, скажем, не случайно чаще всего рождаются под знаком Овна?

Таблица 2.1

Специальности ученых и знаки зодиака их дней рождений

Номер (i)	**Знак Зодиака**	**Количество таксонометристов ($m_i(1)$)**	**Количество молекулярных биологов ($m_{2i}(2)$)**
1	Овен	28	58
2	Телец	30	32
3	Близнецы	31	39
4	Рак	38	41
5	Лев	32	32
6	Дева	31	42
7	Весы	25	41
8	Скорпион	18	41
9	Стрелец	27	40
10	Козерог	25	33
11	Водолей	26	35
12	Рыбы	31	36
Всего (n_i)		342	470
В среднем на знак Зодиака (n_i / 12)		28,5	39,17

Нет, не доказывают. Почему превышение над средним уровнем в 1,5 раза считать большим, а, к примеру, в 1,1 раза — малым? Может быть, и то, и другое вызывается чисто случайными причинами?

Как теория организационно-экономического моделирования рекомендует поступать? Прежде всего необходимо сформулировать гипотезу, которую будем проверять. Или несколько гипотез. А для этого построим вероятностно-статистическую модель, в терминах которой сформулируем гипотезу. Модель нужна, чтобы дальнейшие расчеты опирались на теорию математической статистики.

Принимаем, что для каждой из двух генеральных совокупностей ученых (таксономистов и молекулярных биологов) существуют 12 вероятностей событий, состоящих в рождении ученого под определенным знаком зодиака. Обозначим $p_1(1)$ вероятность того, что таксономист родился под знаком Овна, $p_2(1)$ — что он родился под знаком Тельца, и так далее до $p_{12}(1)$ — вероятности рождения под знаком Рыбы (знаки Зодиака пронумерованы в табл. 2.1). Кроме того, считаем, что $n_1 = 342$ изученных Дональдом А. Уиндзором таксономиста выбраны из всей совокупности ученых этой специальности таким способом, который никак не связан с днями и месяцами их рождений, ведь иначе мы не можем распространить выводы, полученные по выборке, на всю совокупность. В общем, рассматриваемая выборка является представительной (см. гл. 1).

Итак, вероятностно-статистическая модель такова. Считаем, что в столбце таксономистов табл. 2.1 записаны результаты $n_1 = 342$ опытов, проведенных независимо друг от друга, в каждом из которых осуществляется одно из 12 событий: с вероятностью $p_1(1)$ качественный признак принимает значение 1 (интерпретируется как «родился под знаком Овна), с вероятностью $p_2(1)$ признак принимает значение 2 (т. е. «родился под знаком Тельца») и так далее до значения 12 («родился под знаком Рыбы»), которое этот признак принимает с вероятностью $p_{12}(1)$. Модель для описания результатов $n_2 = 470$ опытов, приведенных в столбце молекулярных биологов, отличается только другими обозначениями вероятностей, а именно $p_1(2)$, $p_2(2)$, …, $p_{12}(2)$ для рождений под знаками Овна, Тельца, …, Рыбы соответственно.

Самая простая гипотеза, которая приходит в голову, такова: шансы родиться под каждым знаком Зодиака одинаковы. Поскольку всего знаков 12, то имеется 1 шанс из 12 родиться под знаком Овна, 1 шанс из 12 — под знаком Тельца и т. д. Значит, все вероятности равны между собой и потому равны 1/12. Речь идет о нулевых гипотезах:

$$H_0(1): p_1(1) = \ldots = p_{12}(1) = 1/12;$$

$$H_0(2): p_1(2) = \ldots = p_{12}(2) = 1/12.$$

При взгляде на табл. 2.1 возникает, скажем, гипотеза, что для таксономистов $p_4(1)$ больше $p_8(1)$ (вероятность родиться под знаком Рака больше, чем вероятность родиться под знаком Скорпиона). Если эта гипотеза справедлива, то знаки Зодиака не являются равноправными, и реальный мир устроен более сложно, чем в случае равных вероятностей. По принципу экономии мышления (известен также как бритва Оккама[2]) необходимо сначала проверить, не со-

[2] Бритва (лезвие) Оккама — методологический принцип, получивший название по имени английского монаха-францисканца, философа-номиналиста Вильяма Оккама (Ockham, Ockam, Occam; ок. 1285–1349). В упрощенном виде он гласит: «Не следует множить сущее без необходимости» (либо «Не следует привлекать новые сущности без самой крайней на то необходимости»). Этот принцип формирует базис методологического редукционизма. Его называют также принципом бережливости, или законом экономии.

ответствуют ли все-таки данные табл. 2.1 гипотезе равноправности шансов, и только в случае обнаружения противоречия переходить к более сложным гипотезам.

Итак, мы пришли к следующим задачам проверки статистических гипотез: не противоречат ли данные табл. 2.1 гипотезам $H_0(1)$ и $H_0(2)$?

Критерий χ^2 (хи-квадрат) для проверки согласия с фиксированным распределением. В математической статистике со времен великого английского статистика Карла Пирсона (1857–1936) рассматривают задачу проверки согласия эмпирического распределения с теоретическим. А именно, пусть в результате опыта осуществляется один и только один из k исходов. Пусть эти исходы занумерованы натуральными числами от 1 до k, и p_1, p_2, …, p_k — вероятности этих исходов. Пусть проведено n опытов, в результате которых m_1 раз осуществился первый исход, m_2 раз — второй, …, m_k раз — k-й исход. По этим статистическим данным требуется проверить статистическую гипотезу о том, что вероятности исходов опыта совпадают с заданными:

$$H_0\colon p_j = p_{j0},\ j = 1, 2, \dots, k.$$

Альтернативная гипотеза, которую обычно рассматривают, состоит в том, что нарушается хотя бы одно из этих равенств. Ее можно записать так:

$$H_1 : \sum_{j=1}^{k} \left(p_j - p_{j0}\right)^2 > 0\,.$$

Для проверки этой гипотезы согласия эмпирического распределения с теоретическим естественно исходить из того, что при ее справедливости случайная величина m_j имеет биномиальное распределение с вероятностью p_{j0} и числом опытов n, а потому ее математическое ожидание равно np_{j0}. Следовательно, отклонение эмпирического распределения от теоретического описывается величинами $m_j - np_{j0}$. С некоторой естественной точки зрения [9] наилучший способ проверки согласия основан на введенной Карлом Пирсоном статистике критерия хи-квадрат, рассчитываемой по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(m_j - np_{j0})^2}{np_{j0}}\,.$$

При росте объема выборки n распределение только что введенной статистики критерия хи-квадрат стремится к известному в теории вероятностей распределению хи-квадрат с $(k-1)$ степенью свободы, т. е. к распределению суммы $(k-1)$ независимых случайных величин, каждая из которых — квадрат стандартной нормальной случайной величины (с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1). Исходя из этого математического утверждения, для проверки гипотезы согласия по уровню значимости α находят квантиль $\chi^2(\alpha, k-1)$ порядка $(1-\alpha)$ распределения хи-квадрат с $(k-1)$ степенью свободы (с помощью распространенных таблиц, имеющихся, в частности, в сборнике [3], или с помощью различных программных продуктов). Правило принятия решений при проверке гипотезы согласия таково: если рассчитанное по эмпирическим данным значение статистики хи-квадрат таково, что

$$\chi^2 \leq \chi^2(\alpha, k-1),$$

то гипотезу согласия принимают на заданном уровне значимости (и констатируют, что эмпирические данные не противоречат гипотезе H_0: $p_j = p_{j0}$, $j = 1, 2, \ldots, k$; если же:

$$\chi^2 > \chi^2(\alpha, k-1),$$

то гипотезу согласия отклоняют (и принимают альтернативную гипотезу).

Замечание 1. Чтобы можно было опираться на предельное соотношение, требуется, чтобы величины np_{j0} не были малыми. Для этого достаточно, чтобы $np_{j0} \geq 5$ при всех $j = 1, 2, \ldots, k$.

Замечание 2. В математической статистике еще несколько критериев проверки гипотез называются критериями хи-квадрат, например критерий для проверки однородности распределений значений конечнозначных признаков (см. ниже), критерий для проверки независимости признаков на основе таблицы сопряженности. Причина проста: распределения статистик этих критериев сходятся к распределению хи-квадрат.

Замечание 3. Если соответствующее опыту распределение мало отличается от теоретического, то при сравнительно небольшом объеме выборки, скорее всего, будет принята гипотеза согласия. При увеличении же объема выборки может быть обнаружено отличие распределения от теоретического. Поэтому в случае $\chi^2 \leq \chi^2(\alpha, k-1)$ точнее формулировать вывод так: эмпирические данные не позволяют отклонить гипотезу согласия, в то время как в случае $\chi^2 > \chi^2(\alpha, k-1)$ констатируем, что отклонение обнаружено.

Замечание 4. Если значение статистики χ^2 мало, то данные, возможно, фальсифицированы. Это утверждение основано на том, что при справедливости гипотезы согласия распределение статистики близко к хи-квадрат распределению, а потому осуществление маловероятных событий — слишком большого или слишком малого значения статистики χ^2 — практически невозможно.

Вернемся к данным табл. 2.1. Соответственно числу знаков зодиака $k = 12$. Проверяем гипотезу равновероятности, т. е. частный случай гипотезы согласия с $p_{j0} = 1/12$, $j = 1, 2, \ldots, 12$. Из последней строки табл. 2.1 следует, что приведенное в замечании 1 условие выполнено.

Проведя расчеты по приведенной выше формуле, получаем, что для таксономистов $\chi^2 = 9{,}36$, а для молекулярных биологов $\chi^2 = 13{,}85$. По таблицам [3] (и любым другим) для числа степеней свободы $k - 1 = 12 - 1 = 11$ квантиль распределения хи-квадрат порядка 0,9 есть 17,3, а квантиль порядка 0,95 равен 19,7. Это значит, что гипотеза согласия принимается (не отклоняется) при уровнях значимости 0,1, а также 0,05 и всех иных, используемых на практике. По тем же таблицам:

$$P(\chi^2 \leq 9{,}36) = 0{,}41, P(\chi^2 \leq 13{,}85) = 0{,}76,$$

так что значения статистики попадают в среднюю часть распределения: они не слишком велики и не слишком малы.

Итак, данные табл. 2.1 идеально согласуются с равномерным распределением моментов рождения по знакам зодиака как для таксонометристов, так и для молекулярных биологов. Отклонения от равномерности, отмеченные в начале раздела, объясняются чисто случайными причинами.

Критерий χ^2 (хи-квадрат) проверки однородности распределений признаков с конечным числом градаций. Предположим, что гипотезу равноправности знаков зодиака нельзя отвергнуть ни для одной группы ученых. Возможно, что эти группы сильно различаются *между собой*, отклоняясь от среднего, так сказать, в разные стороны? Как установить, верно это утверждение или нет? Речь идет, очевидно, о проверке однородности распределений двух признаков с конечным числом градаций. Опишем соответствующую вероятностно-статистическую модель.

Пусть в результате опыта осуществляется один и только один из k исходов. Пусть эти исходы занумерованы натуральными числами от 1 до k. Пусть $p_1(1), p_2(1), \ldots, p_k(1)$ — вероятности этих исходов для одной генеральной совокупности, а $p_1(2), p_2(2), \ldots, p_k(2)$ — вероятности этих же исходов для другой генеральной совокупности. Другими словами, рассмотрим два признака (две случайные величины) X и Y, возможные значения которых — рассматриваемые k исходов.

Распределения этих признаков таковы:

$$P(X = j) = p_j(1), P(Y = j) = p_j(2), j = 1, 2, \ldots, k.$$

Пусть для признака X проведены $n(1)$ независимых опытов, в результате которых $m_1(1)$ раз осуществился первый исход, $m_2(1)$ раз — второй, …, $m_k(1)$ раз — k-й исход. Другими словами, проведено $n(1)$ независимых испытаний, в результате которых получено $n(1)$ независимых значений случайной величины X, причем эта случайная величина $m_1(1)$ раз приняла значение 1, $m_2(1)$ раз — значение 2, …, $m_k(1)$ раз — значение k. Аналогичным образом получены статистические данные для случайной величины Y — проведено $n(2)$ независимых испытаний, в которых эта случайная величина $m_1(2)$ раз приняла значение 1, $m_2(2)$ раз — значение 2, …, $m_k(2)$ раз — значение k. Причем испытания для X проведены независимо от испытаний для Y.

По этим статистическим данным, т. е. по двум независимым выборкам значений двух конечнозначных случайных величин, требуется проверить статистическую гипотезу о том, что распределения этих случайных величин совпадают. Другими словами, проверить гипотезу однородности распределений, т. е. сложную гипотезу:

$$H_0\colon p_j(1) = p_j(2),\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

В качестве альтернативной обычно рассматривают гипотезу о том, что хотя бы одно из этих k равенств не выполнено. Эту гипотезу наиболее общего вида можно записать так:

$$H_1 : \sum_{j=1}^{k} (p_j(1) - p_j(2))^2 > 0 .$$

Статистика критерия хи-квадрат имеет вид [10, с. 275]:

$$\chi^2 = \chi^2(n(1), n(2)) = n(1)n(2)\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{m_j(1) + m_j(2)} \left(\frac{m_j(1)}{n(1)} - \frac{m_j(2)}{n(2)} \right)^2 .$$

Известно, что при росте объемов выборок $n(1)$ и $n(2)$ распределение статистики $\chi^2(n(1), n(2))$ стремится к распределению хи-квадрат с $(k - 1)$ степенями свободы. Поэтому при больших $n(1)$ и $n(2)$ правило принятия решений при проверке гипотезы однородности таково: если рассчитанное по эмпирическим данным значение статистики хи-квадрат таково, что

$$\chi^2(n(1), n(2)) \le \chi^2(\alpha, k-1),$$

то гипотезу однородности принимают на заданном уровне значимости; если же

$$\chi^2(n(1), n(2)) > \chi^2(\alpha, k-1),$$

то гипотезу однородности отклоняют (и принимают альтернативную гипотезу). Здесь, как и ранее, $\chi^2(\alpha, k-1)$ — это квантиль порядка $(1-\alpha)$ распределения хи-квадрат с $(k-1)$ степенью свободы.

Замечание. Более точно в случае $\chi^2(n(1), n(2)) > \chi^2(\alpha, k-1)$ можно констатировать, что обнаружено различие распределений (как говорят, доказано наличие эффекта (на данном уровне значимости)), в то время как в случае $\chi^2(n(1), n(2)) \le \chi^2(\alpha, k-1)$ можно сказать лишь, что эффект не обнаружен (нет оснований отвергнуть предположение о совпадении распределений).

Расчет по данным табл. 2.1 дает, что

$$\chi^2 = 14{,}22 < \chi^2(0{,}1;\ 11),\ P(\chi^2 \le 14{,}22) = 0{,}78.$$

Таким образом, на любом из практически используемых уровней значимости констатируем однородность распределений. Наблюдаемое значение статистики (т. е. 14,22) попадает в среднюю часть распределения: при справедливости нулевой гипотезы значение статистики в 78 % случаев меньше наблюдаемого и в 22 % случаев больше наблюдаемого. Итак, не обнаружено никакой связи между специальностью ученого и знаком зодиака, под которым он рожден.

Случай $k = 2$ подробно проанализирован в работе [5].

2.3. ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

Перейдем к следующему элементу системы моделей, описанной в первом разделе настоящей главы, — к моделям, нацеленным на проверку равенства характеристик двух распределений, из которых взяты две независимые выборки. Исходим из общепринятой базовой модели, в которой элементы первой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ рассматриваются как результаты m независимых наблюдений некоторой числовой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, неизвестной статистику, а элементы второй выборки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — как результаты n независимых наблюдений, вообще говоря, другой случайной величины Y с функцией распределения $G(x)$, также неизвестной статистику. Предполагается также, что наблюдения в одной выборке не зависят от наблюдений в другой, поэтому выборки и называют независимыми.

Замечание. Обратите внимание, что объемы выборок обозначены здесь не так, как в предыдущем разделе. Это сделано специально, а именно для того, чтобы у читателя не создавался ложный стереотип, мешающий воспринимать многообразие литературных источников с соответствующим многообразием обозначений.

Традиционный метод проверки однородности (критерий Стьюдента). Для дальнейшего критического разбора опишем традиционный статистический метод проверки однородности. Он широко использовался в течение всего XX в. Хотя к настоящему времени этот метод устарел (см. ниже), но продолжает встречаться в учебной литературе и применяться для анализа конкретных данных.

При использовании традиционного метода проверки однородности вычисляют выборочные средние арифметические в каждой выборке:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{1\le i\le m} x_i, \qquad y = \frac{1}{n}\sum_{1\le i\le n} y_i,$$

затем выборочные дисперсии:

$$s_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{1\le i\le m}(x_i - \bar{x})^2, \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1\le i\le n}(y_i - \bar{y})^2$$

и статистику Стьюдента t, на основе которой принимают решение:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}}\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}. \tag{2.1}$$

По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $(m + n - 2)$ из таблиц распределения Стьюдента (см., например, [3]) находят критическое значение $t_{кр}$. Если $|t| > t_{кр}$, то гипотезу однородности (отсутствия различия) отклоняют, если же $|t| \le t_{кр}$, то принимают. (При односторонних альтернативных гипотезах вместо условия $|t| > t_{кр}$ проверяют, что $t > t_{кр}$; эту постановку рассматривать не будем, так как в ней нет принципиальных отличий от обсуждаемой здесь.)

В литературе зачастую описывается только приведенный выше алгоритм. Этого недостаточно для квалифицированного анализа статистических данных. Рассмотрим условия применимости традиционного метода проверки однородности, основанного на использовании статистики t Стьюдента, а также обсудим современные методы проверки однородности двух выборок.

Классические условия применимости критерия Стьюдента. Согласно математико-статистической теории должны быть выполнены два классических условия применимости критерия Стьюдента, основанного на использовании статистики t, заданной формулой (2.1):

а) результаты наблюдений имеют нормальные распределения:

$$F(x) = N(x; m_1, \sigma_1^2),\ G(x) = N(x; m_2, \sigma_2^2)$$

с математическими ожиданиями m_1 и m_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 в первой и во второй выборках соответственно;

б) дисперсии результатов наблюдений в первой и второй выборках совпадают:

$$D(X) = \sigma_1^2 = D(Y) = \sigma_2^2.$$

Если условия *а* и *б* выполнены, то нормальные распределения $F(x)$ и $G(x)$ отличаются только математическими ожиданиями, а поэтому обе гипотезы H_0 и H'_0 (см. разд. 2.1) сводятся к гипотезе:

$$H''_0\colon m_1 = m_2,$$

а обе альтернативные гипотезы H_1 и H'_1 сводятся к гипотезе:

$$H''_1\colon m_1 \neq m_2.$$

Если условия *а* и *б* выполнены, то статистика t при справедливости H''_0 имеет распределение Стьюдента с $(m + n - 2)$ степенями свободы. Только в этом случае описанный выше традиционный метод обоснован безупречно. Если хотя бы одно из условий *а* и *б* не выполнено, то нет никаких оснований считать, что статистика t имеет распределение Стьюдента, поэтому применение традиционного метода, строго говоря, не обосновано. Обсудим возможность проверки этих условий и последствия их нарушений.

Имеют ли результаты наблюдений нормальное распределение? Как подробно показано в литературе (см., например, [1, гл. 5.1], [11, гл. 4.1], [12]), априори нет оснований предполагать нормальность распределения результатов экономических, технико-экономических, технических, медицинских и иных наблюдений. Следовательно, нормальность надо проверять. Разработано много статистических критериев для проверки нормальности распределения результатов наблюдений [3]. Однако проверка нормальности — более сложная и трудоемкая статистическая процедура, чем проверка однородности (как с помощью статистики t Стьюдента, так и с использованием непараметрических критериев, рассматриваемых ниже).

Для достаточно надежного установления нормальности требуется весьма большое число наблюдений. В указанных выше литературных источниках [1, 2] показано, что для того, чтобы гарантировать, что функция распределения результатов наблюдений отличается от некоторой нормальной не более чем на 0,01 (при любом значении аргумента), требуется порядка 2 500 наблюдений. В большинстве технических, экономических, медицинских и иных исследований число наблюдений существенно меньше.

Как отмечалось в литературе, есть и еще одна общая причина отклонений от нормальности: любой результат наблюдения записывается конечным (обычно 2–5) количеством цифр, а с математической точки зрения вероятность такого события равна 0. Точнее, для случайной величины с непрерывной плотностью распределения вероятность попадания в счетное множество рациональных чисел равна 0. Следовательно, при статистической обработке данных в организационно-экономических исследованиях распределение результатов наблюдений практически всегда более или менее отличается от нормального распределения.

Последствия нарушения условия нормальности. Если условие *а* не выполнено, то распределение статистики t не является распределением Стьюдента. Однако можно показать, используя центральную предельную теорему теории вероятностей и теоремы о наследовании сходимости (см., например, [2, гл. 4] и прил. 1 в настоящем учебнике), что при справедливости H'_0 и условия *б* распределение статистики t при росте объемов выборок приближается к стандартному нормальному распределению $\Phi(x) = N(x; 0, 1)$ с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. К этому же распределению приближается распределение Стьюдента при возрастании числа степеней свободы. Другими словами, несмотря на нарушение условия нормальности традиционный метод (критерий

Стьюдента) можно использовать (при определенных условиях!) для проверки гипотезы H'_0 при больших объемах выборок. При этом вместо таблиц распределения Стьюдента достаточно пользоваться таблицами стандартного нормального распределения $\Phi(x)$.

Сформулированное в предыдущем абзаце утверждение справедливо для любых функций распределения $F(x)$ и $G(x)$, таких, что $M(X) = M(Y)$, $D(X) = D(Y)$ и выполнены некоторые внутриматематические условия, обычно считающиеся справедливыми в реальных задачах экономики и управления. Если же $M(X) \neq M(Y)$, то нетрудно вычислить, что при больших объемах выборок:

$$P(t \le x) \approx \Phi(x - a_{mn}), \tag{2.2}$$

где

$$a_{mn} = \frac{\sqrt{mn}[M(X) - M(Y)]}{\sqrt{mD(X) + nD(Y)}}. \tag{2.3}$$

Формулы (2.2)–(2.3) позволяют приближенно вычислять мощность t-критерия (точность возрастает при увеличении объемов выборок m и n).

О проверке условия равенства дисперсий. Иногда условие *б* вытекает из методики получения результатов наблюдений, например, когда с помощью одного и того же прибора или методики m раз измеряют характеристику первого объекта и n раз — второго, а параметры распределения погрешностей измерения при этом не меняются. Однако ясно, что в постановках большинства исследовательских и практических задач нет оснований априори предполагать равенство дисперсий.

Целесообразно ли проверять равенство дисперсий статистическими методами, например, как это иногда предлагают, с помощью F-критерия Фишера? Этот критерий основан на нормальности распределений результатов наблюдений. А от нормальности неизбежны отклонения (см. выше). Причем хорошо известно, что в отличие от t-критерия распределение F-критерия Фишера сильно меняется при малых отклонениях от нормальности [3]. Кроме того, F-критерий отвергает гипотезу $D(X) = D(Y)$ лишь при большом различии выборочных дисперсий. Так, для данных [2] о двух группах результатов химических анализов отношение выборочных дисперсий равно 1,95, т. е. существенно отличается от 1. Тем не менее гипотеза о равенстве теоретических дисперсий принимается при применении F-критерия на 1 %-м уровне значимости. Следовательно, при проверке однородности применение F-критерия для предварительной проверки равенства дисперсий с целью обоснования возможности использования критерия Стьюдента нецелесообразно.

Итак, в большинстве технических, экономических, медицинских и иных задач условие *б* нельзя считать выполненным, а проверять его перед проверкой однородности нецелесообразно.

Последствия нарушения условия равенства дисперсий. Если объемы выборок m и n велики, то можно показать, что распределение статистики t описывается с помощью только математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$, дисперсий $D(X)$, $D(Y)$ и отношения объемов выборок, а именно:

$$P(t \le x) \approx \Phi(b_{mn}x - a_{mn}), \tag{2.4}$$

где a_{mn} определено формулой (2.3),

$$b_{mn}^{2} = \frac{\lambda D(X) + D(Y)}{D(X) + \lambda D(Y)}, \quad \lambda = \frac{m}{n}. \tag{2.5}$$

Если $b_{mn} \neq 1$, то распределение статистики t отличается от распределения, заданного формулой (2.2), полученной в предположении равенства дисперсий. Когда $b_{mn} = 1$? В двух случаях: при $m = n$ и при $D(X) = D(Y)$. Таким образом, при больших и равных объемах выборок требовать выполнения условия *б* нет необходимости. Кроме того, ясно, что если объемы выборок мало различаются, то b_{mn} близко к 1. Так, для данных [3] о двух группах результатов химических анализов имеем $b^*_{mn} = 0{,}987$, где b^*_{mn} — оценка b_{mn}, полученная заменой в формуле (2.5) теоретических дисперсий на их выборочные оценки.

Область применимости традиционного метода проверки однородности с помощью критерия Стьюдента. Подведем итоги рассмотрения t-критерия. Он позволяет проверять гипотезу H'_0 о равенстве математических ожиданий, но не гипотезу H_0 о том, что обе выборки взяты из одной и той же генеральной совокупности. Классические условия применимости критерия Стьюдента в подавляющем большинстве технических, экономических, медицинских и иных задач не выполнены. Тем не менее при больших и примерно равных объемах выборок его можно применять. При конечных объемах выборок традиционный метод носит неустранимо приближенный характер.

Критерий Крамера — Уэлча равенства математических ожиданий. Вместо критерия Стьюдента целесообразно для проверки H'_0 использовать критерий Крамера — Уэлча [13, с. 492], основанный на статистике:

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{m} + \dfrac{s_y^2}{n}}} = \frac{\sqrt{mn}\left(\bar{x} - \bar{y}\right)}{\sqrt{ns_x^2 + ms_y^2}}. \tag{2.6}$$

Критерий Крамера — Уэлча имеет прозрачный смысл: разность выборочных средних арифметических для двух выборок делится на естественную оценку среднего квадратического отклонения этой разности. Естественность указанной оценки состоит в том, что неизвестные статистику дисперсии заменены их выборочными оценками. Из многомерной центральной предельной теоремы и из теорем о наследовании сходимости [1, гл. 4] вытекает, что при росте объемов выборок распределение статистики T Крамера — Уэлча сходится к стандартному нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Итак, при справедливости H'_0 и больших объемах выборок распределение статистики T приближается с помощью стандартного нормального распределения $\Phi(x)$, из таблиц которого и следует брать критические значения.

При $m = n$, как следует из формул (2.1) и (2.6), $t = T$. При $m \neq n$ этого равенства нет. В частности, при s_x^2 в формуле (2.1) стоит множитель $(m - 1)$, а в формуле (2.6) — множитель n.

Если $M(X) \neq M(Y)$, то при больших объемах выборок:

$$P(T \leq X) \approx \Phi(x - c_{mn}), \tag{2.7}$$

где

$$c_{mn} = \frac{\sqrt{mn}[M(X) - M(Y)]}{\sqrt{nD(X) + mD(Y)}}. \tag{2.8}$$

При $m = n$ или $D(X) = D(Y)$, согласно формулам (2.3) и (2.8), $a_{mn} = c_{mn}$, в остальных случаях равенства нет.

Из асимптотической нормальности статистики T, формул (2.7) и (2.8) следует, что правило принятия решения для критерия Крамера — Уэлча выглядит так [14]:

– если $|T| \leq \Phi^{-1}(1 - \alpha / 2)$, то гипотеза однородности (равенства) математических ожиданий принимается на уровне значимости α;

– если же $|T| > \Phi^{-1}(1 - \alpha / 2)$, то гипотеза однородности (равенства) математических ожиданий отклоняется на уровне значимости α.

В прикладной статистике наиболее часто применяется уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Тогда значение модуля статистики T Крамера — Уэлча надо сравнивать с граничным значением $\Phi^{-1}(1 - \alpha / 2) = 1{,}96$.

Из сказанного выше следует, что применение критерия Крамера — Уэлча при анализе организационно-экономических данных более обосновано, чем применение критерия Стьюдента. Дополнительное преимущество критерия Крамера — Уэлча по сравнению с критерием Стьюдента — не требуется равенства дисперсий $D(X) = D(Y)$. Распределение статистики T не является распределением Стьюдента, однако и распределение статистики t, как показано выше, не является таковым в реальных ситуациях.

Распределение статистики T при объемах выборок $m = n = 6, 8, 10, 12$ и различных функциях распределений выборок $F(x)$ и $G(x)$ изучено нами совместно с Ю.Э. Камнем и Я.Э. Камнем методом статистических испытаний (Монте-Карло). Рассмотрены различные варианты функций распределения $F(x)$ и $G(x)$. Результаты (частично опубликованы в статьях [15–17]) показывают, что даже при таких небольших объемах выборок точность аппроксимации предельным стандартным нормальным распределением вполне удовлетворительна. Поэтому представляется целесообразным во всех тех случаях, когда в соответствии с устаревшими литературными источниками используется критерий Стьюдента, заменить его на критерий Крамера — Уэлча. Конечно, такая замена потребует переделки ряда нормативно-технических и методических документов, исправления учебников и учебных пособий для вузов.

Пример 1. Пусть объем первой выборки $m = 120$, $\bar{x} = 13{,}7$, $s_x = 5{,}3$. Для второй выборки $n = 541$, $\bar{y} = 14{,}1$, $s_y = 8{,}4$. Вычислим величину статистики Крамера — Уэлча:

$$T = \frac{\sqrt{mn}(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{ns_x^2 + ms_y^2}} = \frac{\sqrt{120 \times 541}(13{,}7 - 14{,}1)}{\sqrt{541 \times 5{,}3^2 + 120 \times 8{,}4^2}} = \frac{\sqrt{64920}(-0{,}4)}{\sqrt{541 \times 28{,}09 + 120 \times 70{,}56}} =$$

$$= \frac{254{,}79 \times (-0{,}4)}{\sqrt{15196{,}69 + 8467{,}2}} = \frac{-101{,}916}{\sqrt{23663{,}89}} = \frac{-101{,}916}{153{,}83} = -0{,}66.$$

Поскольку полученное значение по абсолютной величине меньше 1,96, то гипотеза однородности математических ожиданий принимается на уровне значимости 0,05.

Непараметрические методы проверки однородности. В большинстве управленческих, технических, экономических, медицинских и иных задач представляет интерес не проверка равенства математических ожиданий или иных характеристик распределения, а обнаружение различия генеральных совокупностей, из которых извлечены выборки, т. е. проверка гипотезы H_0. Методы проверки гипотезы H_0 позволяют обнаружить не только изменение математического ожидания, но и любые иные изменения функции распределения результатов наблюдений при переходе от одной выборки к другой (увеличение разброса, появление асимметрии и т. д.). Как установлено выше, методы, основанные на использовании статистик t Стьюдента и T Крамера — Уэлча, не позволяют проверять гипотезу H_0. Априорное предположение о принадлежности функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ к какому-либо определенному параметрическому семейству (например, семействам нормальных, логарифмически нормальных, распределений Вейбулла — Гнеденко, гамма-распределений и др.), как также показано выше, обычно нельзя достаточно надежно обосновать. Поэтому для проверки H_0 следует использовать методы, пригодные при любом виде $F(x)$ и $G(x)$, т. е. непараметрические методы. (Напомним, что термин «непараметрический метод» означает, что при использовании этого метода нет необходимости предполагать, что функции распределения результатов наблюдений принадлежат какому-либо определенному параметрическому семейству [18].)

Для проверки гипотезы H_0 разработано много непараметрических методов: критерии Смирнова, типа омега-квадрат (Лемана — Розенблатта), Вилкоксона (Манна — Уитни), Ван-дер-Вардена, Сэвиджа, хи-квадрат и др. [1, 19, 20]. Распределения статистик всех этих критериев при справедливости H_0 не зависят от конкретного вида совпадающих функций распределения $F(x) \equiv G(x)$. Следовательно, таблицами точных и предельных (при больших объемах выборок) распределений статистик этих критериев и их процентных точек [1, 3, 20] можно пользоваться при любых непрерывных функциях распределения результатов наблюдений.

Каким из непараметрических критериев пользоваться? Как известно [21], для выбора одного из нескольких критериев необходимо сравнить их мощности, определяемые видом альтернативных гипотез. Сравнению мощностей критериев посвящена обширная литература.

Хорошо изучены свойства критериев при альтернативной гипотезе сдвига:

$$H_{1c}\colon G(x) = F(x - d),\ d \neq 0.$$

Критерии Вилкоксона, Ван-дер-Вардена и ряд других ориентированы для применения именно в этой ситуации. Если m раз измеряют характеристику одного объекта и n раз — другого, а функция распределения погрешностей измерения произвольна, но не меняется при переходе от объекта к объекту (это более жесткое требование, чем условие равенства дисперсий), то рассмотрение гипотезы H_{1c} оправдано. Однако в большинстве организационно-экономических, технических, медицинских и иных исследований нет оснований считать, что функции распределения, соответствующие выборкам, различаются только сдвигом.

2.4. ДВУХВЫБОРОЧНЫЙ КРИТЕРИЙ ВИЛКОКСОНА

Рассмотрим подробнее часто используемый непараметрический критерий Вилкоксона. В частности, покажем (и это основной теоретический результат настоящего раздела), что двухвыборочный критерий Вилкоксона (в литературе его называют также критерием Манна — Уитни) предназначен для проверки гипотезы:

$$H_0: P(X < Y) = 1/2,$$

где X — случайная величина, распределенная как элементы первой выборки, а Y — случайная величина, распределенная как элементы второй выборки. Это непараметрическая гипотеза. Но из нее не следует, что функции распределения двух выборок совпадают. Обратное, конечно, верно: если X и Y одинаково распределены, то $P(X < Y) = 1/2$.

В описанной выше вероятностной модели двух независимых выборок без ограничения общности можно считать, что объем первой из них не превосходит объема второй, $m \le n$, в противном случае выборки можно поменять местами. Обычно предполагается, что функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны и строго возрастают. Из непрерывности этих функций следует, что с вероятностью 1 все $m + n$ результатов наблюдений различны. При рассмотрении реальных статистических данных иногда наблюдаются совпадения результатов наблюдений, но сам факт их наличия — свидетельство нарушений предпосылок только что описанной базовой математической модели. Разработаны модели анализа совпадений при расчете непараметрических ранговых статистик [22].

Расчет значения статистики критерия Вилкоксона и правило принятия решений. Статистика S двухвыборочного критерия Вилкоксона определяется следующим образом. Все элементы объединенной выборки $X_1, X_2, \ldots, X_m$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ упорядочиваются в порядке возрастания. Элементы первой выборки $X_1, X_2, \ldots, X_m$ занимают в общем вариационном ряду места с номерами R_1, $R_2, \ldots, R_m$, другими словами, имеют ранги $R_1, R_2, \ldots, R_m$ (напомним, что ранг — это номер в упорядоченном ряду). Тогда статистика Вилкоксона — это сумма рангов элементов первой выборки:

$$S = R_1 + R_2 + \ldots + R_m.$$

Статистика U Манна — Уитни определяется как число пар (X_i, Y_j), таких, что $X_i < Y_j$, среди всех mn пар, в которых первый элемент — из первой выборки, а второй — из второй.

Как известно [19, с. 160]:

$$U = mn + m(m + 1) / 2 - S.$$

Поскольку S и U линейно связаны, то обычно говорят не о двух критериях: Вилкоксона и Манна — Уитни, а об одном — критерии Вилкоксона (Манна — Уитни) или, короче, о критерии Вилкоксона.

Критерий Вилкоксона — один из самых известных инструментов непараметрической статистики (наряду с критериями на основе статистик типа Колмогорова — Смирнова, омега-квадрат и коэффициентами ранговой корреляции). Свойствам этого критерия и таблицам его критических значений уделяется место во многих монографиях по математической и прикладной статистике (см., например, [1, 3, 19, 20]).

Однако в литературе имеются и неточные утверждения относительно возможностей критерия Вилкоксона. Так, отдельные авторы полагают, что с его помощью можно обнаружить любое различие между функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$. По мнению других, этот критерий нацелен на проверку равенства медиан распределений, соответствующих выборкам. И то, и другое неверно. Это будет ясно из дальнейшего изложения.

Введем некоторые обозначения. Пусть $F^{-1}(t)$ — функция, обратная к функции распределения $F(x)$. Она определена на отрезке [0; 1]. Положим $L(t) = G(F^{-1}(t))$. Поскольку $F(x)$ непрерывна и строго возрастает, то $F^{-1}(t)$ и $L(t)$ обладают теми же свойствами. Важную роль в дальнейшем изложении будет играть величина $a = P(X < Y)$. Как нетрудно показать,

$$a = P(X < Y) = \int_0^1 t dL(t).$$

Введем также параметры:

$$b^2 = \int_0^1 L^2(t)dt - (1-a)^2, \quad g^2 = \int_0^1 t^2 dL(t) - a^2.$$

Тогда математические ожидания и дисперсии статистик Вилкоксона и Манна — Уитни согласно [19, с. 160] выражаются через введенные величины:

$$M(U) = mna, M(S) = mn + m(m + 1) / 2 - M(U) = mn(1 - a) + m(m + 1) / 2;$$

$$D(S) = D(U) = mn\,[(n-1)b^2 + (m-1)\,g^2 + a(1-a)]. \qquad (2.9)$$

Когда объемы обеих выборок безгранично растут, распределения статистик Вилкоксона и Манна — Уитни являются асимптотически нормальными (см., например, [19, гл. 5 и 6]) с параметрами, задаваемыми формулами (2.9).

Если выборки полностью однородны, т. е. их функции распределения совпадают, другими словами, справедлива гипотеза:

$$H_0\colon F(x) = G(x) \text{ при всех } x, \qquad (2.10)$$

то $L(t) = t$ для t из отрезка [0, 1], $L(t) = 0$ для всех отрицательных t и $L(t) = 1$ для $t > 1$, соответственно, $a = 1/2$. Подставляя в формулы (2.9), получаем, что

$$M(S) = m(m+n+1)\,/\,2,\; D(S) = mn(m+n+1)\,/\,12. \qquad (2.11).$$

Следовательно, распределение нормированной и центрированной статистики Вилкоксона:

$$T = (S - m(m+n+1)\,/\,2)(mn(m+n+1)\,/\,12)^{-1/2} \qquad (2.12)$$

при росте объемов выборок приближается к стандартному нормальному распределению (с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1).

Из асимптотической нормальности статистики T следует, что при больших объемах выборок правило принятия решения для критерия Вилкоксона выглядит так:

– если $|T| \le \Phi^{-1}(1 - \alpha\,/\,2)$, то гипотеза (2.10) однородности (тождества) функций распределений принимается на уровне значимости α;

– если же $|T| > \Phi^{-1}(1 - \alpha\,/\,2)$, то гипотеза (2.10) однородности (тождества) функций распределений отклоняется на уровне значимости α.

В прикладной статистике наиболее часто применяется уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Тогда значение модуля нормированной и центрированной статистики T Вилкоксона надо сравнивать с граничным значением $\Phi^{-1}(1 - \alpha\,/\,2) = 1{,}96$.

Пример 1. Пусть даны две выборки. Первая содержит $m = 12$ элементов: 17; 22; 3; 5; 15; 2; 0; 7; 13; 97; 66; 14. Вторая содержит $n = 14$ элементов: 47; 30; 2; 15; 1; 21; 25; 7; 44; 29; 33; 11; 6; 15. Проведем проверку однородности функций распределения двух выборок с помощью критерия Вилкоксона.

Первым шагом является построение общего вариационного ряда для элементов двух выборок (табл. 2.2). Общий вариационный ряд — в средней строке. Ниже для каждого его элемента указано, из какой выборки он взят. Построение верхней строки «Ранги» описано далее.

Таблица 2.2

Общий вариационный ряд для элементов двух выборок

Ранги	1	2	3,5	3,5	5	6	7	8,5	8,5	10	11	12	14
Элементы выборок	0	1	2	2	3	5	6	7	7	11	13	14	15
Номера выборок	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	1
Ранги	14	14	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Элементы выборок	15	15	17	21	22	25	29	30	33	44	47	66	97
Номера выборок	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	1	1

Хотя с точки зрения теории математической статистики вероятность совпадения двух элементов выборок равна 0, в реальных выборках статистических данных совпадения встречаются. Так, в рассматриваемых выборках, как видно из табл. 2.2, два раза повторяется величина 2, два раза — величина 7 и три раза — величина 15. В таких случаях говорят о наличии «связанных рангов», а соответствующим совпадающим величинам приписывают среднее арифметическое тех рангов, которые они занимают (т. е. среднее арифметическое номеров тех мест, которые они занимают в общем вариационном ряду). Так, величины 2 (из первой выборки) и 2 (из второй выборки) занимают в объединенном вариационном ряду места 3 и 4, поэтому им приписывается ранг (3 + 4) / 2 = 3,5. Величины 7 и 7 занимают в объединенном вариационном ряду места 8 и 9, поэтому им приписывается ранг (8 + 9) / 2 = 8,5. Величины 15, 15 и 15 занимают в объединенном вариационном ряду места 13, 14 и 15, поэтому им приписывается ранг (13 + 14 + 15) / 3 = 14.

Таким образом, после построения объединенного вариационного ряда выделяют группы «связанных рангов» и проводят описанные выше расчеты. В итоге получают строку «Ранги».

Следующий шаг — подсчет значения статистики Вилкоксона, т. е. суммы рангов элементов первой выборки:

$$S = R_1 + R_2 + \ldots + R_m = 1 + 3{,}5 + 5 + 6 + 8{,}5 + 11 + 12 +$$
$$+ 14 + 16 + 18 + 25 + 26 = 146.$$

Подсчитаем также сумму рангов элементов второй выборки:

$$S_1 = 2 + 3{,}5 + 7 + 8{,}5 + 10 + 14 + 14 + 17 +$$
$$+ 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 = 205.$$

Величина S_1 может быть использована для контроля вычислений. Дело в том, что суммы рангов элементов первой выборки S и второй выборки S_1 вместе составляют сумму рангов объединенной выборки, т. е. сумму всех натуральных чисел от 1 до $m + n$. Следовательно,

$$S + S_1 = (m + n)(m + n + 1) / 2 = (12 + 14) \times (12 + 14 + 1) / 2 = 351.$$

В соответствии с ранее проведенными расчетами $S + S_1 = 146 + 205 = 351$. Необходимое условие правильности расчетов выполнено. Ясно, что справедливость этого условия не гарантирует правильности расчетов.

Перейдем к расчету статистики T. Согласно формуле (2.11):

$$M(S) = 12 \times (12 + 14 + 1) / 2 = 162, D(S) = 12 \times 14(12 + 14 + 1) / 12 = 378.$$

Следовательно,

$$T = (S - 162) \times (378)^{-1/2} = (146 - 162) / 19{,}44 = -0{,}82.$$

Поскольку $|T| \leq 1{,}96$, то гипотеза однородности принимается на уровне значимости 0,05.

Что будет, если поменять выборки местами, вторую назвать первой? Тогда вместо S надо рассматривать S_1. Имеем:

$$M(S_1) = 14 \times (12 + 14 + 1) / 2 = 189, D(S) = D(S_1) = 378;$$

$$T_1 = (S_1 - 189) \times (378)^{-1/2} = (205 - 189) / 19{,}44 = 0{,}82.$$

Таким образом, значения статистики критерия отличаются только знаком (можно показать, что это утверждение верно всегда). Поскольку в правиле принятия решения используется только абсолютная величина статистики, то принимаемое решение не зависит от того, какую выборку считаем первой, а какую второй. Для уменьшения объема таблиц критических значений принято считать первой выборку меньшего объема.

Мощность критерия Вилкоксона. Продолжим обсуждение критерия Вилкоксона. Правила принятия решений и таблицы критических значений для критерия Вилкоксона строятся в предположении справедливости гипотезы полной однородности, описываемой формулой (2.10). А что будет, если эта гипотеза неверна? Другими словами, какова мощность критерия Вилкоксона?

Пусть объемы выборок достаточно велики, так что можно пользоваться асимптотической нормальностью статистики Вилкоксона. Тогда в соответствии с формулами (2.9) статистика T будет асимптотически нормальна с параметрами:

$$M(T) = (12mn)^{1/2} \times (1/2 - a)\,(m + n + 1)^{-1/2};$$

$$D(T) = 12[(n-1)b^2 + (m-1)g^2 + a(1-a)] \times (m + n + 1)^{-1}. \qquad (2.13)$$

Из формул (2.13) видно большое значение гипотезы:

$$H_{01}\colon a = P(X < Y) = 1/2. \qquad (2.14)$$

Если эта гипотеза неверна, то, поскольку $m \le n$, справедлива оценка:

$$|M(T)| \ge (12mn(2n+1)^{-1})^{1/2} \times |1/2 - a|,$$

а потому $|M(T)|$ безгранично растет при росте объемов выборок. В то же время, поскольку

$$b^2 \le \int_0^1 L^2(t)dt \le 1, \quad g^2 \le \int_0^1 t^2 dL(t) \le 1, \quad \alpha(1-\alpha) \le 1/4,$$

то

$$D(T) \le 12[(n-1) + (m-1) + 1/4] \times (m + n + 1)^{-1} \le 12. \qquad (2.15)$$

Следовательно, вероятность отклонения гипотезы H_{01}, когда она неверна, т. е. мощность критерия Вилкоксона как критерия проверки гипотезы (2.14), стремится к 1 при возрастании объемов выборок, т. е. критерий Вилкоксона является состоятельным для этой гипотезы при альтернативе:

$$AH_{01}\colon a = P(X < Y) \ne 1/2. \qquad (2.16).$$

Если же гипотеза (2.14) верна, то статистика T асимптотически нормальна с математическим ожиданием 0 и дисперсией, определяемой формулой:

$$D(T) = 12[(n-1)b^2 + (m-1)g^2 + 1/4] \times (m+n+1)^{-1}. \tag{2.17}$$

Гипотеза (2.14) является сложной, дисперсия (2.17), как показывают приводимые ниже примеры, в зависимости от значений b^2 и g^2 может быть как больше 1, так и меньше 1, но согласно неравенству (2.15) никогда не превосходит 12.

Критерий Вилкоксона не позволяет проверять абсолютную однородность. Приведем пример двух функций распределения $F(x)$ и $G(x)$, таких, что гипотеза (2.14) выполнена, а гипотеза (2.10) — нет. Поскольку

$$a = P(X < Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dG(x),\ 1 - a = P(Y < X) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dF(x) \tag{2.18}$$

и $a = 1/2$ в случае справедливости гипотезы (2.10), то для выполнения условия (2.14) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - G(x))dF(x) = 0, \tag{2.19}$$

а потому естественно в качестве $F(x)$ рассмотреть функцию равномерного распределения на интервале (–1; 1). Тогда формула (2.19) переходит в условие:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - G(x))dF(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left(G(x) - \frac{(x+1)}{2}\right)dx = 0.$$

Это условие выполняется, если функция $(G(x) - (x + 1) / 2)$ является нечетной.

Пример 2. Пусть функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ сосредоточены на интервале (–1; 1), на котором

$$F(x) = (x + 1) / 2,\ G(x) = (x + 1 + 1 / \pi \times \sin\pi x) / 2.$$

Тогда:

$$x = F^{-1}(t) = 2t - 1;$$

$L(t) = G(F^{-1}(t)) = (2t + 1 / \pi \times \sin\pi(2t - 1)) / 2 = t + 1 / 2\pi \times \sin\pi(2t - 1).$

Условие (2.19) выполнено, поскольку функция $(G(x) - (x + 1) / 2)$ является нечетной. Следовательно, $a = 1/2$. Начнем с вычисления:

$$g^2 = \int_0^1 t^2 dL(t) \; - 1/4 = \int_0^1 t^2 d(t + \frac{1}{2\pi}\sin\pi(2t-1)) - \frac{1}{4}.$$

Поскольку

$$d(t + \frac{1}{2\pi}\sin\pi(2t-1)) = (1 + \cos\pi(2t-1))dt,$$

то

$$g^2 = \int_0^1 t^2 (1 + \cos\pi(2t-1))dt - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \int_0^1 t^2 \cos\pi(2t-1)dt.$$

С помощью замены переменных $t = (x + 1) / 2$ получаем:

$$\int_0^1 t^2 \cos\pi(2t-1)dt = \frac{1}{8}\left(\int_{-1}^1 x^2 \cos\pi x dx + 2\int_{-1}^1 x\cos\pi x dx + \int_{-1}^1 \cos\pi x dx\right).$$

В правой части последнего равенства стоят табличные интегралы (см., например, справочник [23, с. 71]). Проведя соответствующие вычисления, получаем, что в правой части стоит $1 / 8 \times (-4 / \pi^2) = -1 / (2\pi^2)$. Следовательно,

$$g^2 = 1 / 12 - 1 / (2\pi^2) = 0{,}032672733\ldots$$

Перейдем к вычислению b^2. Поскольку

$$b^2 = \int_0^1 L^2(t)dt - \frac{1}{4} = \int_0^1 \left(t + \frac{1}{2}\pi\sin\pi(2t-1)\right)^2 dt - \frac{1}{4},$$

то

$$b^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 (t\sin\pi(2t-1))dt + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^1 \sin^2\pi(2t-1)dt.$$

С помощью замены переменных $t = (x + 1) / 2$ переходим к табличным интегралам (см., например, справочник [23, с. 65]):

$$b^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} x \sin \pi x dx + \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} \sin \pi x dx + \frac{1}{8\pi^2}\int_{-1}^{1} \sin^2 \pi x dx.$$

Проведя необходимые вычисления, получим, что

$$b^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 0 + \frac{1}{8\pi^2} = \frac{1}{12} - \frac{3}{8\pi^2} = 0{,}045337893...$$

Следовательно, для рассматриваемых функций распределения нормированная и центрированная статистика Вилкоксона (см. формулу (2.12)) асимптотически нормальна с математическим ожиданием 0 и дисперсией (см. формулу (2.17)):

$$D(T) = (0{,}544n + 0{,}392m + 2{,}064) \times (m + n + 1)^{-1}.$$

Как легко видеть, дисперсия всегда меньше 1. Это значит, что в рассматриваемом случае гипотеза полной однородности (2.10) при проверке с помощью критерия Вилкоксона будет приниматься чаще, чем если она на самом деле верна.

Сказанное означает, что критерий Вилкоксона нельзя считать критерием для проверки гипотезы (2.10) при альтернативе общего вида. Он не всегда позволяет проверить однородность — не при всех альтернативах. Точно так же критерии типа хи-квадрат нельзя считать критериями проверки гипотез согласия и однородности в случае непрерывных распределений: они позволяют обнаружить не все различия, поскольку некоторые из них «скрадывает» группировка.

Критерий Вилкоксона не позволяет проверять равенство медиан. Обсудим теперь, действительно ли критерий Вилкоксона нацелен на проверку равенства медиан распределений, соответствующих выборкам.

Пример 3. Построим семейство пар функций распределения $F(x)$ и $G(x)$, таких, что их медианы различны, но для $F(x)$ и $G(x)$ выполнена гипотеза (2.14). Пусть распределения сосредоточены на интервале (0; 1), и на нем $G(x) = x$, а $F(x)$ имеет кусочно-линейный график с вершинами в точках (0; 0), (λ, 1/2), (δ, 3/4), (1; 1).

Следовательно,

$$F(x) = 0 \text{ при } x < 0;$$

$$F(x) = x \,/\, (2\lambda) \text{ на } [0;\ \lambda);$$

$$F(x) = 1/2 + (x - \lambda) \,/\, (4\delta - 4\lambda) \text{ на } [\lambda;\ \delta);$$

$$F(x) = 3/4 + (x - \delta) \,/\, (4 - 4\delta) \text{ на } [\delta;\ 1];$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x > 1.$$

Очевидно, что медиана $F(x)$ равна λ, а медиана $G(x)$ — 1/2.

Согласно соотношению (2.17) для выполнения гипотезы (2.14) достаточно определить δ как функцию λ, т. е. $\delta = \delta(\lambda)$, из условия:

$$\int_0^1 F(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Вычисления дают:

$$\delta = \delta(\lambda) = 3(1 - \lambda) \,/\, 2.$$

Учитывая, что δ лежит между λ и 1, не совпадая ни с тем, ни с другим, получаем ограничения на λ, а именно $1/3 < \lambda < 3/5$. Итак, построено искомое семейство пар функций распределения.

Пример 4. Пусть, как и в примере 3, распределения сосредоточены на интервале (0; 1), и на нем $F(x) = x$, а $G(x)$ — функция распределения, сосредоточенного в двух точках — β и 1. То есть $G(x) = 0$ при x, не превосходящем β; $G(x) = h$ на $(\beta;\ 1]$; $G(x) = 1$ при $x > 1$. С такой функцией $G(x)$ легко проводить расчеты. Однако она не удовлетворяет принятым выше условиям непрерывности и строгого возрастания. Вместе с тем легко видеть, что она является предельной (сходимость в каждой точке отрезка [0; 1]) для последовательности функций распределения, удовлетворяющих этим условиям. А распределение статистики Вилкоксона для пары функций распределения примера 4 является предельным для последовательности соответствующих распределений статистики Вилкоксона, полученных в рассматриваемых условиях непрерывности и строгого возрастания.

Условие $P(X < Y) = 1/2$ выполнено, если $h = (1 - \beta)^{-1} / 2$ (при β из отрезка [0; 1/2]). Поскольку $h > 1/2$ при положительном β, то очевидно, что медиана $G(x)$ равна β, в то время как медиана $F(x)$ равна 1/2. Значит, при $\beta = 1/2$ медианы совпадают, при всех иных положительных β — различны. При $\beta = 0$ медианой $G(x)$ является любая точка из отрезка [0; 1].

Легко подсчитать, что в условиях примера 4 параметры предельного распределения имеют вид:

$$b^2 = \beta(1 - \beta)^{-1} / 4\ ,\ g^2 = (1 - 2\beta) / 4.$$

Следовательно, распределение нормированной и центрированной статистики Вилкоксона будет асимптотически нормальным с математическим ожиданием 0 и дисперсией:

$$D(T) = 3[(n - 1) \times \beta(1 - \beta)^{-1} + (m - 1) \times (1 - 2\beta) + 1] \times (m + n + 1)^{-1}.$$

Проанализируем величину $D(T)$ в зависимости от параметра β и объемов выборок m и n. При достаточно больших m и n:

$$D(T) = 3w\beta(1 - \beta)^{-1} + 3(1 - w) \times (1 - 2\beta)$$

с точностью до величин порядка $(m + n)^{-1}$, где $w = n / (m + n)$. Значит, $D(T)$ — линейная функция от w, а потому достигает экстремальных значений на границах интервала изменения w, т. е. при $w = 0$ и $w = 1$. Легко видеть, что при $\beta(1 - \beta)^{-1} < 1 - 2\beta$ минимум равен $3\beta(1 - \beta)^{-1}$ (при $w = 1$), а максимум равен $3(1 - 2\beta)$ (при $w = 0$). В случае $\beta(1 - \beta)^{-1} > 1 - 2\beta$ максимум равен $3\beta(1 - \beta)^{-1}$ (при $w = 1$), а минимум равен $3(1 - 2\beta)$ (при $w = 0$). Если же $\beta(1 - \beta)^{-1} = 1 - 2\beta$ (это равенство справедливо при $\beta = \beta_0 = 1 - 2^{-1/2} = 0{,}293$), то $D(T) = 3(2^{1/2} - 1) =$ $= 1{,}2426\ldots$ при всех w из отрезка [0; 1].

Первый из описанных выше случаев имеет место при $\beta < \beta_0$. При этом минимум $D(T)$ возрастает от 0 (при $\beta = 0$, $w = 1$ — предельный случай) до $3(2^{1/2} - 1)$ (при $\beta = \beta_0$, w — любом), а максимум уменьшается от 3 (при $\beta = 0$, $w = 0$ — предельный случай) до $3(2^{1/2} - 1)$ (при $\beta = \beta_0$, w — любом). Второй случай относится к β из интервала (β_0; 1/2]. При этом минимум убывает от приведенного выше значения для $\beta = \beta_0$ до 0 (при $\beta = 1/2$, $w = 0$ — предельный случай), а максимум возрастает от того же значения при $\beta = \beta_0$ до 3 (при $\beta = 1/2$, $w = 0$).

Таким образом, $D(T)$ может принимать все значения из интервала (0; 3) в зависимости от значений β и w. Если $D(T) < 1$, то при применении критерия Вилкоксона к выборкам с рассматриваемыми функциями распределения гипотеза однородности (2.10) будет приниматься чаще (при соответствующих значениях β и w — с вероятностью, сколь угодно близкой к 1), чем если бы она на самом деле была верна. Если $1 < D(T) < 3$, то гипотеза (2.10) также принимается достаточно часто. Так, если уровень значимости критерия Вилкоксона равен 0,05, то (асимптотическая) критическая область этого критерия, как показано выше, имеет вид $\{T: |T| \geq 1{,}96\}$. Если самый плохой случай — $D(T) = 3$, то гипотеза (2.10) принимается с вероятностью 0,7422.

Гипотеза сдвига. При проверке гипотезы однородности мы рассмотрели различные виды нулевых и альтернативных гипотез: гипотезу (2.10) и ее отрицание в качестве альтернативы, гипотезу (2.14) и ее отрицание, гипотезы о равенстве или различии медиан. В теоретических работах по математической статистике часто рассматривают гипотезу сдвига, в которой альтернативой гипотезе (2.10) является гипотеза:

$$H_1: F(x) = G(x + r) \tag{2.20}$$

при всех x и некотором сдвиге r, отличном от 0. Если верна альтернативная гипотеза H_1, то вероятность $P(X < Y)$ отлична от 1/2, а потому при альтернативе (2.20) критерий Вилкоксона является состоятельным.

В некоторых прикладных постановках гипотеза (2.20) представляется естественной. Например, если одним и тем же прибором проводятся две серии измерений двух значений некоторой величины (физической, химической и т. п.). При этом функция распределения $G(x)$ описывает погрешности измерения одного значения, а $G(x + r)$ — другого. Вопреки распространенному заблуждению, хорошо известно, что распределение погрешностей измерений, как правило, не является нормальным (см. об этом [1, гл. 5.1], [11, гл. 4.1]). Однако при анализе подавляющего большинства конкретных статистических данных, как правило, нет никаких оснований считать, что отсутствие однородности всегда выражается столь однозначным образом, как следует из формулы (2.20). Поэтому для проверки однородности необходимо использовать статистические критерии, состоятельные против любого отклонения от гипотезы однородности (2.10), а не только против альтернативы сдвига.

Почему же математики так любят гипотезу сдвига (2.20)? Да потому, что она дает возможность доказывать глубокие математические результаты, например об асимптотической оптимальности критериев [24]. К сожалению, с точки зрения эконометрики и организационно-экономического моделирования это напоминает поиск ключей под фонарем, где светло, а не в кустах, где они потеряны.

Отметим еще одно обстоятельство. Часто говорят (в соответствии с классическим подходом математической статистики), что нельзя проверять нулевые гипотезы без рассмотрения альтернативных. Однако при анализе данных, полученных в ходе организационно-экономических, технических, медицинских или иных исследований, зачастую полностью ясна формулировка той гипотезы, которую желательно проверить (например, гипотезы абсолютной (иногда говорят, полной) однородности — см. формулу (2.10)), в то время как формулировка альтернативной гипотезы неочевидна. То ли это гипотеза о неверности равенства (2.10) хотя бы для одного значения x, то ли это альтернатива (2.16), то ли альтернатива сдвига (2.20) и т. д. В таких случаях целесообразно «обернуть» задачу: исходя из статистического критерия найти альтернативы, относительно которых он состоятелен. Именно это и проделано в настоящем разделе для критерия Вилкоксона.

Подведем итоги рассмотрения критерия Вилкоксона [25]:

1. Критерий Вилкоксона (Манна — Уитни) является одним из самых распространенных непараметрических ранговых критериев, используемых для проверки однородности двух выборок. Его значение не меняется при любом монотонном преобразовании шкалы измерения (т. е. он пригоден для статистического анализа данных, измеренных в порядковой шкале (см. гл. 6)).

2. Распределение статистики критерия Вилкоксона определяется функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ и объемами m и n двух выборок. При больших объемах выборок распределение статистики Вилкоксона является асимптотически нормальным с параметрами, выписанными выше (см. формулы (2.9), (2.11) и (2.13)).

3. При альтернативной гипотезе, когда функции распределения выборок $F(x)$ и $G(x)$ не совпадают, распределение статистики Вилкоксона зависит от величины $a = P(X < Y)$. Если a отличается от 1/2, то мощность критерия Вилкоксона стремится к 1, и он отличает нулевую гипотезу $F \equiv G$ от альтернативной. Если же $a = 1/2$, то это не всегда имеет место. В примере 2 приведены две различные функции распределения выборок $F(x)$ и $G(x)$, такие, что гипотеза однородности $F \equiv G$ при проверке с помощью критерия Вилкоксона будет приниматься чаще, чем если бы она на самом деле была верна.

4. Следовательно, в случае общей альтернативы критерий Вилкоксона не является состоятельным, т. е. не всегда позволяет обнаружить различие функ-

ций распределения. Однако это не лишает его практической ценности, точно так же как несостоятельность критериев типа хи-квадрат при проверке согласия, независимости или однородности не мешает отклонять нулевую гипотезу во многих практически важных случаях. Однако принятие нулевой гипотезы с помощью критерия Вилкоксона может означать не совпадение F и G, а всего лишь выполнение равенства $a = 1/2$.

5. Иногда утверждают, что с помощью критерия Вилкоксона можно проверять равенство медиан функций распределения F и G. Это не так. В примерах 3 и 4 указаны функции распределения F и G с $a = 1/2$, но с различными медианами. Во многих случаях это различие нельзя обнаружить с помощью критерия Вилкоксона, как это показано при численном анализе асимптотической дисперсии в примере 4.

6. Указанные выше недостатки критерия Вилкоксона исчезают для специального вида альтернативы — так называемой «альтернативы сдвига» H_1 : $F(x) = G(x + r)$. В этом частном случае при справедливости альтернативной гипотезы мощность стремится к 1, различие медиан также всегда обнаруживается. Однако альтернатива сдвига не всегда естественна. Ее целесообразно принять, если одним и тем же прибором проводятся две серии измерений двух значений некоторой величины (физической, химической и т. п.). При этом функция распределения $G(x)$ описывает результаты измерений (с погрешностями) одного значения, а $F(x) = G(x + r)$ — другого. Другими словами, меняется лишь измеряемое значение, а собственно распределение погрешностей — одно и то же, присущее используемому средству измерения (и обычно описанное в его техническом паспорте). Однако в большинстве прикладных статистических исследований нет никаких оснований считать, что при альтернативе функция распределения второй выборки лишь сдвигается, но не меняется каким-либо иным образом.

7. При всех своих недостатках критерий Вилкоксона прост в применении и часто позволяет обнаруживать различие групп (поскольку оно часто сводится к отличию $a = P(X < Y)$ от 1/2). Приведенные здесь критические замечания не следует понимать как призыв к полному отказу от использования критерия Вилкоксона. Однако для проверки гипотезы однородности в случае альтернативы общего вида можно порекомендовать состоятельные критерии, в частности рассматриваемые в следующем разделе критерии Смирнова и типа омега-квадрат (Лемана — Розенблатта).

8. В литературе по прикладным статистическим методам соседствуют два стиля изложения. Один из них исходит из формулировок нулевой и альтерна-

тивных гипотез (или описания набора гипотез, из которого надо выбрать наиболее адекватную), для проверки которых строятся те или иные критерии. При другом стиле изложения упор делается на алгоритмическое описание критериев для проверки тех или иных гипотез, а об альтернативах даже не упоминается.

Например, в литературе по математической статистике часто говорится, что для проверки нормальности используются критерии асимметрии и эксцесса (они описаны, например, в лучшем справочнике 1960–1980-х гг. [3, табл. 4.7]). Однако эти критерии позволяют проверять некоторые соотношения между моментами распределения, но отнюдь не являются состоятельными критериями нормальности (не все отклонения от нормальности обнаруживают). Впрочем, для прикладной статистики эти критерии большого практического значения не имеют, поскольку заранее известно, что распределения конкретных технических, экономических, медицинских и иных статистических данных, скорее всего, отличны от нормальных.

Так что недостатки критерия Вилкоксона не являются исключением, мощность ряда иных популярных в математической статистике критериев заслуживает тщательного изучения, при этом заранее можно сказать, что зачастую они не позволяют проверять те гипотезы, с которыми традиционно связаны. При применении подобных критериев к анализу реальных данных необходимо тщательно взвешивать их достоинства и недостатки.

В организационно-экономических исследованиях начинать следует с построения вероятностно-статистической модели, формулировки в ее терминах проверяемых гипотез. Лишь на основе подобной модели можно изучить свойства тех или иных методов и алгоритмов обработки данных. За статистическим критерием всегда стоит вероятностно-статистическая модель порождения данных, определяющая его свойства.

2.5. СОСТОЯТЕЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ОДНОРОДНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ВЫБОРОК

В соответствии с методологией организационно-экономического моделирования естественно потребовать, чтобы рекомендуемый для массового использования в управленческих, экономических, технических, медицинских и иных исследованиях критерий однородности был состоятельным. Напомним: это значит, что для любых отличных друг от друга функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ (другими словами, при справедливости альтернативной гипотезы H_1) вероятность отклонения гипотезы H_0 должна стремиться к 1 при увеличении объемов выборок m и n. Из перечисленных выше (в конце разд. 2.3) критериев однородности состоятельными являются только критерии Смирнова и типа омега-квадрат [26].

Проведенное в Институте высоких статистических технологий и эконометрики исследование мощности (методом статистических испытаний) первых четырех из перечисленных выше критериев (при различных вариантах функций распределения $F(x)$ и $G(x)$) подтвердило преимущество критериев Смирнова и омега-квадрат и при малых объемах выборок 6–12. Рассмотрим эти критерии подробнее [15, 16].

Критерий Смирнова однородности двух независимых выборок. Он был предложен членом-корреспондентом АН СССР Н.В. Смирновым в 1939 г. (см. справочник [3]). Единственное ограничение — функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ должны быть непрерывными. Напомним, что согласно Л.Н. Большеву и Н.В. Смирнову [3] значение эмпирической функции распределения в точке x равно доле результатов наблюдений в выборке, меньших x. Критерий Смирнова основан на использовании эмпирических функций распределения $F_m(x)$ и $G_n(x)$, построенных по первой и второй выборкам соответственно. Значение статистики Смирнова:

$$D_{m,\,n} = \sup_x | F_m(x) - G_n(x) |$$

сравнивают с соответствующим критическим значением (см., например, [3]) и по результатам сравнения принимают или отклоняют гипотезу H_0 о совпадении (однородности) функций распределения. Практически значение статистики $D_{m,\,n}$ рекомендуется согласно монографии [3] вычислять по формулам:

$$D^+_{m,n} = \max_{1 \le r \le m}\left[\frac{r}{n} - F_m\left(y'_r\right)\right] = \max_{1 \le s \le n}\left[G_n\left(x'_s\right) - \frac{s-1}{m}\right], \qquad (2.21)$$

$$D^-_{m,n} = \max_{1 \le r \le m}\left[F_m\left(y'_r\right) - \frac{r-1}{n}\right] = \max_{1 \le s \le n}\left[\frac{s}{m} - G_n\left(x'_s\right)\right], \qquad (2.22)$$

$$D_{m,n} = \max(D^+_{m,n}, D^-_{m,n}), \qquad (2.23)$$

где $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_m$ — элементы первой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$, переставленные в порядке возрастания, а $y'_1 < y'_2 < \ldots < y'_n$ — элементы второй выборки

$y_1, y_2, \ldots, y_n$, также переставленные в порядке возрастания. Поскольку функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ предполагаются непрерывными, то вероятность совпадения каких-либо выборочных значений равна 0.

Пример 1. Рассчитаем значение статистики двухвыборочного критерия Смирнова для тех же выборок, для которых в предыдущем разделе было рассчитано значение статистики критерия Вилкоксона. Первая из них содержит $m = 12$ элементов. Переставим их в порядке возрастания $0 < 2 < 3 < 5 < 7 < 13 < < 14 < 15 < 17 < 22 < 66 < 97$. Вторая содержит $n = 14$ элементов. Также переставим их в порядке возрастания $1 < 2 < 6 < 7 < 11 < 15 = 15 < 21 < 25 < 29 < < 30 < 33 < 44 < 47$. Точнее, в порядке неубывания, поскольку два элемента совпадают. С точки зрения теории вероятность совпадения двух элементов равна 0, но из-за неизбежных округлений эта вероятность положительна. Поскольку совпадений мало (как внутри одной выборки, так и для элементов разных выборок), то использование теории, основанной на нулевой вероятности совпадения элементов выборок, является допустимым.

Расчет значений статистик представлен в табл. 2.3 ($D^+_{m,n}$) и 2.4 ($D^-_{m,n}$).

Таблица 2.3

Расчет значения статистики $D^+_{m,n}$

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	$F_m(x)$	r / n	$r / n - F_m(x)$	$G_n(x)$	$(s - 1) / m$	$G_n(x) - (s - 1) / m$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	1	0	–	–	0	0	0
2	1	2	0,083	0,071	–0,012	0	–	–
3	2	1	0,083	–	–	0,071	0,083	–0,012
4	2	2	0,083	0,143	0,06	0,071	–	–
5	3	1	0,167	–	–	0,143	0,167	–0,024
6	5	1	0,25	–	–	0,143	0,25	–0,107
7	6	2	0,333	0,214	–0,119	0,143	–	–
8	7	1	0,333	–	–	0,214	0,333	–0,119
9	7	2	0,333	0,286	–0,047	0,214	–	–
10	11	2	0,417	0,357	–0,06	0,286	–	–
11	13	1	0,417	–	–	0,357	0,417	–0,06
12	14	1	0,5	–	–	0,357	0,5	–0,143
13	15	1	0,583	–	–	0,357	0,583	–0,226

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	$F_m(x)$	r / n	$r / n - F_m(x)$	$G_n(x)$	$(s-1) / m$	$G_n(x) - (s-1) / m$
14	15	2	0,583	0,429	–0,154	0,357	–	–
15	15	2	0,583	0,5	–0,083	0,357	–	–
16	17	1	0,667	–	–	0,5	0,667	–0,167
17	21	2	0,75	0,571	–0,179	0,5	–	–
18	22	1	0,75	–	–	0,571	0,75	–0,179
19	25	2	0,833	0,643	–0,19	0,571	–	–
20	29	2	0,833	0,714	–0,119	0,643	–	–
21	30	2	0,833	0,786	–0,047	0,714	–	–
22	33	2	0,833	0,857	0,024	0,786	–	–
23	44	2	0,833	0,929	0,096	0,857	–	–
24	47	2	0,833	1,0	0,167	0,929	–	–
25	66	1	0,833	–	–	1,0	0,833	0,167
26	97	1	0,917	–	–	1,0	0,917	0,083

Таблица 2.4

Расчет значения статистики $D^{-}_{m,n}$

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	$F_m(x)$	$(r-1) / n$	$F_m(x) - (r-1) / n$	$G_n(x)$	s / m	$s / m - G_n(x)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	1	0	–	–	0	0,083	0,083
2	1	2	0,083	0	0,083	0	–	–
3	2	1	0,083	–	–	0,071	0,167	0,096
4	2	2	0,083	0,071	0,012	0,071	–	–
5	3	1	0,167	–	–	0,143	0,25	0,107
6	5	1	0,25	–	–	0,143	0,333	0,19
7	6	2	0,333	0,143	0,19	0,143	–	–
8	7	1	0,333	–	–	0,214	0,417	0,203
9	7	2	0,333	0,214	0,119	0,214	–	–
10	11	2	0,417	0,286	0,131	0,286	–	–
11	13	1	0,417	–	–	0,357	0,5	0,143
12	14	1	0,5	–	–	0,357	0,583	0,226
13	15	1	0,583	–	–	0,357	0,667	0,31

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	$F_m(x)$	$(r-1)/n$	$F_m(x) - (r-1)/n$	$G_n(x)$	s/m	$s/m - G_n(x)$
14	15	2	0,583	0,357	0,226	0,357	–	–
15	15	2	0,583	0,429	0,154	0,357	–	–
16	17	1	0,667	–	–	0,5	0,75	0,25
17	21	2	0,75	0,5	0,25	0,5	0,833	0,262
18	22	1	0,75	–	–	0,571	–	–
19	25	2	0,833	0,571	0,262	0,571	–	–
20	29	2	0,833	0,643	0,19	0,643	–	–
21	30	2	0,833	0,714	0,119	0,714	–	–
22	33	2	0,833	0,786	0,047	0,786	–	–
23	44	2	0,833	0,857	–0,024	0,857	–	–
24	47	2	0,833	0,929	–0,096	0,929	–	–
25	66	1	0,833	–	–	1,0	0,917	–0,083
26	97	1	0,917	–	–	1,0	1,0	0

Беря максимум по столбцу (6) табл. 2.3, получаем, что $D^+_{m,\,n} = 0{,}167$. Таков же максимум и по столбцу (9), как и должно быть в соответствии с приведенным выше равенством (2.21). Максимум по столбцу (6) табл. 2.4 равен 0,262, в то время как максимум по столбцу (9) той же таблицы есть 0,262, в полном соответствии с (2.22). По формуле (2.23) двухвыборочная статистика Смирнова $D_{m,\,n} = \max(0{,}167;\ 0{,}262) = 0{,}262$.

В табл. 6.5, *а* справочника [3] приведены критические значения для двухвыборочной статистики Смирнова, соответствующие обычно используемым уровням значимости (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Критические значения и истинные уровни значимости для двухвыборочной статистики Смирнова ($m = 12$, $n = 14$)

Номинальный уровень значимости	10 %	5 %	2 %	1 %
Критическое значение (дробь)	39/84	43/84	47/84	52/84
Критическое значение (десятичное число)	0,464	0,512	0,559	0,619
Истинный уровень значимости	8,7	4,4	2,0	0,8

Поскольку полученное по статистическим данным значение меньше критического значения для уровня значимости $\alpha = 0{,}1$, а потому и для всех остальных рассматриваемых уровней значимости, то нет оснований отклонять гипотезу однородности. Как и при использовании критерия Вилкоксона, эффект не обнаружен, нулевую гипотезу абсолютной однородности принимаем.

Разработаны алгоритмы и программы для ЭВМ, позволяющие рассчитывать точные распределения, процентные точки и достигаемый уровень значимости для двухвыборочной статистики Смирнова $D_{m,\,n}$, созданы подробные таблицы (см., например, методику [14], содержащую описание алгоритмов, тексты программ и подробные таблицы).

Однако у критерия Смирнова есть и недостатки. Его распределение сосредоточено в сравнительно небольшом числе точек. Ясно, что принимаемые этой статистикой значения пропорциональны величине $1 / L$, где L — наименьшее общее кратное объемов выборок m и n. Поэтому функция распределения растет большими скачками. Для рассматриваемого примера L — наименьшее общее кратное 12 и 14, т. е. 84. Следовательно, принимаемые статистикой Смирнова значения входят в арифметическую прогрессию с шагом $1 / 84 = 0{,}012$. Именно поэтому критические значения в сборнике [3] приведены в виде дроби со знаменателем $L = 84$.

Кроме того, не удается выдержать заданный уровень значимости. Реальный (другими словами, истинный) уровень значимости может значительно, даже в несколько раз отличаться от номинального (подробному обсуждению неклассического феномена существенного отличия реального уровня значимости от номинального посвящены работа [29] и разд. 2.6).

При больших объемах выборок можно воспользоваться доказанной Н.В. Смирновым в 1939 г. теоремой: в случае совпадения непрерывных функций распределения элементов двух независимых выборок

$$\lim_{m\to\infty,n\to\infty} P\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}D_{m,n} < y\right\} = K(y),$$

где $K(y)$ — функция распределения Колмогорова, заданная формулой:

$$K(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \exp\left\{-2k^2y^2\right\}.$$

Поскольку согласно [3] квантиль порядка 0,9 функции распределения Колмогорова равен 1,224, то критическое значение двухвыборочной статистики Смирнова $D_{m,\,n}$, соответствующее уровню значимости 10 %, при больших объемах выборок имеет вид:

$$1{,}224\sqrt{\frac{m+n}{mn}}\,.$$

При m = 12, n = 14 эта формула дает 0,4815, в то время как точное значение равно 0,464 (см. табл. 2.5). Видим, что приближение удовлетворительное, т. е. рассматриваемые объемы выборок (более 10 элементов) можно считать большими. Для построения правил принятия решений на основе значений двухвыборочной статистики Смирнова, соответствующих другим уровням значимости, можно воспользоваться небольшой табл. 2.6 квантилей функции распределения Колмогорова, взятой из справочника [3].

Таблица 2.6

Квантили функции распределения Колмогорова

Величина a	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
Квантиль порядка a	1,07275	1,22385	1,35810	1,51743	1,62762

Критерий типа омега-квадрат (Лемана — Розенблатта). Статистика критерия типа омега-квадрат для проверки однородности двух независимых выборок имеет вид:

$$\mathrm{A} = \frac{mn}{m+n}\int_{-\infty}^{\infty}(F_m(x) - G_n(x))^2 \times dH_{m+n}(x),$$

где $H_{m+n}(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по объединенной выборке. Легко видеть, что

$$H_{m+n}(x) = \frac{m}{m+n}F_m(x) + \frac{n}{m+n}G_n(x).$$

Статистика A типа омега-квадрат была предложена Э. Леманом в 1951 г., изучена М. Розенблаттом в 1952 г., а затем и другими исследователями. Она зависит лишь от рангов элементов двух выборок в объединенной выборке. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ — первая выборка, $x'_1 < x'_2 < \dots < x'_m$ — соответствующий вариационный ряд, $y_1, y_2, \dots, y_n$ — вторая выборка, $y'_1 < y'_2 < \dots < y'_n$ — вариационный ряд, соответствующий второй выборке. Поскольку функции распределения независимых выборок непрерывны, то с вероятностью 1 все выборочные значения различны, совпадения отсутствуют. Статистика A представляется в виде (см., например, [3]):

$$A = \frac{1}{mn(m+n)}[m\sum_{i=1}^{m}(r_i - i)^2 + n\sum_{j=1}^{n}(s_j - j)^2] - \frac{4mn-1}{6(m+n)},$$

где r_i — ранг x'_i и s_j — ранг y'_j в общем вариационном ряду, построенном по объединенной выборке.

Правила принятия решений при проверке однородности двух выборок на основе статистик Смирнова и типа омега-квадрат, т. е. таблицы критических значений в зависимости от уровней значимости и объемов значимости, приведены, например, в таблицах [3]. При достаточно больших объемах выборок правило принятия решения формулируется просто: если наблюдаемое значение статистики меньше соответствующего квантиля предельного распределения, гипотеза однородности принимается, в противном случае отклоняется.

Расчет значения статистики A типа омега-квадрат (статистики Лемана — Розенблатта) по тем же данным, по которым были найдены значения статистик критериев Вилкоксона и Смирнова, представлен в табл. 2.7. Суммируя значения в столбце (6), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{12}(r_i - i)^2 = 598.$$

Аналогично получаем с помощью столбца (9):

$$\sum_{j=1}^{14}(s_j - j)^2 = 880.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{12\times 14\times 26}[12\times 598 + 14\times 880] - \frac{4\times 12\times 14 - 1}{6\times 26} =$$
$$= \frac{1}{4368}[7176 + 12320] - \frac{671}{156} = 4{,}4634 - 4{,}3013 = 0{,}1621.$$

Таблица 2.7

Расчет значения статистики *A* Лемана — Розенблатта

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	i	$r_i - i$	$(r_i - i)^2$	j	$s_j - j$	$(s_j - j)^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	1	1	0	0	–	–	–
2	1	2	–	–	–	1	1	1
3	2	1	2	1	1	–	–	–
4	2	2	–	–	–	2	2	4
5	3	1	3	2	4	–	–	–
6	5	1	4	2	4	–	–	–
7	6	2	–	–	–	3	4	16
8	7	1	5	3	9	–	–	–
9	7	2	–	–	–	4	5	25
10	11	2	–	–	–	5	5	25
11	13	1	6	5	25	–	–	–
12	14	1	7	5	25	–	–	–
13	15	1	8	5	25	–	–	–
14	15	2	–	–	–	6	8	64
15	15	2	–	–	–	7	8	64
16	17	1	9	7	49	–	–	–
17	21	2	–	–	–	8	9	81
18	22	1	10	8	64	–	–	–
19	25	2	–	–	–	9	10	100
20	29	2	–	–	–	10	100	100
21	30	2	–	–	–	11	10	100
22	33	2	–	–	–	12	10	100
23	44	2	–	–	–	13	10	100
24	47	2	–	–	–	14	10	100
25	66	1	11	14	196	–	–	–
26	97	1	12	14	196	–	–	–

Известно [1], что

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} P\{A < x) = a_1(x)$$

(в обозначениях [3]), где $a_1(x)$ — предельная функция распределения классической статистики омега-квадрат (Крамера — Мизеса — Смирнова), используемой для проверки согласия эмпирического распределения с заданным теоретическим.

Квантили функции распределения $a_1(x)$ приведены в табл. 2.8. Известно [1–3], что в случае статистики Лемана — Розенблатта предельным распределением можно пользоваться и для выборок умеренного объема (5 и 7, 6 и 7, 7 и 7, 8 и 8 и т. д.). Поскольку наблюдаемое значение A = 0,1621 меньше любого критического значения в табл. 2.8, то гипотезу однородности двух рассматриваемых выборок следует принять.

Таблица 2.8

Квантили предельной функции распределения статистики омега-квадрат (Крамера — Мизеса — Смирнова)

Величина a	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
Квантиль порядка a	0,245	0,347	0,461	0,620	0,743

Рекомендации по выбору критерия однородности. Для критерия типа омега-квадрат (Лемана — Розенблатта) нет выраженного эффекта различия между номинальными и реальными уровнями значимости. Поэтому мы рекомендуем для проверки однородности функций распределения (гипотеза H_0) применять статистику A типа омега-квадрат. Если методическое, табличное или программное обеспечение для статистики Лемана — Розенблатта отсутствует, рекомендуем использовать критерий Смирнова. Для проверки однородности математических ожиданий (гипотеза H'_0) целесообразно применять критерий Крамера — Уэлча. По нашему мнению, статистики Стьюдента, Вилкоксона и др. допустимо использовать лишь в отдельных частных случаях, рассмотренных выше.

Кратко сформулируем некоторые соображения о внедрении современных методов прикладной статистики в практику технических, экономических, медицинских и иных исследований. Даже из проведенного выше разбора лишь одной из типичных статистических задач организационно-экономического моделирования — задачи проверки однородности двух независимых выборок — можно сделать вывод о целесообразности широкого развертывания работ по критическому анализу сложившейся практики статистической обработки данных и по внедрению накопленного арсенала современных методов прикладной статистики. По нашему мнению, широкого внедрения заслуживают, в частности, методы многомерного статистического анализа, планирования эксперимента, статистики объектов нечисловой природы.

Очевидно, рассматриваемые работы должны быть плановыми, организационно оформленными, проводиться мощными самостоятельными организациями и подразделениями. Целесообразно создание службы статистических консультаций в системе научно-исследовательских учреждений и вузов технического, экономического, медицинского профиля, а также в рамках корпораций и промышленных предприятий. Этот инновационный проект подробно разработан в специальной литературе [31, 32].

2.6. РЕАЛЬНЫЕ И НОМИНАЛЬНЫЕ УРОВНИ ЗНАЧИМОСТИ В ЗАДАЧАХ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Во многих монографиях, справочниках и таблицах (например, [1, 33, 34]) при проверке статистических гипотез критические значения статистик указаны для априорно фиксированных (номинальных в терминологии [16, 29]) уровней значимости $\alpha_{\text{İ}}$. В качестве таковых обычно используются значения из тройки чисел 0,01, 0,05, 0,1, к которым иногда добавляют еще несколько: 0,001, 0,005, 0,02 и др.

Однако ясно, что для дискретных статистик (т. е. статистик с дискретными функциями распределения), к которым, в частности, относятся все непараметрические статистические критерии [3, 20], реальные уровни значимости $\alpha_{\text{Đ}}$ могут и не совпадать с номинальными. Под $\alpha_{\text{Đ}}$ понимается максимально возможный уровень значимости дискретной статистики, не превосходящий заданный номинальный $\alpha_{\text{İ}}$ (т. е. при переходе к следующему по величине возможному значению дискретной статистики соответствующий уровень значимости оказывается больше заданного номинального). Поэтому в лучших таблицах [3, 20] для ограниченных объемов выборок (2–100) табулируются точные распределения дискретных статистик. Для каждой конкретной статистики реальный уровень значимости $\alpha_{\text{Đ}}$ — функция от объемов выборок $n = (n_1, \ldots, n_t)$, т. е. $\alpha_{\text{Đ}} = \alpha_{\text{Đ}}(n)$. (Здесь t — число выборок, по которым рассчитывается значение статистики; рассматриваем в основном случай двух выборок, т. е. $t = 2$.)

В одних таблицах приведены $\alpha_{\text{Đ}}$ [3, 20], в других — нет [33–35]. Возникает естественный вопрос: с чем это связано? Либо в работах [33–35] нарушена культура табулирования, либо реальные $\alpha_{\text{Đ}}$ и номинальные $\alpha_{\text{İ}}$ уровни значимости практически совпадают для всех n. Продемонстрируем, что по крайней мере для некоторых статистик выполнено первое из этих двух утверждений.

В качестве примера рассмотрим критерий серий (Вольфовица) проверки однородности двух независимых выборок. Статистика этого критерия V — это число серий, т. е. частей общего вариационного ряда двух выборок, каждая из которых состоит из элементов одной выборки. При справедливости нулевой гипотезы о тождестве функций распределения, соответствующих двум независимым выборкам объемов n_1 и n_2, известно точное распределение [3, табл. 6.7]:

$$P(V = r \mid n_1, n_2) = \begin{cases} \dfrac{2C_{n_1-1}^{k-1} C_{n_2-1}^{k-1}}{C_{n_1+n_2}^{n_1}}, & r = 2k, \\ \dfrac{C_{n_1-1}^{k} C_{n_2-1}^{k-1} + C_{n_1-1}^{k-1} C_{n_2-1}^{k}}{C_{n_1+n_2}^{n_1}}, & r = 2k+1, \end{cases}$$

где $r = 2, 3, \ldots, 2n_1$ при $n_1 = n_2$ и $r = 2, 3, \ldots, 2n_1 + 1$ при $n_1 < n_2$ (без ограничения общности можно принять, что объем первой выборки не превосходит объема второй выборки, т. е. $n_1 \le n_2$).

Несложный расчет для номинального уровня значимости $\alpha_{\text{İ}} = 0{,}05$ показывает, что:

– при $n_1 = n_2 = 6$ реальный уровень значимости $\alpha_{\text{Đ}} = 0{,}0260$;

– при $n_1 = n_2 = 8$ реальный уровень значимости $\alpha_{\text{Đ}} = 0{,}0178$;

– при $n_1 = n_2 = 10$ реальный уровень значимости $\alpha_{\text{Đ}} = 0{,}0370$;

– при $n_1 = n_2 = 12$ реальный уровень значимости $\alpha_{\text{Đ}} = 0{,}0190$.

Таким образом, для рассматриваемых объемов выборок реальный уровень значимости в 2–3 раза меньше, чем номинальный. Это, очевидно, необходимо учитывать при интерпретации результатов анализа реальных статистических данных.

Соотношение реальных (истинных) и номинальных уровней значимости было изучено нами [15, 16] на примере непараметрических критериев проверки однородности двух независимых выборок. В табл. 2.9, построенной в [15] по данным [3, 20, 36], для ряда непараметрических критериев проверки однородности двух независимых выборок приведены реальные уровни значимости $\alpha_{\text{Đ}}(n)$ для номинального уровня значимости $\alpha_{\text{İ}} = 0{,}05$ и объемов выборок $n_1 = n_2 = 6, 8, 10, 12$. *Проанализированы пять критериев:*

1. Двухвыборочный критерий Вилкоксона, являющийся линейной функцией от критерия Манна — Уитни и подробно рассмотренный выше в разд. 2.4.

Напомним, что статистика Вилкоксона S — это сумма рангов элементов первой выборки:

$$S = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n1}$$

в общем вариационном ряду, построенном по объединенной выборке, включающей в себя все элементы обеих выборок (без ограничения общности можно принять, что объем первой выборки не превосходит объема второй выборки, т. е. $n_1 \le n_2$).

2. Критерий Ван-дер-Вардена [3, 36], представляющий собой дальнейшее развитие (модификацию) критерия Вилкоксона и предназначенный для анализа выборок, распределение которых близко к нормальному. Статистика X критерия Ван-дер-Вардена имеет вид:

$$X = \Phi^{-1}\left\{\frac{R_1}{n_1+n_2+1}\right\} + \Phi^{-1}\left\{\frac{R_2}{n_1+n_2+1}\right\} + \ldots + \Phi^{-1}\left\{\frac{R_{n_1}}{n_1+n_2+1}\right\},$$

где $\Phi^{-1}(p)$ есть квантиль порядка p стандартного нормального распределения $\Phi(x)$ с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, т. е. $\Phi^{-1}(p)$ — обратная функция к $\Phi(x)$.

3. Двухвыборочный двухсторонний критерий Смирнова однородности двух независимых выборок, рассмотренный в разд. 2.5. Он основан на использовании разности эмпирических функций распределения $F_{n1}(x)$ и $G_{n2}(x)$, построенных по первой и второй выборкам соответственно. Термин «двухсторонний» означает, что берется супремум модуля этой разности. Статистика двухвыборочного двухстороннего критерия Смирнова:

$$D = D(n_1, n_2) = \sup_x \left|F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x)\right|$$

в случае равенства объемов выборок $n_1 = n_2$ принимает значения, кратные $1 / n_1$, поскольку только такие значения принимают эмпирические функции распределения $F_{n1}(x)$ и $G_{n2}(x)$, а потому рассматриваемая статистика имеет $(n_1 + 1)$ возможных значений.

4. Критерий знаков Z используют в случае равенства объемов выборок $n_1 = n_2$. Статистика этого критерия равна числу положительных разностей $X_k - Y_k$ элементов двух выборок с одинаковыми номерами. При справедливости

нулевой гипотезы статистика Z имеет биномиальное распределение $B(1/2; n_1)$, а потому имеет $(n_1 + 1)$ возможных значений.

5. Критерий серий (Вольфовица) V, о котором шла речь выше в начале настоящего раздела. Число его возможных значений не превосходит $2n_1$.

Таблица 2.9

Реальные уровни значимости $\alpha_{\text{Ð}}(n)$ для $\alpha_{\text{í}} = 0{,}05$

Наименование и обозначение критерия	Объемы выборок $n_1 = n_2$				Примечания и ссылки
	6	8	10	12	
Вилкоксона S	0,0320	0,0400	0,0480	0,0420	[20, с. 280–281], [36, с. 418]
Ван-дер-Вардена X	0,0498	0,0498	0,0500	0,0500	Рассчитано по методике [36, с. 249–250]
Смирнова D	0,0044	0,0372	0,0246	0,0158	[3, с. 412], [20, с. 406–427]
Знаков Z	0,0312	0,0078	0,0214	0,0386	[20, с. 273–274]
Вольфовица (серий) V	0,0260	0,0178	0,0370	0,0190	Рассчитано по методике [3, с. 91–92]

Анализ содержания табл. 2.9 подтверждает предположение о существенности отличия реальных уровней значимости $\alpha_{\text{Ð}}(n)$ от номинальных уровней значимости $\alpha_{\text{í}}$.

Предположим теперь, что, несмотря на установленные отличия, мы используем при проверке гипотезы однородности таблицы [33–35], в которых указаны $\alpha_{\text{í}} > \alpha_{\text{Ð}}$, а не $\alpha_{\text{Ð}}$. Это приводит к снижению мощности критерия по сравнению с соответствующим рандомизированным критерием, обеспечивающим равенство $\alpha_{\text{Ð}}$ и $\alpha_{\text{í}}$.

Разъяснение. Поясним, что такое рандомизированный критерий. Пусть Y — статистика некоторого статистического критерия, принимающая дискретные значения, числа a и b, где $a < b$ — два соседних значения этой статистики, такие, что $P(Y > b) < \alpha_{\text{í}}$ и $P(Y > a) > \alpha_{\text{í}}$ (вероятности взяты в предположении справедливости нулевой гипотезы). Если критическое значение критерия равно b, т. е. нулевая гипотеза принимается при $Y \leq b$, то $\alpha_{\text{Ð}} = P(Y > b) < \alpha_{\text{í}}$. Если же критическое значение равно следующему возможному (при движении в сторону уменьшения) значению a, т. е. нулевая гипотеза принимается при $Y \leq a$, то $\alpha_{\text{Ð}} = P(Y > a) > \alpha_{\text{í}}$. Рандомизированный критерий получим, если при $Y = b$ в некоторой доле p случаев будем принимать нулевую гипотезу, а в остальных случаях — альтернативную. Поскольку

$$P(Y = b) = P(Y > a) - P(Y > b),$$

то (реальный) уровень значимости рандомизированного критерия равен:

$$(1 - p) \times P(Y = b) + P(Y > b) = (1 - p) \times P(Y > a) + pP(Y > b).$$

Ясно, что при соответствующем выборе параметра рандомизации p уровень значимости рандомизированного критерия совпадет с заданным номинальным уровнем $\alpha_{í}$.

Для малых объемов выборок (2–20 элементов) понижение мощности из-за того, что $\alpha_{í} > \alpha_{Ð}$, может быть существенным. Для иллюстрации этого в табл. 2.10 приведены результаты статистического моделирования [37, 38] наиболее употребительных (согласно [3]) критериев проверки однородности двух независимых выборок.

Таблица 2.10

Мощности статистических критериев при $\alpha_{í} = 0{,}05$

Номер эксперимента	**Объем выборок**	**Параметры**				**Мощность *M* статистического критерия**				
	$n_1 = n_2$	m_1	m_2	σ_1^2	σ_2^2	*S*	*V*	*X*	*D*	*t*
1	6	0	1	1	1	0,318	0,006	0,298	0,238	0,396
2	8	0	1	1	1	0,452	0,104	0,426	0,068	0,484
3	10	0	1	1	1	0,520	0,180	0,534	0,116	0,598
4	12	0	1	1	1	0,632	0,076	0,618	0,462	0,682
5	6	0	2	1	1	0,828	0,308	0,808	0,716	0,904
6	8	0	2	1	1	0,958	0,510	0,954	0,458	0,976
7	10	0	2	1	1	0,984	0,704	0,990	0,632	0,988
8	12	0	2	1	1	0,996	0,568	0,996	0,978	0,998

Моделируются выборки одинакового объема из нормальных законов распределения с математическими ожиданиями m_1 и m_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2. Номинальный уровень значимости, определяющий конкретные критические значения для критериев, принят равным $\alpha_i = 0{,}05$. Мощность критерия определяется моделированием $N = 5\ 000$ пар выборок.

При использовании $N = 5\ 000$ моделируемых пар выборок среднее квадратическое отклонение оценок мощности $\sigma_M \le 0{,}0223$ (при $M \ge 0{,}95$ имеем $\sigma_M \le 0{,}01$).

Изучены критерии Вилкоксона S, Вольфовица V, Ван-дер-Вардена X, Смирнова D. Критерий Стьюдента t (см. например, [2]), как равномерно наиболее мощный в классе нормальных законов распределения, приведен для сравнительной оценки мощности рассматриваемых непараметрических критериев. (Моделирование и расчеты, приведенные в настоящем разделе, выполнены Ю.Э. Камнем и Я.Э. Камнем [15].)

Замечание. Приведенные в табл. 2.10 значения мощностей критериев интересны нам с точки зрения обсуждения их зависимости от различия реальных и номинальных уровней значимости. При этом необходимо подчеркнуть, что эти значения зависят от предположений, принятых при моделировании. Так, критерии Вилкоксона и Ван-дер-Вардена «настроены» на использование в случае распределений, близких к нормальному семейству. При проверке гипотезы о совпадении функций распределения двух независимых выборок из логистического распределения с альтернативой сдвига критерий Вилкоксона является асимптотически оптимальным. А в случае выборок из нормального распределения аналогичным свойством обладает критерий Ван-дер-Вардена, причем известно, что семейства нормальных и логистических распределений весьма близки: расстояние Колмогорова между ними не превышает 0,01 (см. по вопросам асимптотической оптимальности непараметрических критериев [24, 39, 40]). Поэтому нет ничего удивительного в том, что мощности критериев Вилкоксона и Ван-дер-Вардена близки к оптимуму в случае нормального распределения — к мощности критерия Стьюдента.

При этом мощности критериев Смирнова и особенно критерия Вольфовица заметно меньше. Однако для выборок из других распределений (например, распределений Вейбулла — Гнеденко или гамма-распределений) ситуация иная: критерий Смирнова, как показывает компьютерное моделирование, оказывается более мощным, чем критерии Вилкоксона и Ван-дер-Вардена. Более того, критерий Смирнова состоятельный, т. е. позволяет отклонить любую конкретную альтернативу (при соответствующих объемах выборок), а критерии Вилкоксона и Ван-дер-Вардена не являются состоятельными, некоторых альтернатив они «не чувствуют» (см. разд. 2.4). Поэтому вполне обоснованной является рекомендация о широком использовании состоятельных критериев Смирнова и типа омега-квадрат (Лемана — Розенблатта), данная в разд. 2.5. Что же касается критерия серий (Вольфовица), то из-за его отрицательных свойств (выраженной дискретности, низкой мощности) он в настоящее время выходит из употребления при анализе реальных данных, несмотря на прозрачность определения.

Рассмотрения настоящего раздела позволяют сделать ***следующие выводы*** [15, 16]:

1. При создании методик и таблиц необходимо соблюдать определенную культуру табулирования. В качестве положительных примеров можно указать работы [3, 20].

2. При малых объемах выборок использовать номинальные уровни значимости $\alpha_{\text{í}}$ вместо реальных уровней значимости $\alpha_{\text{Đ}}$ для дискретных статистик недопустимо.

3. При конечных объемах выборок выбор того или иного критерия с дискретной статистикой должен сопровождаться исследованием влияния варьирования уровня значимости на качественную интерпретацию результатов проверки гипотез. В частности, выбор одного из двух конкурирующих непараметрических критериев K_1 и K_2 прежде всего должен зависеть от априорного выбора исследователем реального уровня значимости $\alpha_{\text{Đ}1}$ или $\alpha_{\text{Đ}2}$, соответствующего первому критерию K_1 или второму K_2, в качестве номинального уровня значимости $\alpha_{\text{í}}$.

Последний вывод демонстрирует сложность сравнения критериев с дискретными статистиками между собой, поскольку точки скачков распределений их статистик не совпадают. Следовательно, в отличие от критериев с непрерывными статистиками нельзя выбрать единый фиксированный уровень значимости и сравнить свойства критериев при этом уровне значимости.

В заключение отметим, что для любого критерия проверки статистических гипотез реальный уровень значимости приближается к номинальному при безграничном возрастании объемов выборок, т. е. $\alpha_{\text{Đ}}(n) \to \alpha_{\text{í}}$ при $\min(n_1, \ldots, n_t) \to \infty$. Поэтому для прикладных исследований значительный интерес представляет определение верхней оценки скорости сходимости $\alpha_{\text{Đ}}(n)$ к $\alpha_{\text{í}}$. Соответствующие теоретические результаты для критериев проверки однородности двух независимых или связанных выборок можно получить, основываясь на оценках скорости сходимости в принципе инвариантности [1, гл. 4]. Некоторые оценки приведены в [29, гл. 2]. Скорость сходимости также может быть оценена методом статистических испытаний (Монте-Карло). Пример подобного исследования подробно рассмотрен в [41, 42] в ходе обсуждения проблем вероятностно-статистического моделирования помех, создаваемых электровозами.

В настоящей главе затронута лишь небольшая часть непараметрических методов анализа числовых статистических данных. В частности, обратим внимание на непараметрические оценки плотности, которые используются для описания данных, проверки однородности, в задачах восстановления зависимостей и других областях эконометрики. Непараметрические оценки плотности рассмотрены в [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов, А.И.* Прикладная статистика / А.И. Орлов. — Москва : Экзамен, 2006. — 671 с.

2. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

3. *Большев, Л.Н.* Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. — Москва : Наука, 1983. — 416 с.

4. *Орлов, А.И.* О проверке однородности связанных выборок / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2016. — № 123. — С. 708–726.

5. *Муравьева, В.С.* Статистический анализ таблиц четырех полей / В.С. Муравьева, А.И Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2021. — № 174. — С. 285–314.

6. *Новиков, Д.А.* Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи) / Д.А. Новиков. — Москва : МЗ-Пресс, 2004. — 67 с.

7. *Орлов, А.И.* О методах проверки однородности двух независимых выборок / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2020. — Т. 86. — № 3. — С. 67–76.

8. *Орлов, А.И.* Система моделей и методов проверки однородности двух независимых выборок / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2020. — № 157. — С. 145–169.

9. *Леман, Э.* Проверка статистических гипотез / Э. Леман. — Москва : Наука, 1979. — 408 с.

10. *Смирнов, Н.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. — 3-е изд., стер. — Москва : Наука, 1969. — 512 с.

11. *Орлов, А.И.* Эконометрика / А.И. Орлов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Экзамен, 2004. — 576 с.

12. *Орлов, А.И.* Распределения реальных статистических данных не являются нормальными / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2016. — № 117. — С. 71–90.

13. *Крамер, Г.* Математические методы статистики / Г. Крамер. — 2-е изд. — Москва : Мир, 1975. — 648 с.

14. *Орлов, А.И.* Проверка статистической гипотезы однородности математических ожиданий двух независимых выборок: критерий Крамера — Уэлча вместо критерия Стьюдента / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 110. — С. 197–218.

15. *Камень, Ю.Э.* Реальные и номинальные уровни значимости в задачах проверки статистических гипотез / Ю.Э. Камень, Я.Э. Камень, А.И. Орлов // Заводская лаборатория. — 1986. — Т. 52. — № 12. — С. 55–57.

16. *Орлов, А.И.* Реальные и номинальные уровни значимости при проверке статистических гипотез / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 114. — С. 42–54.

17. *Орлов, А.И.* Применение метода Монте-Карло при изучении свойств статистических критериев однородности двух независимых выборок / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2019. — № 10(154). — С. 55–83.

18. *Орлов, А.И.* Современное состояние непараметрической статистики / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 106. — С. 239–269.

19. *Гаек, Я.* Теория ранговых критериев / Я. Гаек, З. Шидак. — Москва : Наука, 1971. — 376 с.

20. *Холлендер, М.* Непараметрические методы статистики / М. Холлендер, Д. Вульф. — Москва : Финансы и статистика, 1983. — 518 с.

21. *Боровков, А.А.* Математическая статистика / А.А. Боровков. — Москва : Наука, 1984. — 472 с.

22. *Орлов, А.И.* Модель анализа совпадений при расчете непараметрических ранговых статистик / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2017. — Т. 83. — № 11. — С. 66–72.

23. *Смолянский, М.Л.* Таблицы неопределенных интегралов / М.Л. Смолянский. — Москва : ГИФМЛ, 1961. — 108 с.

24. *Никитин, Я.Ю.* Асимптотическая эффективность непараметрических критериев / Я.Ю. Никитин. — Москва : Наука, 1995. — 240 с.

25. *Орлов, А.И.* Двухвыборочный критерий Вилкоксона — анализ двух мифов / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 104. — С. 91–111.

26. *Орлов, А.И.* Состоятельные критерии проверки абсолютной однородности независимых выборок / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2012. — Т. 78. — № 11. — С. 66–70.

27. *Орлов, А.И.* Непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, омега-квадрат и ошибки при их применении / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 97. — С. 32–45.

28. Методика. Проверка однородности двух выборок параметров продукции при оценке ее технического уровня и качества. — Москва : ВНИИ стандартизации, 1987. — 116 с.

29. *Орлов, А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях / А.И. Орлов. — Москва : Наука, 1979. — 296 с.

30. *Орлов, А.И.* Предельная теория непараметрических статистик / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 100. — С. 31–52.

31. *Орлов, А.И.* О современных проблемах внедрения прикладной статистики и других статистических методов / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. — 1992. — Т. 58. — № 1. — С. 67–74.

32. *Орлов, А.И.* Высокие статистические технологии / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2003. — Т. 69. — № 11. — С. 55–60.

33. *Гублер, Е.В.* Применение критериев непараметрической статистики в медико-биологических исследованиях / Е.В. Гублер, А.А. Генкин. — Ленинград : Медицина, 1973. — 144 с.

34. *Ивченко, Г.И.* Математическая статистика / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. — Москва : Высшая школа, 1984. — 248 с.

35. *Афифи, А.* Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ / А. Афифи, С. Эйзен. — Москва : Мир, 1982. — 488 с.

36. *Ван-дер-Варден, Б.Л.* Математическая статистика / Б.Л. Ван-дер-Варден. — Москва : ИЛ, 1960. — 434 с.

37. *Орлов, А.И.* Взаимосвязь предельных теорем и метода Монте-Карло / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 114. — С. 27–41.

38. *Орлов, А.И.* Компьютерно-статистические методы: состояние и перспективы / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 103. — С. 163–195.

39. *Кендалл, М.Дж.* Статистические выводы и связи / М.Дж. Кендалл, А. Стьюарт. — Москва : Наука, 1973. — 900 с.

40. *Кокс, Д.Р.* Теоретическая статистика / Д.Р. Кокс, Д.В. Хинкли. — Москва : Мир, 1978. — 560 с.

41. *Карякин, Р.Н.* Вероятностная теория высших гармоник помех, создаваемых электровозами / Р.Н. Карякин, А.И. Орлов, С.Ю. Адамов // Прикладной многомерный статистический анализ. Ученые записки по статистике. — Москва : Наука, 1978. — Т. 33. — С. 376–380.

42. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: статистические методы анализа данных : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 843 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Почему непараметрические методы анализа числовых данных предпочтительнее параметрических?

2. По данным табл. 2.1 разд. 2.2 рассчитайте значения статистик хи-квадрат с целью проверки согласия и однородности для распределений дней рождения по знакам зодиака.

3. Укажите доверительные границы для математических ожиданий двух независимых выборок (с доверительной вероятностью 0,95) и проверьте гипотезу о равенстве математических ожиданий с помощью критерия Крамера — Уэлча (на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$):

Номер варианта	m	$\overline{X}$	s_x	n	$\overline{Y}$	s_y
1	100	13,7	7,3	200	12,1	2,5
2	200	10	5,3	400	12	1,7

4. Даны две выборки. Проверьте гипотезу об однородности функций распределения с помощью критерия Вилкоксона (на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$):

Первая выборка	33	27	12	27	39	42	47	48	50	32
Вторая выборка	11	20	30	31	22	18	17	25	28	29

5. Какова роль альтернативных гипотез, в частности гипотезы сдвига, в выборе критерия для проверки нулевой гипотезы?

6. Чем реальный (истинный) уровень значимости отличается от номинального?

7. Как выбрать параметр рандомизации p, чтобы уровень значимости рандомизированного критерия совпал с заданным номинальным уровнем α_{i}?

8. Почему трудно сравнивать между собой статистические критерии проверки гипотез, статистики которых имеют дискретные распределения?

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ, РЕФЕРАТОВ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Скорость сходимости распределений статистик хи-квадрат для проверки согласия и однородности к предельному хи-квадрат распределению.

2. Сравнение двухвыборочных критериев Крамера — Уэлча и Стьюдента.

3. Достоинства и недостатки двухвыборочного критерия Вилкоксона по сравнению с другими непараметрическими критериями однородности.

4. Для данных задачи 4 (табл. 2.11) рассчитайте значения статистик Смирнова и типа омега-квадрат (Лемана — Розенблатта) и проверьте однородность двух независимых выборок.

Примечание. В соответствии с [3] для уровня значимости 0,05 критическим значением для критерия Смирнова является 0,7 (т. е. гипотеза однородности отклоняется, если значение статистики Смирнова не менее 0,7). Для того же уровня значимости критическим значением для критерия типа омега-квадрат является 0,461.

5. Многообразие непараметрических критериев проверки гипотез (по монографиям [3, 19, 20]).

6. Сравнение мощностей непараметрических критериев однородности.

7. Рандомизированные критерии.

8. Подходы к определению асимптотической эффективности непараметрических критериев.

ГЛАВА 3. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Одним из наиболее важных этапов эконометрического моделирования является восстановление (выявление) зависимости между переменными на основе статистических данных, которая затем используется при организационно-экономическом моделировании, в частности для прогнозирования, оптимизации, принятия решений.

3.1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Начнем с задачи точечного и доверительного оценивания линейной функции одной переменной $x(t) = at + b$.

Исходные данные: набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \dots, n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции, курс доллара США, объем месячного производства или размер дневной выручки торговой точки). Предполагается, что переменные связаны линейной зависимостью:

$$x_k = at_k + b + e_k,\ k = 1, 2, \dots, n,$$

где a и b — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость.

Обычно оценивают параметры a и b линейной зависимости методом наименьших квадратов, как показано ниже. Затем восстановленную зависимость используют, например, для точечного и интервального прогнозирования, для решения оптимизационных задач (см., например, прил. 4).

Оценки метода наименьших квадратов. Немецкий математик Ф. Клейн (1849–1925), тщательно изучавший научное наследство своего великого соотечественника К. Гаусса (1777–1855), пишет, что метод наименьших квадратов был разработан К. Гауссом в 1795 г. [1, с. 37]. (Как много позже сказано в [2, с. 181], «Гаусс указывает две даты: 1794 и 1795 г. Современные исследователи склонны считать, что верная дата — это 1794 г.».) Согласно этому методу для расчета наилучшей функции, приближающей линейным образом зависимость x от t, следует рассмотреть функцию двух переменных:

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - at_k - b)^2 .$$

Оценки метода наименьших квадратов — это такие значения a^* и b^*, при которых функция $f(a, b)$ достигает минимума по всем значениям аргументов.

Чтобы найти эти оценки, надо вычислить частные производные от функции $f(a, b)$ по аргументам a и b, приравнять их к 0, затем из полученных уравнений найти оценки. Имеем:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = \sum_{k=1}^{n} 2(x_k - at_k - b)(-t_k);$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = \sum_{k=1}^{n} 2(x_k - at_k - b)(-1).$$

Преобразуем правые части полученных соотношений. Вынесем за знак суммы общие множители 2 и (–1). Затем рассмотрим слагаемые. Раскроем скобки в первом выражении, получим, что каждое слагаемое разбивается на три. Во втором выражении также каждое слагаемое есть сумма трех. Значит, каждая из сумм разбивается на три суммы. Имеем:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = (-2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} t_i\right);$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = (-2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i - bn\right).$$

Приравняем частные производные к 0. Тогда в полученных уравнениях можно сократить множитель (–2). Оценки метода наименьших квадратов находим из системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} t_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i - bn = 0.$$

Запись решения этой системы будет более компактной, если использовать не суммы, а средние арифметические:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{xt} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i t_i, \quad \overline{t^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2.$$

Разделив обе части уравнений на n, перейдем к системе:

$$\overline{xt} - a\overline{t^2} - b\overline{t} = 0;$$
$$\overline{x} - a\overline{t} - b = 0.$$

Из второго уравнения получаем, что

$$b = \overline{x} - a\overline{t}.$$

Подставим в первое уравнение:

$$\overline{xt} - a\overline{t^2} - (\overline{x} - a\overline{t})\overline{t} = 0.$$

Раскрыв скобки, решаем это линейное уравнение с одной переменной a. Получаем оценки метода наименьших квадратов:

$$a^* = \frac{\overline{xt} - \overline{x}\,\overline{t}}{\overline{t^2} - (\overline{t})^2}, \quad b^* = \overline{x} - a^*\overline{t}. \tag{3.1}$$

Следовательно, восстановленная функция имеет вид:

$$x^*(t) = a^*t + b^*.$$

Замечание. С точки зрения теории оптимизации равенство частных производных 0 — необходимое условие минимума, но недостаточное. Однако в силу единственности решения системы линейных уравнений равенства (3.1) дают точку минимума, поскольку существование минимума вытекает из того, что в качестве области определения непрерывной функции $f(a, b)$ может рассматриваться некоторое ограниченное замкнутое множество. Если же имеются априорные ограничения на параметры, то формулы (3.1) не всегда применимы.

Например, пусть $x(t)$ — издержки производства при выпуске продукции объема t. Тогда параметры линейной зависимости имеют экономическую интерпретацию: b — постоянные издержки (вне зависимости от объема производства), a — переменные издержки (на одну единицу выпущенной продукции). Очевидно, постоянные издержки неотрицательны: $b \geq 0$. Однако при расчетах по формулам (3.1) при «неудачных» исходных данных может быть получено значение $b^* < 0$. Очевидно, отрицательным значением постоянных издержек пользоваться нельзя. В таком случае можно порекомендовать принять в исходной модели $b = 0$ и методом наименьших квадратов найти наилучшую оценку единственного параметра — переменных издержек a. Подобная ситуация рассмотрена в прил. 4.

Пример 1 (оценивание по методу наименьших квадратов). Чтобы не отвлекать внимание читателя на содержательную интерпретацию исходных данных и результатов расчетов, рассмотрим условный пример. Пусть даны $n = 6$ пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, 6$, представленных во втором и третьем столбцах табл. 3.1 (строки 1–6). Расчеты по методу наименьших квадратов удобно проводить с помощью таблицы, подобной табл. 3.1, последовательно заполняя ее столбцы либо вручную, либо на компьютере с помощью электронной таблицы Excel или иного программного продукта.

Таблица 3.1

Расчет по методу наименьших квадратов при восстановлении линейной функции одной переменной

i	t_i	x_i	t^2_i	$t_i x_i$	$a^* t_i$	$\overline{x_i}$	$x_i - \overline{x_i}$	$(x_i - \overline{x_i})^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	12	1	12	3,14	12,17	–0,17	0,03
2	3	20	9	60	9,42	18,45	1,55	2,40
3	4	20	16	80	12,56	21,59	–1,59	2,53
4	12	32	49	224	21,98	31,01	0,99	0,98
5	9	35	81	315	28,26	37,29	–2,29	5,24
6	10	42	100	420	31,40	40,43	1,57	2,46
Σ	34	161	256	1 111	–	–	0,06	13,64
$\frac{\Sigma}{n}$	5,67	26,83	42,67	185,17	–	–	–	2,27
–	$\bar{t}$	$\bar{x}$	$\overline{t^2}$	$\overline{xt}$	–	–	–	$(\sigma^2)^*$

В соответствии с формулами (3.1) для вычисления оценок метода наименьших квадратов необходимо рассчитать четыре величины $\bar{t}, \bar{x}, \overline{t^2}, \overline{xt}$. Для получения первых двух из них достаточно найти суммы чисел, представленных во втором и третьем столбцах табл. 3.1. Соответствующие суммы записаны в седьмой строке (обозначена символом Σ), а средние арифметические —

в восьмой строке. Для удобства читателя в девятой строке приведены обозначения средних величин, стоящих строкой выше.

Для расчета двух оставшихся средних заполнены клетки четвертого и пятого столбцов, а затем проведено суммирование по этим столбцам. Все необходимые операции — поэлементное возведение в квадрат, перемножение столбцов, суммирование по столбцам — легко осуществить с помощью электронной таблицы Excel.

Остальные столбцы табл. 3.1 используются ниже при дальнейшем развертывании алгоритмов метода наименьших квадратов.

В соответствии с формулами (3.1) оценки метода наименьших квадратов для приведенных в табл. 3.1 данных таковы:

$$a^* = \frac{185{,}17 - 26{,}83 \times 5{,}67}{42{,}67 - (5{,}67)^2} = \frac{33{,}04}{10{,}52} = 3{,}14, \quad b^* = 26{,}83 - 3{,}14 \times 5{,}67 = 9{,}03,$$

а восстановленная зависимость имеет вид:

$$x^*(t) = 3{,}14t + 9{,}03.$$

Варианты оценок метода наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов рассматривается во многих литературных источниках, и формулы для оценок параметров зачастую имеют различный вид. Однако все они переходят друг в друга в результате тождественных преобразований.

Для развертывания вероятностно-статистической теории нам понадобится другая параметризация линейной зависимости, а именно:

$$x_k = a\,(t_k - \bar{t}) + d + e_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

где a и d — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость. Среднее арифметическое моментов времени $\bar{t}$ введено в модель для облегчения математико-статистических выкладок.

Для оценивания параметров a и d необходимо согласно методу наименьших квадратов минимизировать функцию:

$$F(a,d) = \sum_{k=1}^{n} (x_i - a(t_i - \bar{t}) - d)^2 .$$

Как и раньше, вычисляем частные производные и приравниваем их к 0. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t}) = 0\,, \tag{3.2}$$

уравнения приобретают вид:

$$\sum_{k=1}^{n} x_i(t_i - \bar{t}) - a\sum_{k=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2 = 0\,;$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - dn = 0\,.$$

Следовательно, оценки метода наименьших квадратов имеют вид:

$$a^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k(t_k - \bar{t})}{\sum\limits_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2}, \quad d^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,. \tag{3.3}$$

В силу соотношения (3.2) оценку a^* можно записать в более симметричном виде:

$$a^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(t_k - \bar{t})}{\sum\limits_{k=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}\,.$$

Эту оценку нетрудно преобразовать и к виду:

$$a^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i t_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ii}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i\right)^2}\,. \tag{3.4}$$

Следовательно, восстановленная функция, с помощью которой можно прогнозировать и интерполировать, имеет вид:

$$x^*(t) = a^*(t - \bar{t}) + d^*.$$

Обратим внимание на то, что использование $t_{ср}$ в последней формуле ничуть не ограничивает ее общность. Сравним с ранее рассмотренной моделью:

$$x_k = ct_k + b + e_k,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно, что

$$c = a,\ \ b = d - a\bar{t}.$$

Аналогичным образом связаны оценки параметров:

$$c^* = a^*,\ \ b^* = d^* - a^*\bar{t}.$$

Для данных табл. 3.1 в соответствии с формулой (3.3) $d^* = 26{,}83$, а согласно формуле (3.4):

$$a^* = \frac{1111 - \frac{1}{6}161 \times 34}{256 - \frac{1}{6}(34)^2} = \frac{1111 - 912{,}33}{256 - 192{,}67} = \frac{198{,}67}{63{,}33} = 3{,}14.$$

Следовательно, прогностическая функция (т. е. восстановленная зависимость) имеет вид:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= 3{,}14(t - 5{,}67) + 26{,}83 = 3{,}14t - 3{,}14 \times 5{,}67 + 26{,}83 = \\ &= 3{,}14t - 17{,}80 + 26{,}83 = 3{,}14t + 9{,}03. \end{aligned}$$

Естественно, результат тот же, что и при использовании первоначальной параметризации (формы линейной зависимости).

Восстановленные значения и оценка точности приближения. Следующий (второй) этап анализа данных — оценка точности восстановления (приближения) зависимости (функции) методом наименьших квадратов.

Сначала рассматриваются так называемые восстановленные значения:

$$\hat{x}_i = x^*(t_i), \quad i = 1,2,...,n.$$

Это те значения, которые полученная в результате расчетов прогностическая функция принимает в тех точках, в которых известны истинные значения зависимой переменной x_i.

Вполне естественно сравнить восстановленные и истинные значения. Это и сделано в шестом — восьмом столбцах табл. 3.1. Для простоты расчетов в шестом столбце представлены произведения a^*t_i, седьмой отличается от шестого добавлением константы $b^* = 9{,}03$ и содержит восстановленные значения. Восьмой столбец — это разность третьего и седьмого.

Непосредственный анализ восьмого столбца табл. 3.1 показывает, что содержащиеся в нем числа сравнительно невелики по величине по сравнению с третьим столбцом (на порядок меньше по величине). Кроме того, знаки «+» и «–» чередуются. Эти два признака свидетельствуют о правильности расчетов. При использовании метода наименьших квадратов знаки не всегда чередуются.

Однако если сначала идут только плюсы, а потом только минусы (или наоборот, сначала только минусы, а потом только плюсы), то это верный показатель того, что в вычислениях допущена ошибка (неправильно оценен коэффициент a).

Верно следующее утверждение.

Теорема 3.1. Справедливо тождество:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i) = 0.$$

Доказательство этой теоремы оставляем читателю в качестве упражнения.

Однако сумма по восьмому столбцу дает 0,06, а не 0. Незначительное отличие от 0 связано с ошибками округления при вычислениях. Близость суммы значений зависимой переменной и суммы восстановленных значений — практический критерий правильности расчетов. В соответствии с ним сумма элементов восьмого столбца должна быть мала по сравнению с элементами этого столбца.

Представляет интерес относительная погрешность восстановления. В точке t_k это величина:

$$\left|\frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k}\right|.$$

Для данных табл. 3.1 это величины:

$$\frac{0{,}17}{12}, \frac{1{,}55}{20}, \frac{1{,}59}{20}, \frac{0{,}99}{32}, \frac{2{,}29}{35}, \frac{1{,}57}{42}.$$

Максимальной из них является 1,59 / 20 = 0,08. Точность восстановления естественно выразить в процентах:

$$\max_{1 \le k \le n} \left| \frac{x_k - \widehat{x}_k}{x_k} \right| \times 100\% = 8\%.$$

В социально-экономических исследованиях точность восстановления 10–15 % признается хорошей. Конечно, в астрономических вычислениях, например при восстановлении орбиты астероида Церера (именно для решения этой задачи К. Гаусс разработал метод наименьших квадратов), точность должна быть гораздо выше (т. е. рассматриваемый показатель — максимум модуля относительных погрешностей — должен быть гораздо меньше).

Непараметрическая вероятностная модель. Перейдем к третьему этапу анализа данных. Для получения оценок параметров и прогностической функции нет необходимости обращаться к какой-либо вероятностной модели. Однако для того, чтобы изучать погрешности оценок параметров и восстановленной функции, т. е. строить доверительные интервалы для a^*, b^* и $x^*(t)$, подобная модель необходима.

Формулировка модели такова. Пусть значения независимой переменной t детерминированы, а погрешности e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, неизвестной статистику. В остальном функция распределения погрешностей e_k произвольна.

Поскольку не предполагается, что эта функция входит в то или иное параметрическое семейство, то рассматриваемая модель является непараметрической [3].

В дальнейшем неоднократно будем использовать центральную предельную теорему (ЦПТ) теории вероятностей (для разнораспределенных слагаемых) для величин e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ (с весами), поэтому для выполнения ее условий необходимо предположить, например, что погрешности e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, финитны или имеют конечный третий абсолютный момент. Каждое конкретное слагаемое (с учетом веса) должно быть бесконечно малым относительно всей суммы. Однако заострять здесь внимание на этих внутриматематических «условиях регулярности» нет необходимости (см. прил. 1, разд. П.1.2).

Асимптотические распределения оценок параметров. Из формулы (3.3) следует, что

$$d^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t}) + d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k . \tag{3.5}$$

Согласно ЦПТ оценка d^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием d и дисперсией σ^2 / n, оценка которой приводится ниже. С точки зрения математической статистики вектор оценок (a^*, d^*) обладает более простыми свойствами и легче поддается изучению, чем вектор оценок (a^*, b^*), что и является причиной введения в рассмотрение модели вида:

$$x_k = a(t_k - \bar{t}) + d + e_k.$$

Из формул (3.3) и (3.5) вытекает, что

$$x_k - \bar{x} = a(t_k - \bar{t}) + d + e_k - d - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = a(t_k - \bar{t}) + e_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k ;$$

$$(x_k - \bar{x})(t_k - \bar{t}) = a(t_k - \bar{t})^2 + e_k(t_k - \bar{t}) - \frac{(t_k - \bar{t})}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k .$$

Последнее слагаемое во втором соотношении при суммировании по k обращается в 0, поэтому из приведенных выше формул для a^* следует, что

$$a^* = a + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \frac{(t_k - \bar{t})}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2}. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) показывает, что оценка a^* является асимптотически нормальной с математическим ожиданием a и дисперсией:

$$D(a^*) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D(e_k) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} .$$

Отметим, что многомерная нормальность имеет быть, когда каждое слагаемое в формуле (3.6) мало сравнительно со всей суммой, т. е. когда справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max\limits_{1\le k\le n}|t_k-\bar{t}\,|}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t}\,)^2}}=0\,.$$

Из формул (3.5) и (3.6) и исходных предположений о погрешностях вытекает также то, что математические ожидания оценок равны оцениваемым параметрам (в терминах математической статистики — оценки параметров являются несмещенными).

Несмещенность и асимптотическая нормальность оценок метода наименьших квадратов позволяют легко указывать для них асимптотические доверительные границы (аналогично границам для долей в гл. 1 выше) и проверять статистические гипотезы, например о равенстве определенным значениям, прежде всего 0. Предоставляем читателю возможность выписать формулы для расчета доверительных границ и сформулировать правила проверки упомянутых гипотез.

Асимптотическое распределение прогностической функции.

Поскольку

$$x^*(t)=\left(a+\sum_{k=1}^{n}c_k e_k\right)(t-\bar{t}\,)+d+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e_k=a(t-\bar{t}\,)+d+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k+\frac{1}{n}\right)e_k\,,$$

то в силу ЦПТ случайная величина $x^*(t)$ имеет асимптотически нормальное распределение. Из формул (3.5) и (3.6) следует, что

$$M(x^*(t))=M\{a^*(t-\bar{t}\,)+d^*\}=M(a^*)(t-\bar{t}\,)+M(d^*)=a(t-\bar{t}\,)+d=x(t)\,,$$

т. е. рассматриваемая оценка прогностической функции является несмещенной. Поэтому

$$x^*(t)-Mx^*(t)=(a^*-a)(t-\bar{t}\,)+d^*-d\,.$$

Следовательно, дисперсия оценки имеет вид:

$$D(x^*(t))=D(a^*)(t-\bar{t}\,)^2+2M\{(a^*-a)(d^*-d)(t-\bar{t}\,)\}+D(d^*)\,.$$

При этом, поскольку погрешности e_k независимы в совокупности и имеют нулевое математическое ожидание, то $M(e_ke_j) = 0$, $k \neq j$ и

$$M\{(a^*-a)(d^*-d)(t-\bar{t})\} = M\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k\right)(t-\bar{t})\right\} = (t-\bar{t})\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} c_k\left(\sum_{j=1}^{n} M(e_k e_j)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(t-\bar{t})\sum_{k=1}^{n} c_k M(e_k^2) = \frac{1}{n}(t-\bar{t})\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} c_k = 0 .$$

Таким образом, с учетом найденных ранее выражений для дисперсий параметров получаем, что

$$D(x^*(t)) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})^2}(t-\bar{t})^2 + 0 + \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2\left\{\frac{1}{n} + \frac{(t-\bar{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})^2}\right\}. \qquad (3.7)$$

Итак, оценка $x^*(t)$ прогностической функции является несмещенной и асимптотически нормальной. Для практического использования ее асимптотического распределения с целью построения доверительных прогностических интервалов необходимо уметь оценивать остаточную дисперсию $M(e_t^2) = \sigma^2$.

Оценивание остаточной дисперсии. В точках t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеются исходные значения зависимой переменной x_k и восстановленные значения $x^*(t_k)$. Рассмотрим естественную характеристику расхождения между исходными и восстановленными значениями:

$$SS = \sum_{k=1}^{n}(x^*(t_k) - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}\{(a^*-a)(t_k-\bar{t}) + (d^*-d) - e_k\}^2 .$$

Величина SS называется остаточной суммой квадратов.

В соответствии с формулами (3.5) и (3.6):

$$SS = \sum_{k=1}^{n}\left\{(t_k-\bar{t})\sum_{j=1}^{n} c_j e_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_j - e_k\right\}^2 = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t}) + \frac{1}{n}\right]e_j - e_k\right\}^2 = \sum_{k=1}^{n} SS_k ,$$

где

$$SS_k = \left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t}) + \frac{1}{n}\right]e_j - e_k\right\}^2, \quad k = 1,2,\ldots,n .$$

Найдем математическое ожидание каждого из слагаемых:

$$M(SS_k) = M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]e_j - e_k\right\}^2 = M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]e_j\right\}^2 -$$

$$-2M\left(\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]e_j\right\}e_k\right)+M\left(e_k^2\right)=\sum_{j=1}^{n}\left\{c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right\}^2\sigma^2 -$$

$$-2\left\{c_k(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right\}\sigma^2+\sigma^2$$

Из сделанных ранее предположений вытекает, что при $n \to \infty$ имеем $M(SS_i) \to \sigma^2$, $I = 1, 2, \ldots, n$. Оценив дисперсию случайной величины SS / n, можно показать, что статистика SS/ n является состоятельной оценкой дисперсии σ^2.

В последнем — девятом — столбце табл. 3.1 приведены квадраты значений из восьмого столбца. Их сумма — это остаточная сумма квадратов $SS = 13{,}64$. В соответствии со сказанным выше рассчитанными по исходным данным табл. 3.1 значениями состоятельных (в смысле математической статистики) оценок дисперсии погрешностей и их среднего квадратического отклонения являются:

$$(\sigma^2)^* = \frac{SS}{n} = \frac{13{,}64}{6} = 2{,}27; \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}} = \sqrt{\frac{13{,}64}{6}} = 1{,}51\,.$$

Доверительные границы для прогностической функции. Получение состоятельной оценки дисперсии погрешностей дает возможность завершить последовательность задач, связанных с рассматриваемым простейшим вариантом метода наименьших квадратов. Исходим из установленной ранее асимптотической нормальности точечного прогноза $x^*(t)$. Не представляет труда выписывание верхней $x_{\text{В}}(t)$ и нижней $x_{\text{Н}}(t)$ границ для прогностической функции:

$$x_{\hat{A}}(t) = x^*(t)+\delta(t),\ \ x_{\acute{I}}(t) = x^*(t)-\delta(t),$$

где погрешность прогноза $\delta(t)$ имеет вид:

$$\delta(t) = U(p)\sqrt{Dx^*(t)}\,.$$

Оценив дисперсию $x^*(t)$ с помощью формулы (3.7), в которую вместо неизвестной исследователю дисперсии погрешностей σ^2 подставлена ее оценка, получаем окончательный вид формулы для расчета полуширины доверительного интервала:

$$\delta(t) = U(p)\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t-\bar{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2}}, \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}}.$$

Здесь p — доверительная вероятность, $U(p)$, как и в предыдущих главах, — квантиль нормального распределения порядка $(1 + p) / 2$, т. е.

$$\Phi(U(p)) = \frac{1+p}{2}, \quad U(p) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right).$$

При $p = 0{,}95$ (наиболее применяемое значение) имеем $U(p) = 1{,}96$. Для других доверительных вероятностей соответствующие значения квантилей можно найти в статистических таблицах (см., например, наилучшее в этой сфере издание [4]).

Пример 2. Продолжим анализ данных табл. 3.1, исходя из описанной выше вероятностно-статистической модели.

Рассмотрим распределения оценок параметров. Оценка d^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием d и дисперсией, которая оценивается как $(\sigma^2)^* / n = 2{,}27 / 6 = 0{,}38$ (здесь считаем, что 6 — «достаточно большое» число, что, конечно, можно обосновать, изучив точность приближения методом статистических испытаний или иным). Оценкой среднего квадратического отклонения является 0,615. Следовательно, при доверительной вероятности 0,95 доверительный интервал для параметра d имеет вид $(26{,}83 - 1{,}96 \times 0{,}615;\ 26{,}83 + 1{,}96 \times 0{,}615) = (25{,}625;\ 28{,}035)$.

В формулах для дисперсий участвует величина, которую можно представить двумя способами:

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{cp})^2 = \sum_{i=1}^{n}(t_i^2 - 2t_i t_{cp} + t_{cp}^2) = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2t_{cp}\sum_{ш=1}^{n} t_i + nt_{cp}^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{cp}^2.$$

Подставив численные значения (табл. 3.1), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{cp}^2 = 256 - 6(5{,}67)^2 = 63{,}1.$$

Дисперсия оценки a^* коэффициента при линейном члене прогностической функции оценивается как 2,27 / 63,1 = 0,036, а среднее квадратическое отклонение — как 0,19. Следовательно, при доверительной вероятности 0,95 доверительный интервал для параметра a имеет вид (3,14 – 1,96 × 0,19; 3,14 + + 1,96 × 0,19) = (2,77; 3,51).

Прогностическая функция с учетом погрешности имеет вид (при доверительной вероятности 0,95):

$$x^*(t) = 3{,}14t + 9{,}03 \pm 1{,}96 \times 1{,}51\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{(t-5{,}67)^2}{63{,}1}}\,. \tag{3.8}$$

Например, при t = 12 эта формула дает:

$$x^*(12) = 46{,}71 \pm 2{,}65\,.$$

Следовательно, нижняя доверительная граница — это 44,06, а верхняя доверительная граница — это 49,36.

Насколько далеко можно прогнозировать? Обычный ответ таков: до тех пор, пока сохраняется тот стабильный комплекс условий, при котором справедлива рассматриваемая зависимость. Изобретатель метода наименьших квадратов Карл Гаусс исходил из задачи восстановления орбиты астероида (малой планеты) Церера. Движение подобных небесных тел может быть рассчитано на сотни лет. А вот параметры комет (например, срок возвращения) не поддаются столь точному расчету, поскольку за время пребывания в окрестности Солнца сильно меняется масса кометы. В социально-экономической области горизонты надежного прогнозирования еще менее определены. В частности, они сильно зависят от решений государственных органов.

Чтобы выявить роль погрешностей в прогностической формуле, рассмотрим формальный предельный переход $t \to \infty$. Тогда входящие в формулу (3.8) величины 9,03; 1/6; 5,67 становятся бесконечно малыми, и

$$x^*(t) \approx 3{,}14t \pm \frac{2{,}96}{\sqrt{63{,}1}}t = (3{,}14 \pm 0{,}37)t\,.$$

Таким образом, погрешности составляют около

$$\frac{100 \times 0{,}37}{3{,}14}\% = 11{,}8\%$$

от тренда (математического ожидания) прогностической функции. В социально-экономических исследованиях подобные погрешности считаются вполне приемлемыми.

Краткое сравнение параметрического и непараметрического подходов. Во многих литературных источниках рассматривается параметрическая вероятностная модель метода наименьших квадратов. В ней предполагается, что погрешности имеют нормальное распределение. Это предположение позволяет математически строго получить ряд выводов. Так, распределения статистик вычисляются точно, а не в асимптотике, соответственно, вместо квантилей нормального распределения используются квантили распределения Стьюдента, а при оценивании дисперсии погрешностей остаточная сумма квадратов SS делится не на n, а на $(n - 2)$. Ясно, что при росте объема данных различия стираются.

Рассмотренный выше непараметрический подход не использует нереалистическое предположение о нормальности погрешностей. Платой за это является асимптотический характер результатов. В случае простейшей модели метода наименьших квадратов оба подхода дают практически совпадающие рекомендации (поскольку квантили распределения Стьюдента при росте объема выборки приближаются к квантилям нормального распределения). Это не всегда так, не всегда два подхода дают близкие результаты. Например, известно, что в задаче обнаружения выбросов методы, опирающиеся на нормальное распределение, нельзя считать обоснованными, и это их неприятное свойство было обнаружено с помощью непараметрического подхода (см. [5, п. 7.2], [6, п. 4.2]).

Об общих принципах организационно-экономического моделирования. Ход проведенного в настоящем разделе исследования позволяет кратко сформулировать несколько общих принципов построения, описания и использования организационно-экономических методов, в частности, в области прикладной статистики. Во-первых, должны быть четко сформулированы исходные предпосылки, т. е. полностью описана используемая вероятностно-статистическая модель. Во-вторых, не следует принимать предпосылки, которые редко выполняются на практике. В-третьих, алгоритмы расчетов должны быть корректны с точки зрения математико-статистической теории. В-четвертых, алгоритмы должны давать полезные для практики выводы.

Применительно к задаче восстановления зависимостей это означает, что целесообразно применять непараметрический подход, что и сделано выше. Однако предположение нормальности, хотя и очень сильно сужает возможности применения, с чисто математической точки зрения позволяет продвинуться дальше. Поэтому для первоначального изучения ситуации, так сказать, «в лабораторных условиях» нормальная модель может оказаться полезной.

Основные требования к статистическим методам анализа данных сформулированы и обоснованы в [7, 8].

3.2. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Метод наименьших квадратов, рассмотренный выше в простейшем случае, допускает различные обобщения. Например, метод наименьших квадратов дает алгоритм расчетов, если исходные данные — по-прежнему набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции), но восстанавливать надо не линейную зависимость, а квадратическую:

$$x(t) = at^2 + bt + c.$$

Следует рассмотреть функцию трех переменных:

$$f(a,b,c) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - at_k^2 - bt_k - c)^2.$$

Оценки метода наименьших квадратов — это такие значения параметров a^*, b^* и c^*, при которых функция $f(a, b, c)$ достигает минимума по всем значениям аргументов. Чтобы найти эти оценки, надо вычислить частные производные от функции $f(a, b, c)$ по аргументам a, b и c, приравнять их к 0, затем из полученных уравнений найти оценки. Имеем:

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a}(x_k - at_k^2 - bt_k - c)^2 = \sum_{k=1}^{n} 2(-t_k^2)(x_k - at_k^2 - bt_k - c) .$$

Приравнивая частную производную к 0, получаем линейное уравнение относительно трех неизвестных параметров a, b, c:

$$a\sum_{k=1}^{n} t_k^4 + b\sum_{k=1}^{n} t_k^3 + c\sum_{k=1}^{n} t_k^2 = \sum_{k=1}^{n} t_k^2 x_k .$$

Приравнивая частную производную по параметру b к 0, аналогичным образом получаем уравнение:

$$a\sum_{k=1}^{n} t_k^3 + b\sum_{k=1}^{n} t_k^2 + c\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k.$$

Наконец, приравнивая частную производную по параметру c к 0, получаем уравнение:

$$a\sum_{k=1}^{n} t_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} t_k + cn = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными, находим оценки метода наименьших квадратов.

Другие задачи, рассмотренные в предыдущем разделе (доверительные границы для параметров и прогностической функции и др.), также могут быть решены. Соответствующие алгоритмы более громоздки. Для их записи полезен аппарат матричной алгебры (см., например, одну из лучших в этой области монографий [9]). Для реальных расчетов используют соответствующие компьютерные программы.

Линейный регрессионный анализ. Раздел прикладной статистики, посвященный восстановлению зависимостей, называется **регрессионным анализом**. Термин «линейный регрессионный анализ» используют, когда рассматриваемая функция линейно зависит от оцениваемых параметров (от независимых переменных зависимость может быть произвольной). Теория оценивания неизвестных параметров хорошо развита именно в случае линейного регрессионного анализа. Если же линейности нет и нельзя перейти к линейной задаче, то, как правило, хороших свойств от оценок ожидать не приходится.

Продемонстрируем подходы в случае зависимостей различного вида. Если зависимость имеет вид многочлена (полинома):

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_m t^m,$$

то коэффициенты многочлена могут быть найдены путем минимизации функции:

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_0 - a_1 t_k - a_2 t_k^2 - a_3 t_k^3 - \ldots - a_m t_k^m)^2.$$

Функция от t не обязательно должна быть многочленом. Можно, например, добавить периодическую составляющую, соответствующую сезонным колебаниям. Так, хорошо известно, что инфляция (рост потребительских цен) имеет четко выраженный годовой цикл. А именно, в среднем цены быстрее всего растут зимой, в декабре — январе, а медленнее всего (иногда в среднем даже падают) летом, в июле — августе (подробнее проблемы измерения инфляции рассмотрены в гл. 4). Пусть для определенности

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_m t^m + A\sin Bt,$$

тогда неизвестные параметры могут быть найдены путем минимизации функции:

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, A, B) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - a_0 - a_1 t_k - a_2 t_k^2 - a_3 t_k^3 - \ldots - a_m t_k^m - A\sin Bt_k)^2.$$

Если время измеряется в годах, то в качестве периодической составляющей (с периодом год) естественно взять $A\cos(2\pi t)$.

Преобразования переменных. Пусть $I(t)$ — индекс инфляции в момент t. Принцип стабильности условий приводит к гипотезе о постоянстве темпов роста средних цен, т. е. индекса инфляции. Таким образом, естественная модель для индекса инфляции — это

$$I(t) = Ae^{Bt}.$$

Эта модель не является линейной, метод наименьших квадратов непосредственно применять нельзя. Однако если прологарифмировать обе части предыдущего равенства:

$$\ln I(t) = \ln A + Bt$$

и ввести новую переменную $x = \ln I(t)$, то получим линейную зависимость x от t, процедура (алгоритм) оценивания параметров которой рассмотрена выше.

В гл/ 1 был описан метод оценивания функции спроса по экспериментальным данным. Естественно восстановить зависимость по наборам пар чисел (p_i, $D_i = D(p_i)$), $i = 1, 2, \ldots, n$. На центральной части диапазона изменения цены вполне естественно использовать линейную зависимость (поскольку, как отметили еще Ньютон и Лейбниц, любую гладкую функцию на небольшом интервале можно с достаточной точностью приблизить касательной). Однако по краям диапазона (т. е. при малых ценах и при больших ценах) линейную зависимость применять нельзя, поскольку ее график выходит за пределы первого квадранта. Естественно использовать степенную зависимость:

$$D = D(p) = Cp^{-\alpha},$$

где $C > 0$, $\alpha > 0$. Эта зависимость нелинейная, метод наименьших квадратов непосредственно применить нельзя. Но можно преобразовать переменные с целью приведения зависимости к линейной. Логарифмируя, получим:

$$\ln D = \ln C - \alpha \ln p.$$

Следовательно, если ввести переменные $x = \ln D$, $t = \ln p$, то между этими переменными имеется линейная зависимость, параметры которой оценивать умеем.

Итак, во многих случаях путем преобразования переменных удается перейти от нелинейных зависимостей к линейным с целью обеспечения корректного применения метода наименьших квадратов. Например, если

$$y = \sqrt{at + b},$$

то такой переход осуществляется путем введения переменной $x = y^2$. А если

$$y = \frac{1}{at + b},$$

то замена $z = 1 / y$ приводит к линейной зависимости $z = a + bx$. Если $y = (a + bx)^2$, то замена $z = \sqrt{y}$ приводит к линейной зависимости $z = a + bx$. Для каждого конкретного случая подбирают свое преобразование.

Многомерная регрессия. Независимых переменных может быть не одна, а несколько. Пусть, например, по исходным данным (x_k, y_k, z_k), $k = 1, 2, \ldots, n$ требуется оценить неизвестные параметры a и b в зависимости:

$$z = ax + by + \varepsilon,$$

где ε — погрешность.

Это можно сделать, минимизируя функцию:

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ax_k - by_k)^2 .$$

Зависимость от x и y не обязательно должна быть линейной. Предположим, что из каких-то соображений известно, что зависимость должна иметь вид:

$$z = ax + by + cx^2 y + dxy + ey^3 + \varepsilon,$$

тогда для оценки пяти неизвестных параметров a, b, c, d, e необходимо минимизировать функцию:

$$f(a,b,c,d,e) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ax_k - by_k - cx_k^2 y_k - dx_k y_k - ey_k^3)^2 .$$

Более подробно рассмотрим важный пример из микроэкономики. В одной из оптимизационных моделей поведения фирмы используется так называемая производственная функция $f(K, L)$, задающая объем выпуска в зависимости от затрат капитала K и труда L. В качестве конкретного вида производственной функции часто используется так называемая функция Кобба — Дугласа:

$$f(K,L) = K^{\alpha} L^{\beta} .$$

Однако откуда взять значения параметров α и β? Естественно предположить, что они одни и те же для всех предприятий отрасли. Поэтому целесообразно собрать информацию в виде трехмерных векторов (f_k, K_k, L_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, где f_k — объем выпуска на k-м предприятии, K_k — объем затрат капитала на k-м предприятии, L_k — объем затрат труда на k-м предприятии (в кратком изложении не пытаемся дать точных определений используемым понятиям из экономики предприятия). По собранной информации естественно попытаться оценить параметры α и β. Но они входят в зависимость нелинейно, поэтому сразу применить метод наименьших квадратов нельзя. Помогает логарифмирование:

$$\ln f(K,L) = \alpha \ln K + \beta \ln L.$$

Следовательно, целесообразно сделать замену переменных:

$$x_k = \ln K_k, y_k = \ln L_k, z_k = \ln f_k, k = 1,2,3,...,n,$$

а затем находить оценки параметров α и β, минимизируя функцию:

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - \alpha x_k - \beta y_k)^2.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^{n} 2(z_k - \alpha x_k - \beta y_k)(-x_k),$$

$$\frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{k=1}^{n} 2(z_k - \alpha x_k - \beta y_k)(-y_k).$$

Приравняем частные производные к 0, сократим на 2, раскроем скобки, перенесем свободные члены вправо. Получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \beta \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k z_k,$$

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_{л}^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k z_k.$$

Таким образом, для вычисления оценок метода наименьших квадратов необходимо найти пять сумм:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k^2, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k z_k, \quad \sum_{k=1}^{n} y_k z_k.$$

Для упорядочения расчета этих сумм может быть использована таблица типа табл. 3.1, что применялась выше. Отметим, что рассмотренная в предыдущем подразделе постановка переходит в разбираемую сейчас при $y_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Решая систему линейных уравнений, получаем оценки метода наименьших квадратов α* и β*.

Что может дать сравнение исходных значений f_k с восстановленными значениями

$$\hat{f}_k = f^*(K_k, L_k) = K_k^{\alpha^*} L_k^{\beta^*}?$$

Если $f_k > \hat{f}_k$, то это означает, что предприятие работает лучше, чем в среднем по отрасли (из-за различной исходной фондовооруженности нельзя сравнивать предприятия непосредственно, необходимо сначала восстановить зависимость выпуска от факторов производства с помощью модели Кобба — Дугласа). Это заслуга руководства предприятия. Следовательно, вышестоящие структуры имеют основания продвигать и награждать топ-менеджеров этого предприятия. Деловые партнеры имеют основания для налаживания долговременных отношений. Банки имеют основания давать льготные кредиты.

Если $f_k < \hat{f}_k$, то ситуация прямо противоположная. Предприятие работает хуже, чем в среднем по отрасли, т. е. хуже, чем можно было бы ожидать при имеющихся у него ресурсах. Это вина руководства предприятия. Следовательно, вышестоящим структурам целесообразно наказать директора и его заместителей, например «укрепить руководство предприятия», заменив часть или всех топ-менеджеров. Деловым партнерам надо учесть, что выполнение договорных отношений находится под угрозой срыва. Из-за повышенного риска банки повысят процент платы за кредит, ужесточат требования к обеспечению возврата кредитов, в частности, беря имущество предприятия в залог.

Случай $f_k = \hat{f}_k$ — промежуточный между двумя описанными. Предприятие работает на уровне, среднем для отрасли. Нет оснований ни хвалить его руководство, ни применять санкции.

Как можно использовать восстановленную зависимость? Например, проектируем новое предприятие. Определяем для него величины факторов производства K_0 и L_0. Тогда можем рассчитывать на выпуск продукции в объеме $f^*(K_0, L_0)$.

Пример практического использования линейного регрессионного анализа. Руководитель маркетинговой службы завода ГАРО (г. Великий Новгород) А.А. Пивень применил его для построения математической модели рынка легковых подъемников. Требуется выявить факторы (показатели), оказывающие наибольшее влияние на объем продаж подъемников, найти зависимость объема продаж от этих факторов и использовать эту зависимость для прогнозирования объема продаж.

Зависимая переменная — объем продаж V, независимые переменные:

– грузоподъемность ($X1$);
– цена ($X2$);
– наличие напольной рамы ($X3$);
– наличие синхронизации ($X4$);
– количество двигателей ($X5$);
– суммарная мощность двигателей ($X6$);
– высота подхвата в нижнем положении ($X7$);
– максимальная высота подъема ($X8$);
– скорость подъема ($X9$);
– гарантийный срок ($X10$);
– срок службы ($X11$);
– время на рынке ($X12$);
– внешний вид ($X13$);
– срок поставки ($X14$);
– уровень сервисного обслуживания ($X15$);
– наличие системы смазки ($X16$);
– масса ($X17$).

Для восстановления зависимости использовалась линейная регрессионная модель. По результатам пошагового анализа из рассмотрения последовательно исключались независимые переменные (параметры подъемника), имеющие (в линейной модели) коэффициенты, незначимо отличающиеся от нуля, иными словами, мало отличающиеся от 0 в сравнении с их дисперсией. Для этого использовался пакет STATISTICA 6.0, конкретно модуль «Множественная регрессия» *(Multiple regression)*.

В результате расчетов получена зависимость объема продаж подъемника П3-Т от 12 факторов:

$$V = -1769{,}77 - 65.09X1 - 0{,}03X2 + 68{,}79X3 + 147{,}54\,X4 +$$
$$+ 156{,}28X5 + 2{,}53X7 + 1{,}06X8 + 25{,}75X12 -$$
$$- 132{,}26X13 - 12{,}41X14 + 107{,}78X15 + 397X16.$$

Влияние остальных пяти факторов оказалось незначимым.

Исходя из расчетов, прогнозное значение продаж подъемников на второй год продаж составит ориентировочно 1 010 шт. С вероятностью 95 % можно утверждать, что объем продаж будет лежать в границах [695, 1 332] шт.

3.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ

Прежде чем восстанавливать зависимость, целесообразно убедиться, что переменные связаны между собой. Термин «корреляция» и означает «связь». В области статистических методов этот термин обычно используется в сочетании «коэффициенты корреляции». Рассмотрим линейный и непараметрические парные коэффициенты корреляции.

Обсудим способы измерения связи между двумя случайными переменными, определенными на одном и том же пространстве элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$. Пусть исходными данными является набор случайных векторов $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Выборочным коэффициентом корреляции, более подробно, выборочным линейным парным коэффициентом корреляции К. Пирсона, как известно, называется число:

$$r_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Если $r_n = 1$, то $y_i = ax_i + b$, причем $a > 0$. Если же $r_n = -1$, то $y_i = ax_i + b$, причем $a < 0$. Таким образом, близость коэффициента корреляции к 1 (по абсолютной величине) говорит о достаточно тесной линейной связи.

Если случайные векторы $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, \ldots, n$ независимы и одинаково распределены, то выборочный коэффициент корреляции сходится к теоретическому при безграничном возрастании объема выборки:

$$r_n \to \rho = \frac{M(x_1 - M(x_1))(y_1 - M(y_1))}{\sqrt{D(x_1)}\sqrt{D(y_1)}}$$

(сходимость по вероятности).

Более того, выборочный коэффициент корреляции является асимптотически нормальным. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{r_n - \rho}{\sqrt{D_0(r_n)}} < x\right) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, а $D_0(r_n)$ — асимптотическая дисперсия выборочного коэффициента корреляции. Она имеет довольно сложное выражение, приведенное в монографии [5, с. 393]:

$$D_0(r_n) = \frac{\rho^2}{4n}\left(\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2} + \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2} + \frac{2\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}} + \frac{4\mu_{22}}{\mu_{11}^2} - \frac{4\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{20}} - \frac{4\mu_{13}}{\mu_{11}\mu_{02}}\right).$$

Здесь под μ_{km} понимаются теоретические центральные моменты порядка k и m, а именно:

$$\mu_{km} = M(x_1 - M(x_1))^k (y_1 - M(y_1))^m .$$

Коэффициенты корреляции типа r_n используются во многих алгоритмах многомерного статистического анализа. В теоретических рассмотрениях часто считают, что случайные векторы $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, \ldots, n$ имеют двумерное нормальное распределение. Распределения реальных данных, как правило, отличны от нормальных (см. [5, 6]).

Почему же распространено представление о двумерном нормальном распределении? Дело в том, что теория в этом случае проще. В частности, равенство 0 теоретического коэффициента корреляции эквивалентно независимости случайных величин. Поэтому проверка независимости сводится к проверке статистической гипотезы о равенстве 0 теоретического коэффициента корреляции. Эта гипотеза принимается, если $|r_n| < C(n, \alpha)$, и отклоняется, если это неравенство не выполнено, где $C(n, \alpha)$ — некоторое граничное значение, зависящее от объема выборки n и уровня значимости α.

Если предположение о двумерной нормальности не выполнено, то из равенства 0 теоретического коэффициента корреляции не вытекает независимость случайных величин. Нетрудно построить пример случайного вектора, для которого коэффициент корреляции равен 0, но координаты зависимы. Кроме того, для проверки гипотез о коэффициенте корреляции нельзя пользоваться таблицами, рассчитанными в предположении нормальности. Можно построить правила принятия решений на основе асимптотической нормальности выборочного коэффициента корреляции. Но есть и другой путь: перейти к непараметрическим коэффициентам корреляции, одинаково пригодным при любом непрерывном распределении случайного вектора.

Для расчета непараметрического ***коэффициента ранговой корреляции Спирмена*** необходимо сделать следующее. Для каждого x_i рассчитать его ранг r_i в вариационном ряду, построенном по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для каждого y_i

рассчитать его ранг q_i в вариационном ряду, построенном по выборке $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Для набора из n пар (r_i, q_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, вычислить линейный коэффициент корреляции. Он называется коэффициентом ранговой корреляции Спирмена (по фамилии ученого, предложившего этот коэффициент), поскольку определяется через ранги. В качестве примера рассмотрим данные из табл. 3.2.

Таблица 3.2

Данные для расчета коэффициентов корреляции

i	1	2	3	4	5
x_i	5	10	15	20	25
y_i	6	7	30	81	300
r_i	1	2	3	4	5
q_i	1	2	3	4	5

Для данных табл. 3.2 коэффициент линейной корреляции равен 0,83, непосредственной линейной связи нет. А вот коэффициент ранговой корреляции равен 1, поскольку увеличение одной переменной однозначно соответствует увеличению другой переменной. Во многих экономических задачах, например при выборе инвестиционных проектов, достаточно именно монотонной зависимости одной переменной от другой.

Поскольку суммы рангов и их квадратов нетрудно подсчитать, то коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен:

$$\rho_n = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(r_i - q_i)^2}{n^3 - n}.$$

Отметим, что коэффициент ранговой корреляции Спирмена остается постоянным при любом строго возрастающем преобразовании шкалы измерения результатов наблюдений. Другими словами, он является адекватным в порядковой шкале (см. гл. 6), как и другие ранговые статистики, например статистики Вилкоксона, Смирнова, типа омега-квадрат для проверки однородности независимых выборок (гл. 2).

Широко используется также коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла, коэффициент ранговой конкордации Кендалла и Б. Смита (речь идет о сумме попарных коэффициентов ранговой корреляции Кендалла в случае более чем двух переменных) и др. Наиболее подробное обсуждение этой тематики содержится в монографии [10], необходимые для практических расчетов таблицы имеются в справочнике [4]. Дискуссия о наиболее адекватном выборе вида коэффициентов корреляции продолжается и в настоящее время [11].

3.4. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ В ОТРАСЛИ ЛОМА ЧЕРНЫХ МЕТАЛЛОВ[3]

Среди статистических методов прогнозирования [12] основной — метод наименьших квадратов. Продемонстрируем его практическую пользу на примере исследования [13], посвященного решению задач прогнозирования цены лома черных металлов — сырья для Магнитогорского металлургического комбината.

Как показано в статье [13], в настоящее время для мировой и российской металлургии одна из наиболее актуальных проблем — повышение эффективности использования ресурсов лома черных металлов. Каждая промышленно развитая страна стремится максимально увеличить долю использования металлолома в сталеплавильном производстве, решая таким образом не только вопросы экологии, но и проблему дефицита рудного сырья, коксующихся углей, которые постоянно дорожают.

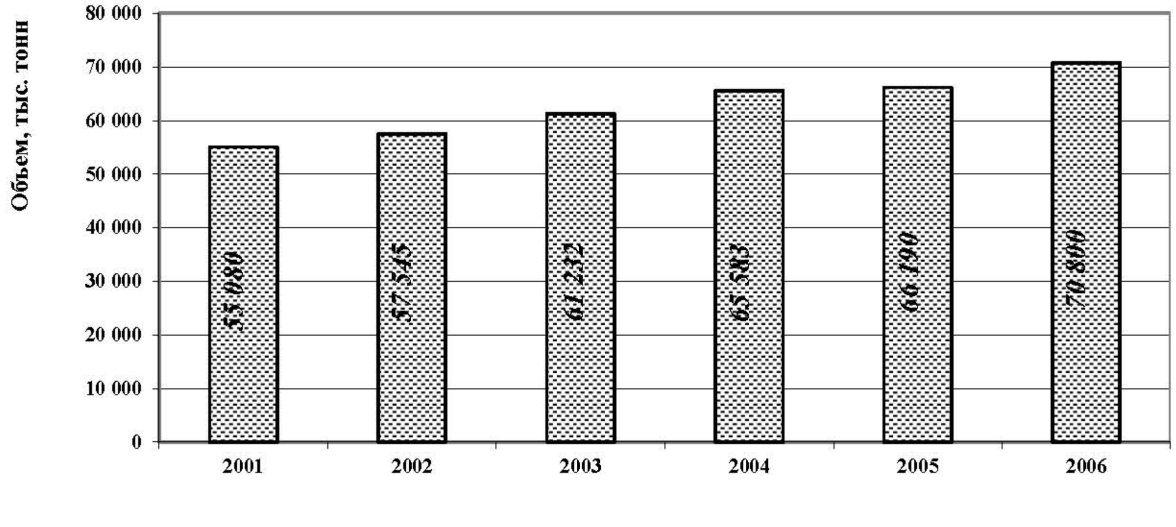


Рис. 3.1. Выплавка стали в России

[3] Раздел 3.3 составлен по материалам статьи [13] ведущего менеджера отдела маркетинга ЗАО «Профит» Е.М. Крюковой, подготовленной в 2007 г. при написании диссертации по экономическим наукам под руководством автора настоящего учебника.

В России производство стали ежегодно возрастает. За период 2001–2006 гг. суммарный прирост выплавки согласно [14] составил свыше 28 % (рис. 3.1). По мере увеличения выплавки стали возрастает масса необходимой для ее производства металлической шихты. Одним из главных составляющих шихты выступает металлолом. Его потребление определяется структурой сталеплавильного производства, развитием новых технологий выплавки, разливки и прокатки стали.

На смену мартеновскому производству стали в мировой металлургии пришли кислородно-конвертерный и электросталеплавильный процессы. Если первый имеет ограничение по применению металлолома, то второй базируется преимущественно на потреблении стального лома [15].

Современные конвертерный и электросталеплавильный процессы ориентированы на 100 %-ю непрерывную разливку стали, что существенно сокращает образование оборотного лома в процессе производства. Потребность черной металлургии в ресурсах лома практически в 2 раза превышает объем внутризаводского оборота металлолома [15]. Все это ведет к значительному росту потребности металлургической промышленности в ломе черных металлов, поставляемом специализированными ломоперерабатывающими предприятиями, усилению конкуренции за лом на российском рынке.

Увеличение спроса, естественно, сопровождается ростом цен на лом черных металлов. За период 2002–2006 гг. средневзвешенные цены на металлолом на российском рынке увеличились более чем в 2 раза (табл. 3.3). Это увеличивает привлекательность ломоперерабатывающего бизнеса.

Таблица 3.3

Изменение среднегодовой цены на внутреннем рынке в 2002–2006 гг.

Период	Среднегодовая цена, руб./т с НДС и ЖДТ*	Изм., руб./т	Изм., %	Индекс инфляции, ед.**	Среднегодовая цена, руб./т с НДС и ЖДТ (сопоставимые цены на 2002 г., без учета влияния инфляции)	Изм., %
2002	1 812	–	–	–	1 812	–
2003	3 039	1 226	167,7	1,12	2 713	149,7
2004	4 169	1 130	137,2	1,117	3 332	122,8

Период	Среднегодовая цена, руб./т с НДС и ЖДТ*	Изм., руб./т	Изм., %	Индекс инфляции, ед.**	Среднегодовая цена, руб./т с НДС и ЖДТ (сопоставимые цены на 2002 г., без учета влияния инфляции)	Изм., %
2005	4 349	181	104,3	1,109	3 135	94,1
2006	5 559	1 210	127,8	1,09	3 676	117,3

Примечание. * Средневзвешенная цена на лом черных металлов (по крупнейшим металлургическим комбинатам России), НДС — налог на добавленную стоимость, ЖДТ — железнодорожный тариф.

** По данным Росстата РФ.

Рис. 3.2. Структура участников рынка, каналы сбыта

Структуру рынка лома можно представить в виде взаимосвязи трех важнейших участников рынка: ломосдатчиков, ломопереработчиков и потребителей лома (рис. 3.2).

Ломосдатчики — это юридические и физические лица, которые либо списывают машины, оборудование, либо находят их «на земле», проводят демонтаж и отгружают ломопереработчикам. **Ломопереработчики**, в свою очередь, подразделяются на предприятия, имеющие собственные ломозаготовительные площадки и осуществляющие на них сбор и переработку лома, и на транзитные организации, которые не имеют собственных площадок, а просто осуществляют транспортировку и реализацию металлолома. Замыкают эту цепочку **потребители лома** — металлургические комбинаты и заводы, которые осуществляют приемку, складирование лома в копровых цехах и подготовку для сталеплавильного процесса.

Система ценообразования на рынке лома выглядит следующим образом. Потребители лома устанавливают цены на материал исходя из потребности производства и наличия остатков на складах. В свою очередь, ломоперерабатывающие предприятия устанавливают цены «на земле», т. е. цены закупа лома у ломосдатчиков. Задача ломопереработчика — устанавливать в разные периоды такие цены, которые обеспечат им максимальную рентабельность. Таким образом, эффективность деятельности ломопереработчика зависит от оценки рыночной конъюнктуры, характеристики влияния рыночных факторов и прогноза дальнейшей динамики закупочных цен сталепроизводителей на лом черных металлов.

Динамика цен на лом черных металлов имеет свои особенности.

Во-первых, это изменение носит сезонный характер. Рост цен ежегодно начинается в марте — апреле, это связано с «подъеданием» зимних запасов на складах металлургических предприятий и ростом потребности сталепроизводителей в привозном металлоломе. К маю в связи с окончанием зимних условий увеличиваются ломозаготовка и подход лома на склады, что ведет к снижению закупочных цен на лом. В конце лета вновь начинается рост: потребность предприятий в ломе возрастает в связи с началом накопления зимних запасов материала на складах. После достижения максимума цен в сентябре — октябре следует понижение. Данная тенденция с небольшими сдвигами повторяется из года в год.

Во-вторых, в последние годы очевидна тенденция сглаживания цен в течение года, цена изменяется равномерно без резких скачков и «провалов» (рис. 3.3).

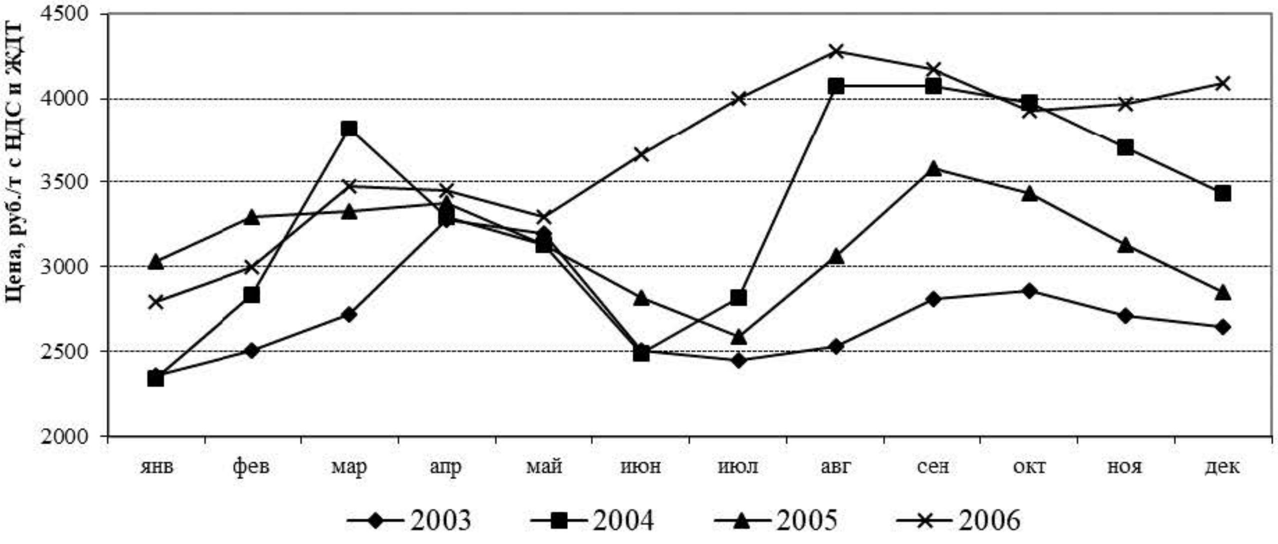


Рис. 3.3. Динамика средних цен на лом марки 3А с учетом инфляции

Наконец, цена на лом зависит от множества факторов:

1. Потребность металлургических предприятий в ломе черных металлов (месячные планы поставки) и остатки лома на складах копровых цехов комбинатов. Чем выше потребность сталепроизводителя в ломе на текущий месяц, тем большую цену он готов заплатить за сырье. С помощью цен потребители регулируют потоки материала в сторону комбината: невыполнение запланированных показателей ведет к увеличению закупочных цен на металлолом; перевыполнение, напротив, как правило, приводит к понижению цен. Последнее связано в первую очередь с ограниченными производственными мощностями копровых цехов комбинатов (перегрузочная техника, железнодорожные тупики), которые не могут обеспечить своевременную выгрузку и складирование всего поступающего объема металлолома.

2. Суммарный объем потребления внутреннего рынка. Как уже было сказано выше, потребление лома черных металлов носит сезонный характер: потребность сталепроизводителей существенно возрастает в периоды формирования остатков лома на складах. Это ведет к росту конкуренции за сырье на рынке и, как следствие, к росту среднерыночных цен.

3. Объемы поставки российского лома на экспорт и цены на мировых рынках. Значительные объемы металлолома по-прежнему отвлекаются на экспорт. Крупнейшим импортером российского металлолома является Турция. Поэтому, когда турецкие заводы дают высокие цены на металлолом, возрастают закупочные цены экспортеров в российских портах, что неизбежно ведет к ответному росту цен производителями внутреннего рынка.

4. Цены на готовую продукцию металлургических комбинатов. Важнейшим фактором изменения цен на сырье являются цены на готовую продукцию. Так как значительные объемы металлопродукции российских сталезаводов направляются на экспорт, в качестве индикаторов в [13] выбраны цены на арматуру в портах Черного и Балтийского моря. Как видно из рис. 3.4, динамика цен на лом черных металлов в течение года повторяет динамику цен на арматуру.

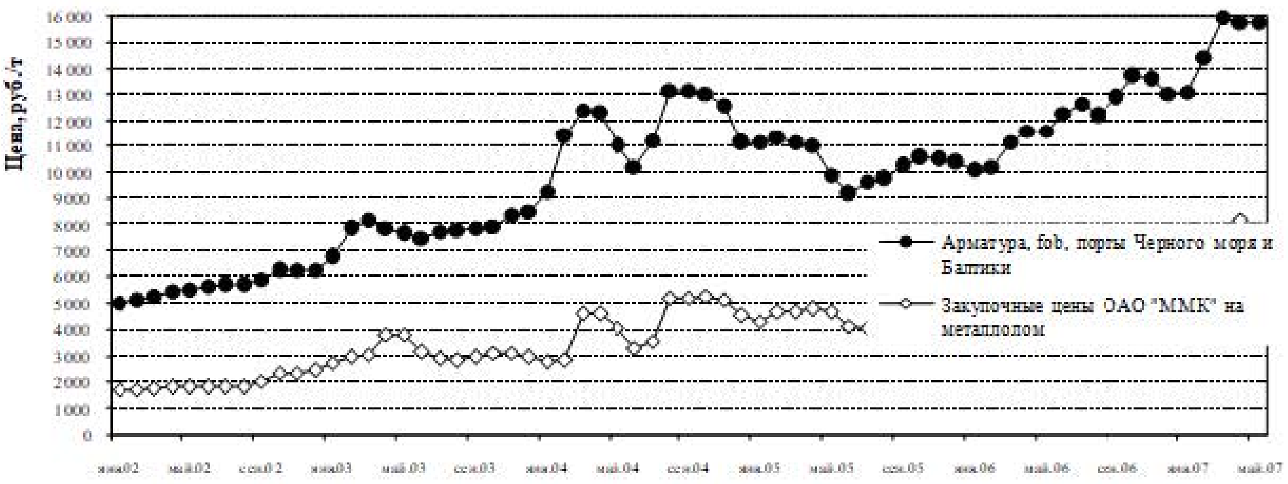


Рис. 3.4. Динамика цен на арматуру и металлолом

От оценки рыночной коньюнктуры, характеристики влияния рыночных факторов и прогноза дальнейшей динамики цен на лом черных металлов зависит эффективность деятельности ломопереработчика.

Рассмотрим эконометрическую модель прогноза закупочных цен на лом на примере ОАО «Магнитогорский металлургический комбинат». Адекватность модели во многом зависит от выбора факторов, их точности и достоверности. В [13] ***отобраны следующие факторы*** для построения модели:

– поставка на внутренний рынок, тыс. т ($X1$);

– поставка на экспорт, тыс. т ($X2$);

– цены на лом, Турция, cif, руб./т [16] ($X3$);

– поставка на ОАО «ММК», тыс. т ($X4$);

– остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т ($X5$).

– цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т [16] ($X6$).

Исходя из понимания того, что реальные данные всегда имеют распределение, отличное от нормального, для восстановления зависимости целесообразно применять непараметрический подход, включая доверительное оценивание параметров вероятностной модели и прогностической функции [6].

Таблица 3.4

Исходные данные для построения модели расчета цен ОАО «ММК» на лом марки 3А

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т**	Поставка на экспорт, тыс. т**	Цены на лом, Турция, cif, руб./т**	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т*	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т*	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т**	Закупочные цены ОАО «ММК» на лом, руб./т*
	*X*1	*X*2	*X*3	*X*4	*X*5	*X*6	*Y*
янв. 03	662	256	4 464	65 810	77 849	6 745	2 750
фев. 03	715	212	5 092	85 046	67 695	7 830	2 950
март 03	842	416	5 033	104 212	33 533	8 178	3 050
апр. 03	1 209	482	4 760	166 203	34 091	7 865	3 800
май 03	1 492	542	4 267	247 723	109 589	7 637	3 800
июнь 03	1 298	628	3 860	247 555	217 976	7 468	3 150
июль 03	1 057	667	4 250	168 568	264 461	7 742	2 900
авг. 03	1 126	725	4 460	125 541	281 170	7 798	2 825
сен. 03	1 144	702	4 884	116 449	282 234	7 863	2 950
окт. 03	1 244	802	4 826	119 978	282 971	7 903	3 100
нояб. 03	1 123	717	4 923	123 509	296 580	8 347	3 100

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т**	Поставка на экспорт, тыс. т**	Цены на лом, Турция, cif, руб./т**	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т*	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т*	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т**	Закупочные цены ОАО «ММК» на лом, руб./т*
дек. 03	1 034	924	5 521	86 707	282 933	8 481	2 950
янв. 04	719	869	6 547	40 027	224 376	9 234	2 761
фев. 04	789	847	7 520	27 144	143 178	11 348	2 824
март 04	1 210	969	7 562	207 303	97 722	12 413	4 602
апр. 04	1 199	1 141	6 454	78 375	112 797	12 335	4 602
май 04	1 554	1 256	4 584	137 042	197 946	10 987	4 050
июнь 04	1 179	1 231	5 135	216 765	244 032	10 189	3 298
июль 04	1 230	1 189	6 732	188 504	232 936	11 196	3 540
авг. 04	1 447	1 340	6 975	120 708	222 165	13 146	5 201
сен. 04	1 359	1 400	7 086	134 830	319 025	13 150	5 201
окт. 04	1 649	1 318	7 795	261 497	374 111	13 030	5 268
нояб. 04	1 423	1 394	7 579	191 016	398 175	12 584	5 141
дек. 04	1 247	1 405	6 557	152 518	409 001	11 106	4 543
янв. 05	733	926	7 142	58 251	319 696	11 148	4 307
фев. 05	957	816	6 771	56 763	219 397	11 338	4 661
март 05	1 132	1 032	7 328	75 006	149 786	11 133	4 661

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т**	Поставка на экспорт, тыс. т**	Цены на лом, Турция, cif, руб./т**	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т*	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т*	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т**	Закупочные цены ОАО «ММК» на лом, руб./т*
апр. 05	1 542	1 429	6 578	123 000	100 000	11 014	4 779
май 05	1 740	1 437	5 501	294 793	242 233	9 891	4 661
июнь 05	1 599	1 252	4 952	295 934	397 205	9 148	4 130
июль 05	1 307	968	6 026	161 804	353 555	9 642	4 071
авг. 05	1 427	1 189	6 834	137 785	357 436	9 710	4 660
сен. 05	1 942	1 466	7 095	207 267	404 595	10 217	4 660
окт. 05	2 005	1 214	6 055	272 533	529 378	10 539	5 723
нояб. 05	1 532	980	6 126	155 956	513 734	10 470	5 133
дек. 05	1 301	1 210	5 905	141 797	496 039	10 341	4 130

Примечание. * Фактические данные ОАО «ММК».

** По данным аналитического агентства «Металл-Курьер».

Предполагается, что переменные связаны линейной регрессионной зависимостью вида:

$$Y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \ldots + b_nx_n,$$

где Y — зависимая переменная (цена на лом марки 3А); x_i — независимые переменные (факторы); b_i — регрессионные коэффициенты.

Исходные данные за период 2003–2005 гг. приведены в табл. 3.4.

С помощью модуля «Множественная регрессия» пакета STATISTICA определены регрессионные коэффициенты (табл. 3.5) [1, 18] и коэффициенты линейной корреляции Пирсона (табл. 3.5, 3.6).

Наиболее сильные связи можно отметить между ценами на лом и такими факторами, как цены на арматуру в портах, цены на импортируемый лом в Турции и объемы поставки на внутренний рынок России и на экспорт.

Таблица 3.5

Характеристика связи цены и факторов

Независимые переменные		**Регрессионные коэффициенты**	**Коэффициенты корреляции**
*X*1	Поставка на внутренний рынок, тыс. т	2,009	0,772
*X*2	Поставка на экспорт, тыс. т	–1,076	0,806
*X*3	Цены на лом, Турция, cif, руб./т	0,136	0,768
*X*4	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т	–0,925	0,644
*X*5	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т	0,708	0,393
*X*6	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т	0,326	0,837

Примечание. * Для осуществления расчетов применяем пакет STATISTICA, а именно модуль «Множественная регрессия» *(Multiple Regression)*.

При этом необходимо отметить существенную взаимозависимость между такими факторами, как поставка на внутренний рынок и поставка на ОАО «ММК» (табл. 3.6). Это связано с тем, что периоды роста объемов закупа лома и накопления зимних запасов по разным комбинатам (которые и задают совокупный рост внутреннего рынка) часто совпадают.

Таблица 3.6

Взаимозависимость факторов

Факторы	***X*1**	***X*2**	***X*3**	***X*4**	***X*5**	***X*6**
***X*1**	–	–0,089	0,004	–0,452	–0,035	0,001
***X*2**	–0,089	–	0,001	0,056	–0,102	–0,021
***X*3**	0,004	0,001	–	0,038	–0,016	–0,008
***X*4**	–0,452	0,056	0,038	–	–0,028	–0,005
***X*5**	–0,035	–0,102	–0,016	–0,028	–	0,018
***X*6**	0,001	–0,021	–0,008	–0,005	0,018	–

Результаты прогнозирования приведены в табл. 3.7 Коэффициент детерминации для модели составляет $R^2 = 0{,}91$. (**Коэффициент детерминации** — это квадрат коэффициента линейной корреляции между зависимой переменной и прогностической функцией.) Это означает, что отобранные факторы на 91 % объясняют дисперсию зависимой переменной — цены на лом черных металлов.

На рис. 3.5 видно, что математическая модель достаточно точно показывает динамику цен в течение года, есть основания использовать ее для долгосрочного прогнозирования. Прогнозирование на краткосрочные периоды требует ежемесячного пересчета для уточнения модели.

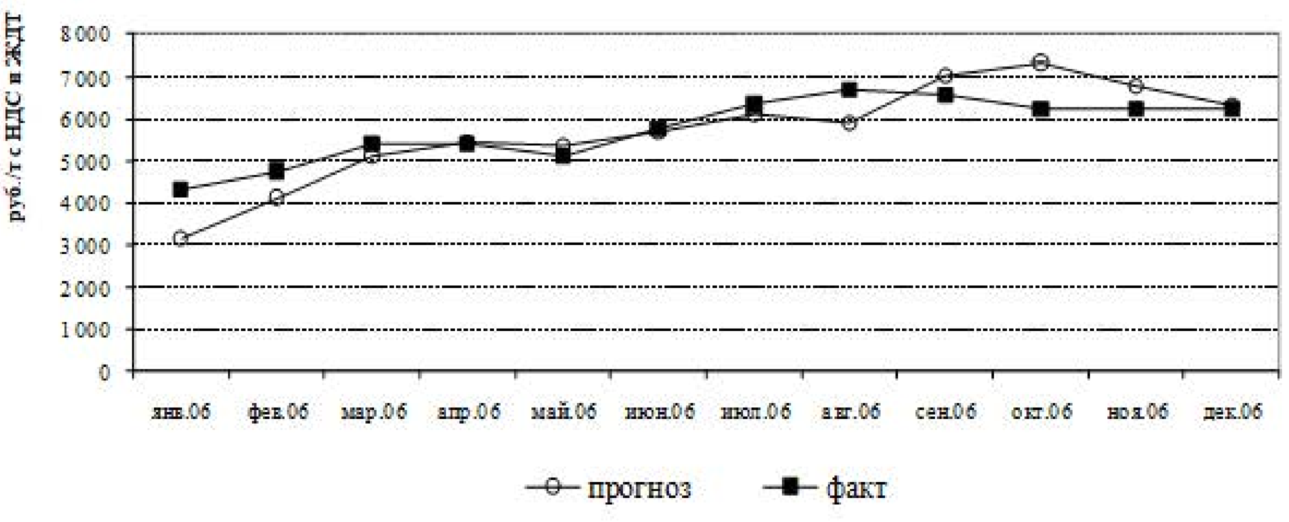


Рис. 3.5. Сопоставление прогнозных и фактических закупочных цен ОАО «ММК» на лом черных металлов в 2006 г.

Таблица 3.7

Прогноз закупочных цен ОАО «ММК» на лом черных металлов

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т	Поставка на экспорт, тыс. т	Цены на лом, Турция, cif, руб./т	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т	Прогноз цен ОАО «ММК» на лом, руб./т	Закупочные цены ОАО «ММК» на лом, руб./т	Отклонения	
	Коэффициенты регрессии									
	*X*1	*X*2	*X*3	*X*4	*X*5	*X*6	*Y*			
	2,01	–1,08	0,14	–0,93	0,71	0,33	–1570,3		**руб./т**	**%**
янв. 06	532	576	5 937	51	354	10 037	3 164	4 336	1 172	27,03
фев. 06	875	364	6 569	53	256	10 178	4 142	4 773	631	13,21
март 06	1 346	573	6 829	91	174	11 150	5 122	5 430	308	5,68
апр. 06	1 652	925	7 308	204	180	11 583	5 464	5 430	–34	–0,63
май 06	1 776	1 199	7 036	300	292	11 583	5 371	5 133	–238	–4,64
июнь 06	1 816	1 298	7 717	295	345	12 277	5 707	5 800	93	1,60
июль 06	1 980	1 301	7 536	371	470	12 650	6 150	6 372	222	3,49
авг. 06	2 128	1 588	6 771	410	609	12 177	5 942	6 726	784	11,65
сен. 06	2 171	974	7 248	393	714	12 864	7 066	6 608	-458	–6,93
окт. 06	2 037	757	7 334	443	827	13 700	7 350	6 281	–1 069	–17,01
нояб. 06	1 815	901	7 386	390	881	13 575	6 804	6 281	–523	–8,32
дек. 06	1 692	1 008	7 525	275	814	13 013	6 336	6 281	–55	–0,87

Наиболее высокие ошибки прогноз показывает в январе — феврале (27 %), августе (12 %) и октябре (17 %). Средняя абсолютная ошибка прогноза составляет 466 руб./т, средняя относительная ошибка — 8,4 %, среднеквадратическая ошибка прогноза — 593 руб./т.

Ошибки (т. е. отклонения факта от прогноза) объясняются воздействием неучтенных в модели факторов. В частности, отклонение в январе — феврале связано с суровыми зимними условиями в 2006 г., которые привели к осложнению и практическому прекращению ломосбора на территории России. В результате первые месяцы года сталепроизводители работали в основном за счет накопленных накануне остатков на складах, поступление лома было минимальным, что привело к существенному росту цен.

По аналогии с прошлыми годами в июле — августе 2006 г. прогноз показывает снижение цен на рынке, а в сентябре — октябре, наоборот, рост. Однако летом 2006 г. комбинаты повели себя иначе. Низкий уровень ломосбора на территории страны в первой половине года (в связи с затяжной зимой) и недостаточные объемы поступления металлолома потребителям явились причиной того, что к концу первого полугодия на складах комбинатов оставалось не более 30–40 % необходимого уровня складских запасов. В результате уже в июле потребители приступили к формированию зимних запасов на складах, что повлекло за собой рост цен. Ценовой максимум в 2006 г. был достигнут не в октябре, как в предыдущие годы, а в августе, и в сентябре уже началось постепенно снижение уровня цен.

Еще одним фактором такой динамики послужил существенный рост потребления на рынке в связи с вводом новых производственных мощностей. В частности, ОАО «ММК» в 2006 г. запустило две электросталеплавильные печи, в результате потребность в привозном металлоломе выросла с 1,9 млн т в 2005 г. до 3,2 млн т в 2006 г., прирост составил 65,4 %. Рост потребности ведет к обострению конкуренции на рынке, и так как цена является основным рычагом привлечения лома, комбинаты начинают вести активную ценовую политику, стараясь регулировать потоки лома.

Кроме того, на рыночную конъюнктуру оказывают влияние политические факторы, реализация различных государственных программ: лицензирование поставщиков металлолома, изменение экспортных пошлин, изменение правил налогообложения ломозаготовительных организаций (например, введение льготного режима по налогу на добавленную стоимость для ломоперерабатывающих организаций). Также значительное влияние на цены оказывает внутренняя политика организации: волевые решения менеджеров, наличие оборотных средств для осуществления расчетов с поставщиками и формирования запасов на складах.

Таким образом, одной из основных сложностей в получении точных прогнозов экономических показателей являются неожиданные и важные сдвиги в ключевых экономических факторах, а также влияние социально-экономических факторов, которые невозможно учесть с помощью математики. Очевидно, что для корректировки математического прогноза, для принятия обоснованных решений в области ценообразования важно также опираться на опыт, знания и интуицию специалистов [6]. Для этих целей используются методы экспертных оценок (см. гл. 5).

В состав экспертной комиссии целесообразно включить высококвалифицированных опытных специалистов, непосредственно участвующих в процессе ценообразования и занимающихся реализацией лома черных металлом (руководителей отделов сбыта, маркетинга и сотрудников данных отделов), а также независимых аналитиков, оказывающих информационные и консультационные услуги на рынке (представителей аналитических агентств). Сбор экспертной информации для целей прогнозирования цен на лом предлагается проводить ежемесячно. Прогнозные оценки экспертов могут быть получены на 1 месяц вперед и на длительный период — до 1 года. Полученная от экспертов информация позволяет скорректировать прогноз, полученный с помощью метода наименьших квадратов, и выработать «грамотную» ценовую стратегию и стратегию поведения на рынке (подходящих моментов для закупа и реализации металлолома).

Таким образом, в ходе анализа реальных данных установлено, что эконометрическая регрессионная модель достаточно точно описывает динамику цен на рынке лома в течение года, поэтому есть основания использовать ее для долгосрочного прогнозирования. С другой стороны, можно отметить существенные отклонения в отдельные периоды, что связано в первую очередь с действием неучтенных в модели факторов. Учесть их влияние и скорректировать результаты, полученные с помощью метода наименьших квадратов, возможно с помощью метода экспертных оценок. Применение статистических и экспертных методов в совокупности для целей прогнозирования цен на лом черных металлов позволяет ломоперерабатывающему предприятию своевременно реагировать на изменения рыночных факторов и строить с учетом этого свою ценовую политику.

3.5. О ВЫБОРЕ ВИДА РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Одни и те же данные можно обрабатывать различными способами. Например, как уже отмечалось, функцию спроса можно приближать линейной зависимостью или степенной. Можно попробовать применить квадратическую зависимость или многочлен третьего порядка и т. д. Какую же организационно-экономическую модель использовать? Очевидно, ту, которая лучше других соответствует реальным данным. Но что значит «лучше соответствует»? Как измерять качество модели?

Основной показатель качества регрессионной модели. На первый взгляд, показателем отклонений данных от модели может служить остаточная сумма квадратов SS. Чем этот показатель меньше, тем приближение лучше, значит, и модель лучше описывает реальные данные. Однако это рассуждение годится только для моделей с одинаковым числом параметров. Ведь если добавляется новый параметр, по которому можно минимизировать, то и минимум, как правило, оказывается меньше.

В качестве основного показателя качества регрессионной модели используют оценку остаточной дисперсии (т. е. дисперсии погрешностей e_k), скорректированную на число m параметров, оцениваемых по наблюдаемым данным:

$$\hat{\sigma}^2(m) = \frac{SS}{n-m},$$

где, как и раньше, n — объем данных (число векторов, по которым восстанавливается зависимость). В случае задачи восстановления линейной функции одной переменной, рассмотренной в начале главы, оценка остаточной дисперсии имеет вид:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS}{n-2},$$

поскольку число оцениваемых параметров $m = 2$.

Почему эта формула отличается от приведенной в разд. 3.1? Там в знаменателе n, а здесь — $(n - 2)$. Дело в том, что там была рассмотрена непараметрическая теория при большом объеме данных (при $n \to \infty$). А при безграничном возрастании n разница между n и $(n - 2)$ сходит на нет; точнее, отношение этих величин стремится к 1.

Однако при подборе вида модели знаменатель дроби, оценивающей остаточную дисперсию, приходится корректировать на число параметров. Если этого не делать, то придется заключить, что всегда многочлен второй степени лучше соответствует данным, чем линейная функция, многочлен третьей степени лучше приближает исходные данные, чем многочлен второй степени, и т. д. В конце концов доходим до многочлена степени (n – 1) с n коэффициентами, который проходит через все заданные точки (существование такого многочлена доказывают в курсе высшей алгебры). Но его прогностические возможности, скорее всего, существенно меньше, чем у линейной функции. *Излишнее усложнение статистических моделей вредно.*

Типовое поведение скорректированной оценки остаточной дисперсии:

$$v(m) = \hat{\sigma}^2(m)$$

в зависимости от параметра m в случае расширяющейся системы моделей выглядит так. Сначала наблюдаем заметное убывание. Затем оценка остаточной дисперсии колеблется около некоторой константы (теоретического значения дисперсии погрешности).

Поясним ситуацию на примере модели восстановления зависимости, выраженной многочленом:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_m t^m.$$

Пусть эта модель справедлива при $m = m_0$. При $m < m_0$ в скорректированной оценке остаточной дисперсии учитываются не только погрешности измерений, но и соответствующие (старшие) члены многочлена (предполагаем, что коэффициенты при них отличны от 0). При $m \geq m_0$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} v(m) = \sigma^2.$$

Следовательно, скорректированная оценка остаточной дисперсии будет колебаться около указанного предела. Поэтому в качестве оценки неизвестной статистику степени многочлена (полинома) можно использовать, например, первый локальный минимум скорректированной оценки остаточной дисперсии, т. е.

$$m^* = \min\{m : v(m-1) > v(m), \quad v(m) \leq v(m+1)\}.$$

В работе [19] найдено предельное распределение этой оценки степени многочлена.

Теорема 3.2. При справедливости некоторых внутриматематических условий регулярности

$$\lim_{n\to\infty} P(m^* < m_0) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} P(m^* = m_0 + u) = \lambda(1-\lambda)^u, \ \ u = 0,1,2,....,$$

где

$$\lambda = \Phi(1) - \Phi(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \approx 0,68268.$$

Таким образом, предельное распределение оценки m^* степени многочлена (полинома) является геометрическим (одно из известных в теории вероятностей параметрических семейств распределений). Это означает, в частности, что оценка не является состоятельной. При этом вероятность получить меньшее значение, чем истинное, исчезающе мала. Далее имеем:

$$P(m^* = m_0) \to 0,68268, \quad P(m^* = m_0 + 1) \to 0,68268(1-0,68268) = 0,21663,$$

$$P(m^* = m_0 + 2) \to 0,68268(1-0,68268)^2 = 0,068744,$$

$$P(m^* = m_0 + 3) \to 0,68268(1-0,68268)^3 = 0,021814...$$

Разработаны и иные методы оценивания неизвестной степени многочлена, например путем многократного применения процедуры проверки адекватности регрессионной зависимости с помощью статистики Фишера [20]. Предельное поведение оценок таково же, как в приведенной выше теореме, только значение параметра λ иное. Разработаны также состоятельные оценки степени полинома [21].

Регрессия как условное математическое ожидание. Во всех рассмотренных выше постановках вид регрессионной зависимости задавался исследователем. Это линейная функция, или многочлен, или элемент иного параметрического семейства. Однако откуда уверенность, что семейство выбрано правильно? А если исследователь ошибся? Тогда к случайным ошибкам добавляется методическая. Например, данные приближаются линейной функцией, а на самом деле зависимость квадратическая. Тогда разность между этими функциями (тоже квадратическая функция) и есть методическая ошибка.

Избежать методической ошибки можно, не задавая априори вид регрессионной зависимости. Продемонстрируем это на примере оценивания условного математического ожидания.

Рассмотрим общее понятие регрессии как условного математического ожидания. Пусть случайный вектор ($x(\omega)$, $y(\omega)$) (здесь ω — элементарный исход опыта) имеет плотность $p(x, y)$. Как известно из любого курса теории вероятностей, плотность условного распределения $y(\omega)$ при условии $x(\omega) = x_0$ имеет вид:

$$p(y \mid x) = p(y \mid x(\omega) = x_0) = \frac{p(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy}.$$

Условное математическое ожидание, т. е. регрессионная зависимость y от x, имеет вид:

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y p(y \mid x) dy = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y p(x, y) dy}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy}.$$

Таким образом, для нахождения оценок регрессионной зависимости достаточно найти оценки совместной плотности распределения вероятности $p_n(x, y)$, такие, что

$$p_n(x, y) \to p(x, y)$$

при $n \to \infty$. Тогда непараметрическая оценка регрессионной зависимости, построенная с помощью замены неизвестной исследователю плотности совместного распределения на непараметрическую состоятельную оценку этой плотности, т. е.

$$f_n(x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y p_n(x, y) dy}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_n(x, y) dy},$$

при $n \to \infty$ является состоятельной оценкой регрессии как условного математического ожидания:

$$f_n(x) \to f(x).$$

Общий подход к построению непараметрических оценок плотности распределения вероятностей развит в гл. 7.

Рассмотренный подход к восстановлению зависимости может быть применен для анализа статистических данных произвольной природы, в частности нечисловых данных [22, 23].

Регрессионному анализу (т. е. методам восстановления зависимостей) посвящена огромная литература (по нашей оценке, не менее 100 тыс. книг и статей на различных языках). Многообразие моделей регрессионного анализа проанализировано в [24]. Типовые ошибки при использовании коэффициентов корреляции и детерминации рассмотрены в [24]. Регрессионный анализ хорошо представлен в программных продуктах по анализу данных, особенно та его часть, которая связана с методом наименьших квадратов.

3.6. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ РЕГРЕССИОННЫХ ПРЯМЫХ

Рассмотрим несколько конкретных практически важных задач регрессионного анализа. Они нужны для решения организационно-экономических проблем прогнозирования на промышленном предприятии [26]. В настоящем разделе в рамках непараметрической вероятностно-статистической модели (т. е. без предположения о нормальности распределения погрешностей) получим асимптотическое распределение точки пересечения (встречи) двух регрессионных линейных зависимостей. Для этого на основе метода линеаризации выпишем выражения для асимптотической дисперсии точки встречи и границ доверительного интервала для нее [27].

Постановка задачи. Пусть зависимость от времени t некоторого показателя $x_1(t)$ технического уровня или качества продукции предприятия «Альфа» описывается линейной функцией:

$$x_1(t) = a_1 t + d_1.$$

Пусть аналогичный показатель у его конкурента (ОАО «Бета») также описывается линейной функцией, но с другими коэффициентами:

$$x_2(t) = a_2 t + d_2.$$

Предположим, что предприятие «Альфа» находится в положении догоняющей стороны. Это значит, что в рассматриваемый момент времени t_0 (например, «сегодня») значение показателя у его продукции ниже: $x_1(t_0) < x_2(t_0)$, но темп роста у предприятия «Альфа» выше, чем у конкурента: $a_1 > a_2$.

Возникает естественный вопрос: когда предприятие «Альфа» догонит конкурента? Другими словами, в какой момент времени будет выполнено равенство $x_1(t) = x_2(t)$? Решая относительно t уравнение:

$$a_1 t + d_1 = a_2 t + d_2,$$

получаем, что встреча произойдет в момент:

$$t_B = \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2}.$$

Представляют интерес еще две величины. Во-первых, уровень качества, при котором предприятие «Альфа» сравняется с конкурентом, т. е. общий уровень качества в момент встречи:

$$x = x_1(t_B) = x_2(t_B) = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 - a_2}.$$

Во-вторых, временной лаг, т. е. величина отставания предприятия «Альфа» в рассматриваемый момент времени t_0. В какой (более ранний) момент времени t_k конкурент имел тот уровень качества, которого предприятие «Альфа» достигло сейчас? Для ответа на этот вопрос надо решить уравнение $x_2(t) = x_1(t_0)$. Решением является:

$$t_k = \frac{x_1(t_0) - d_2}{a_2}.$$

Следовательно, предприятие «Альфа» отстает на

$$L = t_0 - t_k = \frac{(a_2 - a_1)t_0 + d_2 - d_1}{a_2} = \frac{x_2(t_0) - x_1(t_0)}{a_2}$$

единиц времени (лет).

В реальных ситуациях линейные зависимости неизвестны. Однако известны исходные данные $(t_{i1};\ x_{i1})$, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, для предприятия «Альфа» и $(t_{j2}; x_{j2})$, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, для предприятия-конкурента. При этом значения показателя $x_1(t_{i1}) = x_{i1}$ у предприятия «Альфа» в моменты времени t_{i1} представляются в виде:

$$x_1(t_{i1}) = x_{i1} = a_1t_{i1} + d_1 + e_{i1},\ i = 1, 2, \ldots, n(1),$$

где коэффициенты a_1 и d_1 неизвестны статистику, а e_{i1} — погрешности измерения (невязки). Будем считать, что e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, — совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D(e_{i1}) = \sigma^2{}_1$, неизвестной статистику.

Для предприятия-конкурента справедливо аналогичное представление:

$$x_2(t_{j2}) = x_{j2} = a_2t_{j2} + d_2 + e_{j2},\ j = 1, 2, \ldots, n(2),$$

где коэффициенты a_2 и d_2 неизвестны статистику, а e_{j2} — погрешности измерения (невязки). Примем, что e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, — совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D(e_{i2}) = \sigma^2{}_2$, неизвестной статистику.

Примем, что две совокупности случайных величин e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, и e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, независимы между собой. В каждой совокупности случайные величины одинаково распределены, но функции распределения, соответствующие разным совокупностям (т. е. предприятию «Альфа» и предприятию-конкуренту), могут различаться между собой.

Подчеркнем, что в рассматриваемой вероятностно-статистической модели не предполагается, что эти функции распределения входят в какое-либо параметрическое семейство распределений (в частности, не предполагаем, что невязки имеют нормальное распределение). Это и значит, что рассматривается непараметрическая постановка. Однако считаем, что объемы данных $n(1)$ и $n(2)$ достаточно велики, так что можно применять центральную предельную теорему и приближать совместное распределение оценок метода наименьших квадратов с помощью многомерного нормального распределения.

Итак, решение задачи о точке встречи получим в рамках непараметрической вероятностно-статистической модели. Весьма частный случай, когда невязки e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, и e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, имеют нормальное распределение, рассмотрен в [28].

Метод решения. Рассмотрим метод решения задачи о встрече. Вместо неизвестных статистику зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будем использовать их оценки $x^*_1(t)$ и $x^*_2(t)$, полученные методом наименьших квадратов. Для этого необходимо оценить коэффициенты по правилам, полученным в разд. 3.1, а затем рассчитать оценки момента встречи t^*_B, уровня качества в момент встречи $x^* = x^*_1(t^*_B) = x^*_2(t^*_B)$ и временного лага (величины отставания):

$$L^* = \frac{x_2^*(t_0) - x_1^*(t_0)}{a_2^*},$$

используя оценки коэффициентов зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ вместо неизвестных истинных коэффициентов.

Полезным является, как и в разд. 3.1, использование центрирования средними значениями независимой переменной при параметризации зависимостей:

$$x_1(t) = a_1(t - t_{\text{ср}}(1)) + b_1 = a_1 t + d_1;$$

$$x_2(t) = a_2(t - t_{\text{ср}}(2)) + b_2 = a_2 t + d_2,$$

где

$$t_{cp}(1) = \frac{t_{11} + t_{21} + ... + t_{n(1)1}}{n(1)},\ t_{cp}(2) = \frac{t_{12} + t_{22} + ... + t_{n(2)2}}{n(2)}. \qquad (3.9)$$

Таким образом,

$$d_k = b_k - a_k t_{cp}(k), k = 1{,}2.$$

Дело в том, что асимптотическое описание совместного распределения коэффициентов проще в случае центрированной зависимости, в частности, оценки коэффициентов a^*_k, b^*_k, $k = 1{,}2$, асимптотически независимы.

Как известно (разд. 3.1), оценки метода наименьших квадратов имеют вид:

$$a_k^* = \frac{\sum_{i=1}^{n(k)} x_{ik}(t_{ik} - t_{cp}(k))}{\sum_{i=1}^{n(k)} (t_{ik} - t_{cp}(k))^2}; \qquad (3.10)$$

$$b_k^* = x_{cp}(k) = \frac{x_{1k} + x_{2k} + ... + x_{n(k)k}}{n(k)}, k = 1{,}2. \qquad (3.11)$$

Точечные оценки момента встречи t^*_B, уровня качества в момент встречи x^* и временного лага L^* выражаются через оценки коэффициентов линейных зависимостей так:

$$t^*_в = \frac{d^*_2 - d^*_1}{a^*_1 - a^*_2} = \frac{b^*_2 - b^*_1 + a^*_1 t_{ср}(1) - a^*_2 t_{ср}(2)}{a^*_1 - a^*_2}; \qquad (3.12)$$

$$x^* = \frac{a^*_1 d^*_2 - a^*_2 d^*_1}{a^*_1 - a^*_2} = \frac{a^*_1 b^*_2 - a^*_2 b^*_1 + a^*_1 a^*_2 (t_{ср}(1) - t_{ср}(2))}{a^*_1 - a^*_2}; \qquad (3.13)$$

$$L^* = \frac{(a^*_2 - a^*_1)t_0 + d^*_2 - d^*_1}{a^*_2} = \frac{(a^*_2 - a^*_1)t_0 + b^*_2 - b^*_1 + a^*_1 t_{ср}(1) - a^*_2 t_{ср}(2)}{a^*_2}. \qquad (3.14)$$

Из приведенных формул вытекает, что

$$t^*_B = f_1(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2), \quad x^* = f_2(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2), \quad L^* = f_1(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2),$$

где

$$f_1(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4 - z_3 + z_1 t_{ср}(1) - z_2 t_{ср}(2)}{z_1 - z_2};$$

$$f_2(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 z_4 - z_2 z_3 + z_1 z_2 (t_{\text{ñð}}(1) - t_{\text{ñð}}(2))}{z_1 - z_2};$$

$$f_3(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_1)t_0 + z_4 - z_3 + z_1 t_{\text{ñð}}(1) - z_2 t_{\text{ñð}}(2)}{z_2}.$$

Поскольку все входящие в полученные формулы моменты времени предполагаются заданными (детерминированными), то интересующие нас оценки задаются гладкими функциями от четырехмерного вектора (a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2) оценок метода наименьших квадратов коэффициентов в линейных зависимостях.

Рассмотрим асимптотическое распределение вектора оценок МНК в рамках описанной выше непараметрической вероятностно-статистической модели (см. разд. 3.1).

Оценки a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2 являются несмещенными, их дисперсии таковы:

$$D(a^*_k) = \frac{\sigma^2_k}{\sum_{i=1}^{n(k)} (t_{ik} - t_{\text{ñð}}(k))^2}, \quad D(b^2_k) = \frac{\sigma^2_k}{n(k)}, \quad k = 1,2.$$

Отметим, что в соответствии с принятыми предположениями все четыре дисперсии стремятся к 0 при безграничном росте $n(1)$ и $n(2)$.

Все ковариации вектора $(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2)$ равны 0. Для пар координат с различающимися нижними индексами это вытекает из предположения о независимости между собой совокупностей невязок, соответствующих измерениям значений двух разных линейных функций. Для пар координат с одинаковыми нижними индексами, т. е. для пар (a^*_1, b^*_1) и (a^*_2, b^*_2), это установлено в разд. 3.1. Таким образом, в ковариационной матрице вектора $(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2)$ отличны от 0 только элементы, стоящие на главной диагонали, т. е. дисперсии.

Каждый из векторов (a^*_1, b^*_1) и (a^*_2, b^*_2) является суммой $n(1)$ и $n(2)$ слагаемых соответственно. Если каждое из слагаемых мало по сравнению со всей суммой, т. е. если

$$\lim_{n(k)\to\infty} \max_{1\le i\le n(k)} |t_{ik} - t_{ñð}(k)| \Big/ \left\{ \sum_{i=1}^{n(k)} (t_{ik} - t_{ñð}(k))^2 \right\}^{1/2} = 0, \quad k = 1,2,$$

то при больших $n(1)$ и $n(2)$ распределение вектора $(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2)$ приближается нормально распределенным случайным вектором с независимыми координатами. Математические ожидания и дисперсии координат приближающего вектора совпадают с одноименными характеристиками вектора $(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2)$. Другими словами, вектор $(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2)$ является асимптотически нормальным с указанными выше параметрами.

Рассмотрим распределение функции от вектора оценок МНК. Если функция $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ достаточно гладкая, то согласно методу линеаризации (см. прил. 1, разд. П.1.4 или [5, п. 4.4]):

$$f(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*) - f(a_1, a_2, b_1, b_2) = \frac{\partial f}{\partial z_1}\left(a_1^* - a_1\right) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z_2}\left(a_2^* - a_2\right) + \frac{\partial f}{\partial z_3}\left(b_1^* - b_1\right) + \frac{\partial f}{\partial z_4}\left(b_2^* - b_2\right)$$

с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка.

Как показано выше, правая часть последней формулы приближается суммой четырех независимых нормально распределенных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Следовательно, функция $f(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2)$ от вектора оценок МНК является асимптотически нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $f(a_1, a_2, b_1, b_2)$, совпадающим с теоретическим значением, и дисперсией:

$$Df(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 D(a_1^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 D(a_2^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 D(b_1^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial z_4}\right)^2 D(b_2^*).$$

Подставив приведенные выше значения дисперсий, получаем, что

$$Df(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n(1)} (t_{i1} - t_{ñð}(1))^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n(2)} (t_{i2} - t_{ñð}(2))^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{n(1)} + \left(\frac{\partial f}{\partial z_4}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{n(2)}.$$

Асимптотическое решение. Рассмотрим асимптотическое распределение момента встречи. Начнем с функции $t^*_B = f(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2)$. Имеем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1} = \frac{z_3 - z_4 + z_2(t_{ñð}(2) - t_{ñð}(1))}{(z_1 - z_2)^2}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = \frac{z_4 - z_3 + z_1(t_{ñð}(1) - t_{ñð}(2))}{(z_1 - z_2)^2};$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_3} = -\frac{1}{z_1 - z_2}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_4} = \frac{1}{z_1 - z_2}.$$

В приведенных выше формулах частные производные можно брать как в точке (a_1, a_2, b_1, b_2), так и в точке $(a^*_1, a^*_2, b^*_1, b^*_2)$. Различие — бесконечно малые величины более высокого порядка. Поскольку истинные значения коэффициентов линейных зависимостей неизвестны, частные производные будем брать в точке.

Из последних формул с помощью несложных преобразований получаем:

$$D(t_B^*) = \left(\frac{b_1^* - b_2^* + a_2^*(t_{ñð}(2) - t_{ñð}(1))}{(a_1^* - a_2^*)^2}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n(1)} (t_{i1} - t_{ñð}(1))^2} +$$

$$+ \left(\frac{b_1^* - b_2^* + a_1^*(t_{ñð}(2) - t_{ñð}(1))}{(a_1^* - a_2^*)^2}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n(2)} (t_{i2} - t_{ñð}(2))^2} + \frac{1}{(a_1^* - a_2^*)^2}\left(\frac{\sigma_1^2}{n(1)} + \frac{\sigma_2^2}{n(2)}\right). \quad (3.15)$$

Для практического применения полученных результатов остается заменить неизвестные дисперсии невязок σ_1^2 и σ_2^2 на их состоятельные оценки. При больших объемах данных $n(1)$ и $n(2)$ используют оценки дисперсий невязок:

$$(\sigma_1^2)^* = \frac{SS(1)}{n(1)}, \quad (\sigma_2^2)^* = \frac{SS(2)}{n(2)},$$

где $SS(1)$ и $SS(2)$ — соответствующие остаточные суммы квадратов:

$$SS(k) = \sum_{i=1}^{n(k)} (x_{ik} - x_k^*(t_{ik}))^2, \; k = 1,2. \tag{3.16}$$

Иногда рекомендуют применение несмещенных оценок дисперсий невязок:

$$(\sigma_1^2)^{**} = \frac{SS(1)}{n(1)-2}, \quad (\sigma_2^2)^{**} = \frac{SS(2)}{n(2)-2}. \tag{3.17}$$

Ясно, что с ростом объемов данных $n(1)$ и $n(2)$ различие между двумя последними формулами исчезает.

На основе полученных результатов легко указать методы доверительного оценивания и проверки гипотез для момента встречи t_B. Так, асимптотический доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности p, имеет вид:

$$\left[t_B^* - U(p)\{D^*(t_B^*)\}^{1/2};\; t_B^* + U(p)\{D^*(t_B^*)\}^{1/2}\right]. \tag{3.18}$$

Здесь $D^*(t^*_B)$ — только что описанная оценка дисперсии случайной величины t_B (с использованием той или иной оценки дисперсий невязок); $U(p)$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $(1 + p) / 2$, т. е. $\Phi(U(p)) = (1 + p) / 2$, где $\Phi(w)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Пример. В качестве примера рассмотрим показатели технического уровня продукции (в условных единицах) двух предприятий: ОАО «Альфа» и ОАО «Бета». Приведенные в табл. 3.8 данные показывают, что в 1999 г. первое предприятие отстает от второго, но постепенно сокращает разрыв, более быстрыми темпами наращивая показатель технического уровня. Когда же оно догонит второе предприятие?

Таблица 3.8

Показатели технического уровня продукции двух предприятий (в условных единицах, на конец года)

Годы	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Условные моменты времени $t_{i1} = t_{i2}$	1	2	3	4	5	6	7
Показатели ОАО «Альфа» x_{i1}	0,1	0,2	0,6	0,5	0,8	0,9	1,3
Восстановленные значения (предприятие «Альфа»)	0,06	0,25	0,44	0,63	0,82	1,01	1,2
Показатели ОАО «Бета» x_{j2}	0,6	0,95	0,8	1,2	1,1	1,2	1,4
Восстановленные значения (предприятие «Бета»)	0,71	0,82	0,93	1,04	1,15	1,26	1,37

Для проведения расчетов естественным образом введем условные моменты времени (табл. 3.8). Методом наименьших квадратов восстановим линейные независимости. По формуле (3.9) получаем, что $t_{\text{ср}}(1) = t_{\text{ср}}(2) = 4$. По формулам (3.10) и (3.11) находим оценки коэффициентов линейных зависимостей:

$$\hat{a}_1^* = 0{,}19\,;\ \hat{a}_2^* = 0{,}11\,;\ \hat{a}_1^* = 0{,}63\,;\ \hat{a}_2^* = 1{,}04\,.$$

Восстановленные зависимости имеют вид:

$$x_1^*(t) = 0{,}19(t-4) + 0{,}63\,;\ x_2^*(t) = 0{,}11(t-4) + 1{,}04\,.$$

Восстановленные значения приведены в табл. 3.2.

Оценку момента встречи t^*_B определим по формуле (3.12):

$$t_в^* = \frac{1{,}04 - 0{,}63 + 0{,}19 \cdot 4 - 0{,}11 \cdot 4}{0{,}19 - 0{,}11} = 9{,}13\,.$$

Другими словами, значения показателей технического уровня предприятий сравняются в начале 2008 г.

Это общее значение найдем по формуле (3.13):

$$x^* = \frac{0{,}19 \cdot 0{,}6 - 0{,}11 \cdot (-0{,}13) + 0{,}19 \cdot 0{,}11(4-4)}{0{,}19 - 0{,}11} = 1{,}6 .$$

Для определения временного лага, т. е. величины, показывающей на сколько ОАО «Альфа» отстает от предприятия-конкурента, для определенности, в 2004 г., воспользуемся формулой (3.14):

$$L^* = \frac{(0{,}11 - 0{,}19) \cdot 6 + 0{,}6 - (-0{,}13)}{0{,}11} = 2{,}27 .$$

Рассчитаем по формуле (3.18) асимптотический доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности p = 0,95. Для этого значения несмещенных оценок дисперсий невязок найдем по формуле (3.17), а значения остаточной суммы квадратов $SS(1)$ и $SS(2)$ определим по формуле (3.16). Получаем σ_1^2 = 0,01382, σ_2^2 = 0,0157. Асимптотическую дисперсию момента встречи найдем по формуле (3.15): $D(t_{в}^*) = 4{,}379$. Поскольку $U(p)$ = 1,96 при p = 0,95, то доверительный интервал таков (рис. 3.6):

$$\left[9{,}13 - 1{,}96\sqrt{4{,}379};\ 9{,}13 + 1{,}96\sqrt{4{,}379}\right] = \left[5{,}028; 13{,}23\right].$$

Таким образом, возможно, что обгон уже состоялся (в 2004 или 2005 г.), но это не отражено в табл. 3.8 из-за погрешностей, искажающих зависимости.

О практическом применении статистических оценок точки встречи. Необходимость получения приведенных выше результатов, касающихся оценок момента встречи t^*_B уровня качества в момент встречи x^* и временного лага L^*, была выявлена в результате решения прикладных проблем, возникших при разработке системы автоматического проектирования (САПР) стандартов на продукцию [29]. В этой системе реализуются функции информационного обеспечения и анализа данных о характеристиках качества группы отечественных и зарубежных образцов (марок, моделей) аналогичной продукции, требований нормативно-технической документации на эту продукцию, а также поддерживаются функции интерактивного (человеко-машинного) принятия решений по управлению качеством, сертификации и стандартизации.

Статистические методы в САПР стандартов используются для анализа распределений показателей качества продукции, исследования взаимосвязей показателей, выявления группировок продукции по уровню качества, анализа временных рядов и прогнозирования качества продукции.

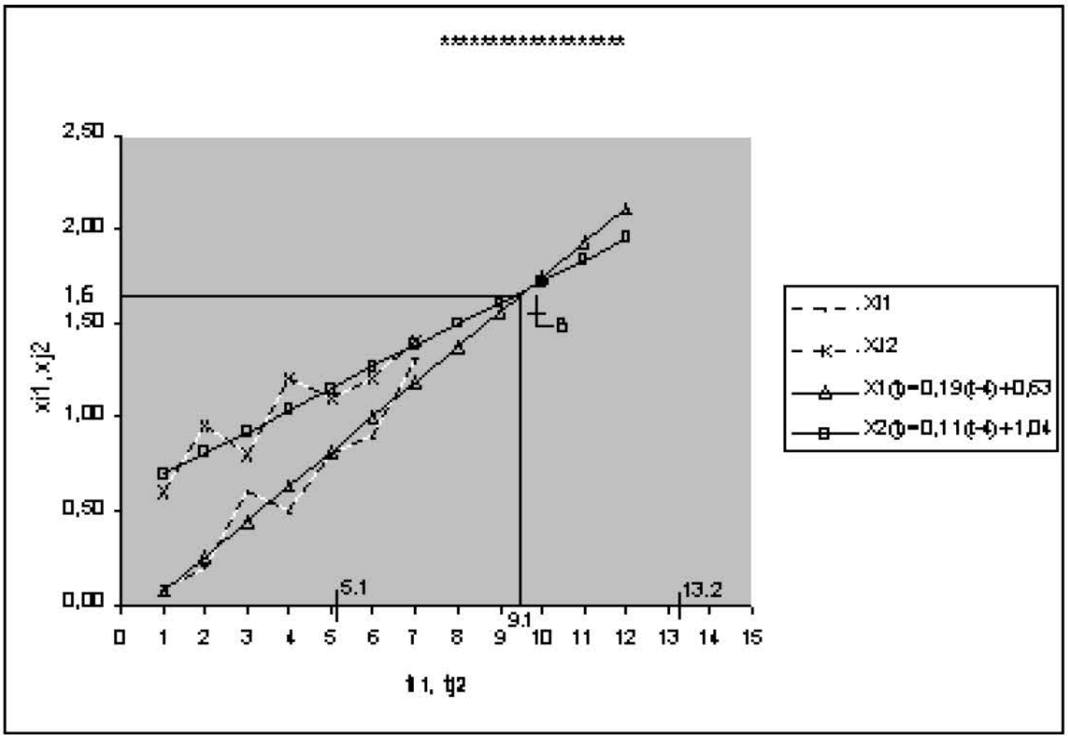


Рис. 3.6. Динамика показателей технического уровня
двух предприятий, восстановленные зависимости
и доверительное оценивание момента встречи

Основные проблемы программной реализации этих методов связаны с обеспечением интерактивного решения задач пользователями (инженерами по стандартизации и техническому регулированию), не имеющими специальной подготовки по статистическим методам. Кроме того, возникли специфические задачи, требующие совершенствования статистического аппарата, в частности задача сравнительного анализа тенденций развития отечественной и зарубежной групп продукции, решению которой и посвящены предыдущие страницы. Разработанное математическое и программное обеспечение применялось для анализа данных о характеристиках качества изделий электронной техники.

Разработанные в настоящем разделе методы могут быть использованы при решении различных практических задач, связанных с интервальной оценкой точки пересечения двух регрессионных прямых. В частности, они применены для получения асимптотических дисперсий уровня качества в момент встречи и временного лага (величины отставания) и разработки методов доверительного оценивания этих величин, используемых в системах управления промышленными предприятиями [30].

3.7. МОДЕЛЬ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Рассмотрим задачу восстановления зависимости $x = x(t)$ на основе набора n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, где t_k — значения независимой переменной, а x_k — соответствующие им значения зависимой переменной.

При анализе экономических данных возникает необходимость использования моделей временных рядов, включающих три составляющие: трендовую (T), периодическую, или циклическую (S) и случайную (E). Рассматривают [31] аддитивную модель $T + S + E$ и мультипликативную модель $T \times S \times E$.

Простейшая аддитивная модель имеет вид:

$$x_k = a\,(t_k - \bar{t}\,) + d + e_k = a\,(t_k - \bar{t}\,) + d + f(t_k) + E_k,\ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (3.19)$$

Здесь трендовая составляющая — линейная функция $a\,(t_k - \bar{t}\,) + d$ (как и в разд. 3.1, такая запись тренда предпочтительнее для облегчения выкладок); периодическая составляющая $f(t)$ обычно описывает сезонность, т. е. период известен (в зависимости от моделируемой организационно-экономической ситуации он равен году, неделе, суткам и т. п.); случайная составляющая представлена слагаемыми E_k, которые являются реализациями независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, неизвестной статистику. В модели (3.19) имеем:

$$e_k = f(t_k) + E_k, = 1, 2, \ldots, n.$$

В отличие от модели, изученной в разд. 3.1, отклонения от линейного тренда e_k в модели (3.19) не являются одинаково распределенными. Однако их распределения отличаются лишь сдвигами (на значения детерминированной периодической составляющей).

Соответствующая мультипликативная модель имеет вид:

$$y_k = [Bt_k^a] \times f_1(t_k) \times [1 + \varepsilon_k],\ \ k = 1,2,\ldots,n\,. \qquad (3.20)$$

В (3.20) сомножители имеют описанный выше смысл. При логарифмировании модель (3.20) переходит в аналог модели (3.19), следовательно, достаточно рассматривать модель (3.19).

Практическая значимость этой модели очевидна. Однако расчетные методы, описанные в [31], являются эвристическими. Цель настоящего раздела —

построить непараметрическую вероятностно-статистическую теорию прогноза временного ряда на базе линейного тренда с учетом аддитивной периодической составляющей. Изложение следует работам [32, 33].

Следуя эвристическому подходу [31], изучим асимптотическое поведение оценок МНК a^* и d^*, заданных формулами (3.3), установим их асимптотическую нормальность в предположениях модели (3.19), а затем состоятельно оценим периодическую составляющую $f(t)$ и построим интервальный прогноз для $x(t)$. В частности, выявится целесообразность анализа данных за полное число лет (периодов). В отличие от [34] (см. также [5, п. 10.2] и [6, п. 6.3]), длину периода оценивать не требуется, поскольку она задана из содержательных соображений (например, для данных разд. 3.4 — один год).

Асимптотические распределения оценок параметров. Из формулы (3.3) следует, что в принятых выше предположениях и обозначениях настоящего раздела:

$$d^* = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t}) + d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k \,. \qquad (3.21)$$

Согласно центральной предельной теореме (см. прил. 1) оценка d^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием:

$$d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

и дисперсией σ^2 / n, оценка которой приводится ниже.

Из формул (3.3) и (3.21) вытекает, что

$$x_k - \bar{x} = a(t_k - \bar{t}) + d + e_k - d - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = a(t_k - \bar{t}) + e_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k \,;$$

$$(x_k - \bar{x})(t_k - \bar{t}) = a(t_k - \bar{t})^2 + e_k(t_k - \bar{t}) - \frac{(t_k - \bar{t})}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k \,.$$

Последнее слагаемое во втором соотношении при суммировании по k обращается в 0, поэтому

$$a^* = a + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k = a + \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k E_k, \quad c_k = \frac{(t_k - \bar{t})}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2}\,. \qquad (3.22)$$

Формулы (3.22) показывают, что оценка a^* является асимптотически нормальной с математическим ожиданием:

$$a + \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k)$$

и дисперсией:

$$D(a^*) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D(E_k) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t})^2} .$$

Отметим, что многомерная нормальность имеет быть, когда каждое слагаемое в формуле (3.22) мало сравнительно со всей суммой, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \max | t_k - \bar{t} | / \{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t})^2\}^{1/2} = 0 . \tag{3.23}$$

Условие (3.23) выполнено, если t_k образуют (полную, т. е. без пропусков) арифметическую прогрессию, число членов которой безгранично растет.

Итак, дисперсии оценок МНК параметров a^* и b^* линейного тренда те же, что и при отсутствии сезонных искажений (см. разд. 3.1). А вот их математические ожидания зависят от периодической составляющей. Однако в случае

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} (t_k - \bar{t}_{cp}) f(t_k) = 0 \tag{3.24}$$

оценки a^* и b^* являются несмещенными.

Условия (3.24) являются принципиально важными. Они являются необходимыми и достаточными для несмещенности и состоятельности оценок, рассмотренных в настоящем разделе.

Справедливости первого из условий (3.21) можно добиться, изменив в случае необходимости свободный член d в модели (3.19). Некоторая проблема состоит в том, какую сумму значений периодической составляющей приравнивать к 0 — за период (например, за год) или за все время наблюдений (как и записано в (3.24)). С организационно-экономической точки зрения естественнее первое (т. е. приоритет отдается свойствам за период, интервал наблюдений может меняться, например расширяться со временем). Когда оба варианта дают одно и то же?

Первое из условий (3.24) можно считать выполненным, если t_i образуют (полную, т. е. без пропусков) арифметическую прогрессию, причем целое число шагов составляет один период (например, если измерения проводятся ежемесячно или раз в квартал, а период — год), и, кроме того, данные взяты за целое число периодов. Действительно, тогда естественно принять, что сумма значений периодической составляющей за период равна 0, поскольку в противном случае, как уже отмечалось, можно было бы скорректировать свободный член (т. е. по тем же соображениям, по которым принято условие нулевого математического ожидания случайных составляющих E_i).

Для справедливости второго из условий (3.24) достаточно добавить к сказанному предположения симметричности множества $\{t_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$ относительно $\bar{t}$ (например, начала года) и четности периодической составляющей $f(t)$ относительно той же точки. Последнее выполнено, если, например, график $f(t)$ симметричен относительно середины года.

Несмещенность (в предположениях (3.24)) и асимптотическая нормальность оценок метода наименьших квадратов позволяют легко указывать для них асимптотические доверительные границы и проверять статистические гипотезы, например о равенстве определенным значениям, прежде всего 0.

Асимптотическое распределение трендовой составляющей. Из формул (3.21) и (3.22) следует, что при справедливости (3.24):

$$M\{a^*(t-\bar{t})+d^*\} = M(a^*)(t-\bar{t})+M(d^*) = a(t-\bar{t})+d,$$

т. е. оценка $y^*(t) = a^*\,(t_k - \bar{t}\,) + d^*$ трендовой составляющей $y(t) = a\,(t - \bar{t}\,) + d$ рассматриваемой зависимости является несмещенной. Поэтому

$$D(y^*(t)) = D(a^*)(t-\bar{t})^2 + 2M\{(a^*-a)(d^*-d)(t-\bar{t})\} + D(d^*).$$

При этом, поскольку погрешности E_k независимы в совокупности и $M(E_k) = 0$, то

$$M\{(a^*-a)(d^*-d)(t-\bar{t})\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k(t-\bar{t})M(E_k^2) = \frac{1}{n}(t-\bar{t})\sigma^2\sum_{k=1}^{n} c_k = 0\,.$$

Таким образом,

$$D(y^*(t)) = \sigma^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(t-\bar{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} \right\}. \tag{3.25}$$

Итак, оценка $y^*(t)$ является несмещенной и асимптотически нормальной. Для ее практического использования (построения доверительных интервалов, проверки статистических гипотез) необходимо уметь оценивать остаточную дисперсию $M(E_k^2) = \sigma^2$.

В частности, не представляет труда выписывание нижней и верхней границ для трендовой составляющей прогностической функции:

$$y_{нижн}(t) = a^*(t-\bar{t}) + d^* - \delta(t), \quad y_{верх}(t) = a^*(t-\bar{t}) + d^* + \delta(t),$$

где полуширина доверительного интервала $\delta(t)$ имеет вид:

$$\delta(t) = U(\gamma)\sqrt{D^*(y^*(t))} = U(\gamma)\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t-\bar{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2}}\ . \tag{3.26}$$

Здесь γ — доверительная вероятность, $U(\gamma)$ — квантиль нормального распределения порядка $(1 + \gamma) / 2$, т. е.

$$U(\gamma) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. При $\gamma = 0{,}95$ (наиболее применяемое значение) имеем $U(\gamma) = 1{,}96$. В формуле (3.26) $D^*(y^*(t))$ — состоятельная оценка дисперсии $y^*(t)$. В соответствии с (3.25) она является произведением состоятельной оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей E_k на известную статистику детерминированную функцию от t.

Математическое ожидание остаточной суммы квадратов. В точках t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеются исходные значения зависимой переменной x_k и восстановленные значения $y^*(t_k)$.

Рассмотрим остаточную сумму квадратов:

$$SS=\sum_{k=1}^{n}(y^*(t_k)-x_k)^2=\sum_{k=1}^{n}\{(a^*-a)(t_k-\bar{t})+(d^*-d)-f(t_k)-E_k)^2.$$

Напомним, что при отсутствии периодической составляющей используют (см. разд. 3.1 и [6, п. 5.1, 5.2] состоятельные оценки σ* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей, построенные на основе остаточной суммы квадратов:

$$\sigma^*=\sqrt{\frac{SS}{n}} \text{ или } \sigma^*=\sqrt{\frac{SS}{n-2}}\,.$$

В соответствии с формулами (3.21) и (3.22) при справедливости условий (3.24):

$$SS=\sum_{k=1}^{n}\left\{(t_k-\bar{t})\sum_{j=1}^{n}c_jE_j+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E_j-f(t_k)-E_k\right\}^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]E_j-f(t_k)-E_k\right\}^2=\sum_{k=1}^{n}SS_k.$$

Найдем математическое ожидание каждого из слагаемых:

$$M(SS_k)=M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]E_j-f(t_k)-E_k\right\}^2==M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}^2-$$

$$-2M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}(f(t_k)+E_k)+M(f(t_k)-E_k)^2\,.$$

Поскольку E_k независимы, одинаково распределены и имеют нулевое математическое ожидание, то

$$M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}^2=\sum_{j=1}^{n}\left\{c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right\}^2\sigma^2\,.$$

Далее,

$$-2M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}(f(t_k)+E_k)=-2\left\{c_k(t_k-\bar{t})+\frac{1}{n}\right\}\sigma^2\,.$$

Наконец,

$$M(f(t_k)-E_k)^2 = f^2(t_k)+\sigma^2 .$$

На основе трех последних равенств можно показать, что при выполнении условия асимптотической нормальности (3.23):

$$\lim_{n\to\infty} M(SS_k) = f^2(t_k)+\sigma^2 .$$

Следовательно,

$$M\left(\frac{SS}{n}\right) = \sigma^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^2(t_k) . \qquad (3.27)$$

В правой части (3.27) первое слагаемое соответствует вкладу случайной составляющей, второе — вкладу периодической составляющей.

В некоторых случаях второе слагаемое в правой части (3.27) может быть известно из предыдущего опыта или же оценено экспертами, однако в большинстве ситуаций целесообразно исходить из оценки периодической составляющей.

Оценивание сезонной компоненты. Рассматривают как параметрические, так и непараметрические подходы. Популярный метод исходит из того, что достаточно гладкую функцию можно разложить в ряд Фурье и получить хорошее приближение с помощью небольшого числа гармоник. В простейшем случае — одна гармоника. Так, динамику индекса инфляции можно попытаться изучить с помощью модели:

$$x_k = a(t_k - \bar{t}\,) + d + f(t_k) + E_k = a(t_k - \bar{t}\,) + d +$$
$$+ g\cos(2\pi t_k) + E_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

(время t измеряется в годах). Тогда неизвестные параметры a, b, g оцениваются методом наименьших квадратов.

Однако обычно нет оснований предполагать, что периодическая составляющая входит в то или иное параметрическое семейство функций. Приходится строить непараметрические оценки. Опишем одну из возможных постановок.

Пусть в согласии с предположениями (3.24) рассматривается целое число периодов, т. е. $n = mq$, где n — объем наблюдений, m — количество периодов,

q — число наблюдений в одном периоде. Тогда в соответствии с определением периодической составляющей справедливы равенства:

$$f(t_s) = f(t_{q+s}) = f(t_{2q+s}) = \ldots = f(t_{(m-1)q+s}),\ \ s = 1,2,\ldots,q\,. \tag{3.28}$$

Если наблюдения проводятся ежемесячно в течение m лет, то число наблюдений в одном периоде $q = 12$, общий объем наблюдений $n = 12m$, далее, s — номер месяца в году, $s = 1, 2, \ldots, 12$. Пусть g_s — общее значение в (3.28). Требуется оценить $g_1, g_2, \ldots, g_q$.

Естественный подход состоит в том, чтобы усреднить m значений $x_k - y^*(t_k)$, соответствующих моментам времени, отстоящим друг от друга на целое число периодов. Другими словами, усреднить «очищенные» от трендовой составляющей исходные данные, соответствующие одноименным месяцам различных лет. Речь идет об оценках:

$$g_s^* = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{s+(j-1)q} - y^*(t_{s+(j-1)q})),\ \ s = 1,2,\ldots,q\,. \tag{3.29}$$

Оценка периодической составляющей распространяется на весь интервал наблюдений очевидным образом:

$$f^*(t_s) = f^*(t_{q+s}) = f^*(t_{2q+s}) = \ldots = f^*(t_{(m-1)q+s}) = g_s^*,\ \ s = 1,2,\ldots,q\,. \tag{3.30}$$

Сложив восстановленные значения трендовой и периодической составляющей, получим оценку зависимости, «очищенную» от случайной составляющей:

$$x^*(t) = y^*(t) + f^*(t) = a^*(t - \bar{t}) + d^* + f^*(t)\,. \tag{3.31}$$

Здесь оценки a^* и d^* находят по формулам (3.3), а оценки $f^*(t)$ — по формулам (3.29)–(3.30).

С помощью формулы (3.31) можно строить точечный прогноз, используя ее вне интервала наблюдений. Для этого достаточно распространить сезонную составляющую $f^*(t)$ вплоть до рассматриваемого момента времени по правилу (3.30) и суммировать ее с прогнозом трендовой составляющей $y^*(t)$. Интерполяция и экстраполяция на моменты времени t, не входящие в исходное множество $\{t_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ и множества, полученные из него сдвигами на целое число периодов, могут быть осуществлены путем линейной интерполяции ближайших значений или иным методом сглаживания.

Обсудим свойства оценок (3.29)–(3.31).

При безграничном росте объема данных и справедливости условий (3.23) и (3.24) оценки a^* и d^* параметров трендовой составляющей являются состоятельными и несмещенными, а потому, как можно показать, в рассматриваемых в настоящем разделе условиях суммы (3.29) оценивают периодическую составляющую состоятельно (при $m \to \infty$) и несмещенно. Как следствие,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[f^*(t_k)]^2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^2(t_k) \to 0 \tag{3.32}$$

по вероятности при $n \to \infty$. В соответствии с (3.27) последнее соотношение дает возможность оценить σ^2, а затем построить интервальный прогноз для трендовой составляющей согласно (3.26).

Отметим, что в рассматриваемой ситуации, как правило, n растет, увеличиваясь на величины, кратные q — числу наблюдений в одном периоде. Как следствие, уменьшаемое в (3.32) — константа, зависимости от n нет. Эти особенности связаны с тем, что выполнение условий (3.24) предполагает рассмотрение целого числа периодов.

Рассмотрим оценки (3.29) подробнее. Как вытекает из (3.19), (3.28) и (3.29),

$$g_s^* = f(t_s) - (a^* - a)\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(t_{s+(j-1)q} - \bar{t}) - (d^* - d) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E_{s+(j-1)q}, \quad s = 1,2,...,q \; .$$

С учетом (3.21), (3.22) и (3.24) получаем, что

$$g_s^* = f(t_s) - \left(\sum_{k=1}^{n} c_k E_k\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(t_{s+(j-1)q} - \bar{t})\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E_{s+(j-1)q}, \quad s = 1,2,...,q \; .$$

Таким образом,

$$g_s^* = f(t_s) + \sum_{k=1}^{n} h_{ks} E_k, \quad s = 1,2,...,q \; , \tag{3.33}$$

где $h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q, j = 1,2,...,m\}$, и $h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n}$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, и $r_s = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(t_{s+(j-1)q} - \bar{t})$.

Соотношение (3.33) означает, что рассматриваемые оценки есть суммы независимых случайных величин, а потому с помощью центральной предельной теоремы можно построить доверительные интервалы для рассматриваемых значений периодической составляющей (в предположении справедливости условий (3.23)).

Интервальный прогноз. Точечный прогноз строят по формуле (3.28) на основе $x^*(t)$ — оценки зависимости, «очищенной» от случайной составляющей, но включающей трендовый и периодический компоненты. Если выполнены условия (3.24), то

$$Mx^*(t) = x(t) = a\,(t - \bar{t}\,) + d + f(t),$$

т. е. оценка $x^*(t)$ является несмещенной.

При справедливости условий (3.24) с учетом (3.21), (3.22) и (3.33) получаем, что для момента времени t, входящего в исходное множество $\{t_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$ или в множества, полученные из него сдвигами на целое число периодов,

$$x^*(t) - x(t) = (t - \bar{t})\sum_{k=1}^{n} c_k E_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k + \sum_{k=1}^{n} h_{ks} E_k\,. \tag{3.34}$$

В (3.34) при определении значений коэффициентов h_{ks} в качестве s следует взять номер наименьшего из исходных моментов времени $\{t_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$, отстоящих от рассматриваемого момента t на целое число периодов. С помощью (3.33) заключаем, что

$$x^*(t) - x(t) = \sum_{k=1}^{n} w_{ks} E_k\,,$$

где $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s) + \frac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q, j = 1,2,...,m\}$, и $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s)$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, и r_s — то же, что и в формуле (3.33).

В правой части формулы (3.34) стоит сумма независимых случайных величин, поэтому оценка $x^*(t)$ является асимптотически нормальной (при справедливости условий (3.23)) с математическим ожиданием $x(t)$ и дисперсией:

$$D(x(t)) = \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2 D(E_k) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2 . \tag{3.35}$$

Следовательно, нижняя $x_{нижн}(t)$ и верхняя $x_{верх}(t)$ доверительные границы для прогностической функции (с учетом как трендовой, так и периодической составляющих) имеют вид:

$$x_{нижн}(t) = a^*(t - \bar{t}) + d^* + f^*(t) - \Delta(t),\ \ x_{верх}(t) = a^*(t - \bar{t}) + d^* + f^*(t) + \Delta(t),$$

где

$$\Delta(t) = U(\gamma)\sqrt{D^*(x^*(t))} = U(\gamma)\sigma^* \sqrt{\sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2} . \tag{3.36}$$

Здесь γ — доверительная вероятность, $U(\gamma)$ — квантиль нормального распределения порядка $(1 + \gamma) / 2$. В формуле (3.36) $D^*(x^*(t))$ — состоятельная оценка дисперсии точечного прогноза $x^*(t)$. В соответствии с (3.35) она является произведением состоятельной оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей E_k на известную статистику детерминированную функцию от t. Величину σ^* рассчитывают согласно (3.27) и (3.32).

Подведем итоги. По сравнению с эвристическими алгоритмами, разобранными в [31] и других литературных источниках, разработанная в настоящем разделе (см. также [35–37]) теория позволила:

1) дать общее обоснование этим алгоритмам в рамках асимптотических методов математической статистики и указать условия их применимости (формула (3.23));

2) выявить принципиально важные условия (3.24), необходимые и достаточные для несмещенности и состоятельности рассматриваемых оценок;

3) построить доверительные интервалы для зависимости (прогностической функции) и ее трендовой составляющей.

В рамках математической статистики удается провести анализ не всех распространенных эвристических алгоритмов. Так, довольно часто рекомендуют вначале провести сглаживание («выравнивание») временного ряда, например методом скользящих средних [31, с. 137]. При этом периодическая (сезонная) составляющая меняется, а погрешности (отклонения от суммы трендовой и периодической составляющих) становятся зависимыми случайными величинами, что делает невозможным применение описанных в настоящем разделе методов.

Пример применения непараметрического метода наименьших квадратов в модели с периодической составляющей. Обработаем фактические данные ОАО «Магнитогорский металлургический комбинат» о закупочных ценах на лом черных металлов (табл. 3.4). Как показывают обсуждения в разд. 3.4, может быть использована рассмотренная в настоящем разделе аддитивная модель (3.19) линейного тренда с периодической составляющей. Для облегчения понимания оставим из каждого квартала данные только по одному месяцу. Введем условные моменты времени, а именно будем измерять время в кварталах начиная с первого квартала 2003 г. Исходные данные для демонстрации примера применения непараметрического метода наименьших квадратов в модели с периодической составляющей — пары чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, 12,$ — представлены в табл. 3.9 в столбцах (3) и (4) соответственно.

Таблица 3.9

Построение модели прогнозирования цен на лом марки 3А

№ п/п	**Период**	**Условные моменты времени**	**Закупочные цены, руб./т**	**Оценка тренда**	**Отклонения от оценки тренда**	**Восстановленные значения**	**Кажущиеся невязки**
k		t_k	x_k	$y^*(t_k)$	$x_k - y^*(t_k)$	x_k^*	$x_k - x_k^*$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	янв. 03	1	2 750	2 800	–50	2 424	326
2	апр. 03	2	3 800	3 012	788	3 545	255
3	июль 03	3	2 900	3 224	–324	2 655	245
4	окт. 03	4	3 100	3 437	–337	3 848	–748
5	янв. 04	5	2 761	3 649	–888	3 273	–512
6	апр. 04	6	4 602	3 861	741	4 394	208
7	июль 04	7	3 540	4 073	–533	3 504	36
8	окт. 04	8	5 268	4 286	982	4 697	571
9	янв. 05	9	4 307	4 498	–191	4 122	185
10	апр. 05	10	4 779	4 710	69	5 243	–464
11	июль 05	11	4 071	4 922	–851	4 353	–280
12	окт. 05	12	5 723	5 135	588	5 546	177

По формулам (3.3) найдем оценки параметров a^* и d^*, что позволяет построить оценку трендовой составляющей:

$$y^*(t) = a^*(t - \bar{t}) + d^* = 212{,}26\,(t - 6{,}5) + 3\,967{,}17 = 212{,}26t + 2\,587{,}48.$$

Численные значения трендовой составляющей приведены в столбце (5) табл. 3.9.

Рассчитав отклонения исходных значений закупочных цен от оценок трендовой составляющей (столбец (6) табл. 3.9), возведя их в квадрат и сложив, получаем остаточную сумму квадратов $SS = 4\,539\,214$ и $SS\ /\ n = SS\ /\ 12 = 378\,267{,}83$.

Сгруппировав отклонения исходных значений закупочных цен от оценок трендовой составляющей по месяцам (табл. 3.10), наглядно убеждаемся в наличии периодической составляющей. Взяв среднее арифметическое отклонений от тренда за конкретный месяц, рассчитываем оценку $f^*(t_s)$ периодической составляющей (в соответствии с формулой (3.29)). Результаты приведены в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Оценивание периодической составляющей

Номер квартала s	**Месяц**	**Отклонения от тренда**			**Оценка $g^*_s = f^*(t_s)$ периодической составляющей**
		В 2003 г.	**В 2004 г.**	**В 2005 г.**	
1	Январь	–50	–888	–191	–376
2	Апрель	788	741	69	533
3	Июль	–324	–533	–851	–569
4	Октябрь	–337	982	588	411

Рассчитав по формуле (3.30) оценки периодической составляющей на весь интервал времени и сложив их с оценками трендовой составляющей, получаем в соответствии с формулой (3.31) оценку зависимости, «очищенную» от случайной составляющей, т. е. восстановленные значения (столбец (7) табл. 3.9). Кажущиеся невязки, т. е. отклонения исходных значений закупочных цен от восстановленных значений, приведены в столбце (8) табл. 3.9. Сравнивая столбцы (6) и (8), убеждаемся в целесообразности введения в модель периодической составляющей. В 9 случаях из 12 абсолютные величины отклонений уменьшились, в остальных трех хотя и возросли, но лишь до среднего уровня среди остальных.

Возведя в квадрат оценки периодической составляющей (табл. 3.10), сложив эти квадраты, умножив на число лет и поделив на n, получаем, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f^*(t_k)\right)^2 = 229\ 537.$$

В соответствии с формулой (3.27) оценкой дисперсии случайной составляющей является:

$$\left(\sigma^*\right)^2 = \frac{SS}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f^*(t_k)\right)^2 = 378\ 267{,}83 - 229\ 537 = 148\ 731,$$

а оценкой среднего квадратического отклонения:

$$\sigma^* = \sqrt{148731} = 385{,}7\ .$$

В соответствии с формулами (3.21) и (3.22) оценим дисперсии оценок параметров:

$$D^*(a^*) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D^*(E_k) = \frac{(\sigma^*)^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} = \frac{148731}{143} = 1040,$$

$$D^*(d^*) = \frac{(\sigma^*)^2}{n} = \frac{148731}{12} = 12394..$$

Средние квадратические отклонения a^* и d^* оцениваются как 32,25 и 111,33 соответственно, а доверительные интервалы, соответствующие доверительной вероятности 0,95, таковы:

$$[a_{\min}; a_{\max}] = [149{,}05;\ 275{,}47];\ [d_{\min}; d_{\max}] = [3748{,}96;\ 4185{,}38].$$

Первое из условий (3.24) выполнено в силу построения оценок периодической составляющей по целому числу периодов. Действительно, согласно данным табл. 3.10 сумма оценок периодической составляющей для 12 точек наблюдений равна (–3), незначительное отклонение от 0 вызвано ошибками округления.

В соответствии с формулой (3.22) смещение оценки a* оценивается как

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f^*(t_k) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t}) f^*(t_k)}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} = \frac{5568}{143} = 38{,}94 .$$

Таким образом, смещение имеет тот же порядок, что и среднее квадратичное отклонение оценки a*, и заведомо меньше, чем полуширина доверительного интервала. Дальнейшее сравнение может быть проведено на основе оценки дисперсии смещения — случайной величины:

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t}) f^*(t_k)}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} .$$

Алгоритм вычисления дисперсии Z аналогичен таковым для периодической составляющей и интервального прогноза (см. (3.33) и (3.35) соответственно), но более сложен, поэтому не включен в учебник.

Таким образом, можно считать, что предположения (3.24) модели (3.19) выполнены для данных табл. 3.9.

Перейдем к оценке дисперсий значений периодической составляющей. Как следует из равенства (3.33):

$$D(g_s^*) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} h_{ks}^2, \quad s = 1,2,\dots,q ,$$

где $h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q, j = 1,2,\dots,m\}$, и $h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n}$ при иных значениях индекса суммирования k, и $r_s = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(t_{s+(j-1)q} - \bar{t})$.

Начнем со значения s = 1 (периодическая составляющая для января). Тогда $r_1 = \frac{1}{3}\big((1-6{,}5)+(5-6{,}5)+(9-6{,}5)\big) = -1{,}5$.

Понадобятся значения:

$$c_k = \frac{t_k - \bar{t}}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} = \frac{t_k - 6{,}5}{143} = \frac{k - 6{,}5}{143}.$$

Расчет удобно проводить с помощью таблицы (табл. 3.11).

Таблица 3.11

Расчет дисперсии периодической составляющей

k	$t_k - \bar{t}$	$c_k r_1$	$-1 / n$	$+1 / m$	h_{k1}	h^2_{k1}
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	–5,5	0,0577	–0,0833	0,3333	0,3077	0,09468
2	–4,5	0,0472	–0,0833	–	–0,0361	0,00130
3	–3,5	0,0367	–0,0833	–	–0,0466	0,00217
4	–2,5	0,0262	–0,0833	–	–0,0571	0,00326
5	–1,5	0,0157	–0,0833	0,3333	0,2657	0,07060
6	–0,5	0,0052	–0,0833	–	–0,0781	0,00610
7	0,5	–0,0052	–0,0833	–	–0,0885	0,00783
8	1,5	–0,0157	–0,0833	–	–0,0990	0,00980
9	2,5	–0,0262	–0,0833	0,3333	0,2238	0,05009
10	3,5	–0,0367	–0,0833	–	0,1200	0,01440
11	4,5	–0,0472	–0,0833	–	0,1305	0,01703
12	5,5	–0,0577	–0,0833	–	0,1410	0,01988

В табл. 3.11 столбец (3) получен из столбца (2) умножением на r_1 / 143 = = –1,5 / 143 = –0,01049, каждый элемент столбца (6) равен сумме элементов столбцов (3), (4) и (5), стоящих в той же строке, а в столбце (7) стоят квадраты соседних элементов из столбца (6). Цель построения табл. 3.11 — расчет суммы элементов столбца (7). Эта сумма равна 0,28275. Следовательно,

$$\sqrt{D^*(g_1^*)} = \sigma^* \sqrt{\sum_{k=1}^{n} h_{k1}^2} = 385{,}7 \times \sqrt{0{,}28275} = 204{,}8.$$

Доверительный интервал для значения периодической составляющей в январе (–376 – 1,96 × 204,8; –376 + 1,96 × 204,8) захватывает 0 (при доверительной вероятности 0,95), отличие значения периодической составляющей от 0 не значимо (на уровне значимости 0,05).

Аналогичный случай для значения s = 2 (периодическая составляющая для апреля) дает:

$$\sum_{k=1}^{n} h_{k2}^2 = 0{,}25524,\ \sqrt{D^*(g_2^*)} = \sigma^* \sqrt{\sum_{k=1}^{n} h_{k2}^2} = 385{,}7 \times \sqrt{0{,}25524} = 194{,}86\,.$$

Доверительный интервал для значения периодической составляющей в апреле (533 – 1,96 × 194,86; 533 + 1,96 × 194,86) = (533 – 381,93; 533 + 381,93) не захватывает 0 (при доверительной вероятности 0,95), отличие значения периодической составляющей от 0 значимо (на уровне значимости 0,05).

Приступим к завершающему этапу анализа данных табл. 3.9 — построению интервального прогноза. Необходимо рассчитать величины $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s) + \dfrac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q, j = 1,2,...,m\}$, и $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s)$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, где r_s — то же, что и в формуле (3.33), поскольку точечный прогноз $x^*(t)$ является несмещенным, асимптотически нормальным, а его дисперсия оценивается согласно (3.35) так:

$$D^*(x^*(t)) = (\sigma^*)^2 \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2\,.$$

Начнем с прогноза на январь 2006 г. (по данным за 2003–2005 гг.). Тогда t = 13, s = 1, r_1 = –1,5, $w_{k1} = 8c_k + 1/3$, если $k \in \{1 + 4(j-1), j = 1, 2, 3\}$, и $w_{k1} = 8c_k$ при всех остальных значениях индекса суммирования. При этом

$$8c_k = 8\frac{k - 6{,}5}{143} = \frac{8k - 52}{143}\,.$$

Расчет удобно проводить с помощью таблицы (табл. 3.12).

Сумма значений, стоящих в последнем столбце табл. 3.12, равна 0,61299. Согласно формуле (3.36):

$$\Delta(13) = U(0{,}95)\sqrt{D^*(x^*(13))} = 1{,}96 \times 385{,}7 \times \sqrt{0{,}61299} = 591{,}88\,.$$

Таблица 3.12

Расчет дисперсии прогностической функции

k	$(8k - 52) / 143$	$1 / m$	w_{k1}	w_{k1}^2
1	–0,3077	0,3333	0,0256	0,00066
2	–0,2517	–	–0,2517	0,06336
3	–0,1958	–	–0,1958	0,03834
4	–0,1399	–	–0,1399	0,01957
5	–0,0839	0,3333	0,2494	0,06220
6	–0,0280	–	–0,0280	0,00078
7	0,0280	–	0,0280	0,00078
8	0,0839	–	0,0839	0,00700
9	0,1399	0,3333	0,4732	0,22392
10	0,1958	–	0,1958	0,03834
11	0,2517	–	0,2517	0,06336
12	0,3077	–	0,3077	0,09468

Согласно (3.31) точечный прогноз таков:

$$x^*(13) = a^*(13 - \bar{t}) + d^* + f^*(13) = 212{,}26 \times 13 + 2587{,}48 + (-376) = 4971.$$

Нижняя и верхняя доверительные границы для прогностической функции (с учетом как трендовой, так и периодической составляющих) имеют вид:

$$x_{нижн}(13) = 4971 - 592 = 4379, \quad x_{верх}(13) = 4971 + 592 = 5563.$$

Реальное значение (табл. 3.7) — 4 336. Оно практически совпадает с прогнозным значением $x_{нижн}(13)$. Прогноз оправдался.

Аналогичные расчеты для апреля 2006 г. (t = 14, s = 2, r_2 = –0,5) дают:

$$\Delta(14) = 1{,}96 \times 385{,}7 \times \sqrt{0{,}72480} = 643{,}60.$$

Точечный прогноз равен $x^*(14)$ = 6092, а нижняя и верхняя доверительные границы таковы: $x_{нижн}(14)$ = 5 448, $x_{верх}(14)$ = 6 736. Реальное значение (табл. 3.7) — 5 430. Оно практически совпадает с прогнозным значением $x_{нижн}(14)$. Как и в предыдущем случае, прогноз оправдался.

Как показано в настоящей главе, метод наименьших квадратов — мощный инструмент организационно-экономического моделирования [38]. Этот раздел эконометрики приносит ощутимую пользу экономистам и управленцам (менеджерам).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейн, Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. I / Ф. Клейн. — Москва : Ленинград : НКТП СССР, 1937. — 432 с.

2. *Майстров, Л.Е.* Теория вероятностей : исторический очерк / Л.Е. Майстров. — Москва : Наука, 1967. — 320 с.

3. *Орлов, А.И.* Современное состояние непараметрической статистики / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 106. — С. 239–269.

4. *Большев, Л.Н.* Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. — Москва : Наука, 1983. — 416 с.

5. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

6. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Саратов : ИНТУИТ : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 676 с.

7. *Орлов, А.И.* Основные требования к статистическим методам анализа данных / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2022. — № 181. — С. 316–343.

8. *Орлов, А.И.* Контроллинг статистических методов / А.И. Орлов // Контроллинг. — 2022. — № 4(86). — С. 2–11.

9. *Крамер, Г.* Математические методы статистики / Г. Крамер. — Москва : Мир, 1975. — 648 с.

10. *Кендэл, М.* Ранговые корреляции / М. Кендэл. — Москва : Статистика, 1975. — 216 с.

11. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: экспертные оценки : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 436 с.

12. *Орлов, А.И.* Статистические методы прогнозирования / А.И. Орлов // Малая российская энциклопедия прогностики. — Москва : Институт экономических стратегий, 2007. — С. 148–153.

13. *Крюкова, Е.М.* Применение методов организационно-экономического прогнозирования в отрасли лома черных металлов / Е.М. Крюкова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2008. — Т. 74. — № 7. — С. 67–72.

14. *Супрун, И.В.* Российский рынок лома и прогноз цен на 2007 год / И.В. Супрун // Рынок вторичных металлов. — 2005. — № 6. — С. 10–13.

15. *Макаров, Л.П.* Образование и потребление лома черных металлов / Л.П. Макаров // Рынок вторичных металлов. — 2003. — № 5. — С. 7–9.

16. *Плотников, А.Ю.* Базисные условия поставки международных контрактов Инкотермс-2000 / А.Ю. Плотников. — Москва : Экономика, 2002. — 222 с.

17. *Бобровиков, В.* STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов / В. Бобровиков. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Питер, 2003. — 688 с.

18. *Сидельников, Ю.В.* Прогнозирование знака разности между ценой металла и форвардного контракта на него (на примере меди, алюминия, никеля) / Ю.В. Сидельников, А.С. Танасова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2006. — № 11. — С. 59–65.

19. *Орлов, А.И.* Оценка размерности модели в регрессии / А.И. Орлов // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. Ученые записки по статистике. Т. 36. — Москва : Наука, 1980. — С. 92–99.

20. *Орлов, А.И.* Асимптотика некоторых оценок размерности модели в регрессии / А.И. Орлов // Прикладная статистика. Ученые записки по статистике, Т. 45. — Москва : Наука, 1983. — С. 260–265.

21. *Орлов, А.И.* Оценивание размерности вероятностно-статистической модели / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2020. — № 162. — С. 1–36.

22. *Орлов, А.И.* Статистика нечисловых данных за сорок лет (обзор) / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2019. — Т. 85. — № 11. — С. 69–84.

23. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: нечисловая статистика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 446 с.

24. *Орлов, А.И.* Многообразие моделей регрессионного анализа (обобщающая статья) / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2018. — Т. 84. — № 5. — С. 63–73.

25. *Орлов, А.И.* Ошибки при использовании коэффициентов корреляции и детерминации / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2018. — Т. 84. — № 3. — С. 68–72.

26. *Муравьева, В.С.* Организационно-экономические проблемы прогнозирования на промышленном предприятии / В.С. Муравьева, А.И. Орлов // Управление большими системами. — Москва : Изд-во ИПУ РАН, 2007. — № 17. — С. 143–158.

27. *Муравьева, В.С.* Непараметрическое оценивание точки пересечения регрессионных прямых / В.С. Муравьева, А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2008. — Т. 74. — № 1. — С. 63–68.

28. *Robinson, D.E.* Estimates for the points of intersection of two polynomial regressions / D.E. Robinson // Journal of American Statistical Association. — 1964. — Vol. 19. — № 2. — P. 214–238.

29. *Медведев, В.Н.* Программно-алгоритмическое обеспечение статистических методов в САПР стандартов / В.Н. Медведев, А.И. Орлов // Тезисы докладов III Всесоюзной школы-семинара «Программно-алгоритмическое обеспечение прикладного многомерного статистического анализа». — Москва : ЦЭМИ АН СССР, 1987. — С. 313–314.

30. *Муравьева, В.С.* Точка встречи: асимптотическое распределение уровня качества и временного лага / В.С. Муравьева // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2008. — Т. 74. — № 3. — С. 70–73.

31. Практикум по эконометрике : учебное пособие / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко [и др.] ; под редакцией И.И. Елисеевой. — Москва : Финансы и статистика. 2001. — 192 с.

32. *Орлов, А.И.* Непараметрический метод наименьших квадратов: учет сезонности / А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. — Пермь : Изд-во ПГНИУ, 2008. — С. 135–148.

33. *Орлов, А.И.* Непараметрический метод наименьших квадратов с периодической составляющей: условия применимости / А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. — Пермь : Изд-во ПГНИУ, 2010. — С. 96–108.

34. *Орлов, А.И.* Метод оценивания длины периода и периодической составляющей сигнала / А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. – Пермь : Изд-во ПГНИУ, 1999. — С. 38–49.

35. *Орлов, А.И.* Восстановление зависимости методом наименьших квадратов на основе непараметрической модели с периодической составляющей / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2013. — № 07(091). — С. 189–218.

36. *Орлов, А.И.* Непараметрический метод наименьших квадратов с периодической составляющей / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2014. — Т. 80. — № 1. — С. 65–75.

37. *Orlov, A.I.* Nonparametric Method of Least Squares: Accounting for Seasonality / A.I. Orlov // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 228. — № 5. — P. 501–509.

38. *Орлов, А.И.* Вероятностно-статистические модели корреляции и регрессии / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2020. — № 06(160). — С. 130–162.

39. *Емельянова, Е.А.* Методы прогнозирования продаж на предприятиях оптовой торговли / Е.А. Емельянова, А.И. Орлов // Контроллинг. — 2018. — № 1(67). — С. 68-76.

40. *Лындина, М.И.* Методы прогнозирования для ракетно-космической промышленности / М.И. Лындина, А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 09(103). — С. 196–221.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Имеются данные за несколько лет о торговом обороте Y западногерманского предприятия и его расходах на рекламу X. Данные представлены в таблице.

Расходы на рекламу и торговый оборот предприятия

Годы, t	68	69	70	71	72	73	74	75
Расходы на рекламу $X(t)$, тыс. марок	4	4	5	6	8	8	10	11
Торговый оборот $Y(t)$, млн марок	4	5	6	6	8	10	12	13

С помощью метода наименьших квадратов определите коэффициенты линейной регрессии $Y = aX + b$. Постройте график (заданные точки (x_i, y_i) и прямую $Y = a^*X + b^*$). Найдите доверительные границы для регрессионной зависимости (при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$). Нанесите доверительные границы на график. Сделайте точечный и интервальный прогноз для торгового оборота при расходах на рекламу, равных 15 (тыс. марок ФРГ).

Аналогичным образом изучите зависимости расходов на рекламу X и торгового оборота Y от времени t (за начало отсчета целесообразно взять 1971 г.).

2. Исходные данные (в таблице): набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \dots, n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции). Предполагается, что переменные связаны зависимостью:

$$x_k = at_k + b + e_k,\ k = 1, 2, \dots, n,$$

где a и b — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость.

Исходные данные для расчетов по методу наименьших квадратов

t_k	1	3	4	7	9	10
x_k	12	20	20	32	35	42

Методом наименьших квадратов оцените параметры a и b линейной зависимости. Выпишите восстановленную зависимость.

Вычислите восстановленные значения зависимой переменной, сравните их с исходными значениями (найдите разности) и проверьте условие точности вычислений (при отсутствии ошибок в вычислениях сумма исходных значений должна равняться сумме восстановленных).

Найдите остаточную сумму квадратов и оцените дисперсию погрешностей.

Выпишите точечный прогноз, а также верхнюю и нижнюю доверительные границы для него (для доверительной вероятности 0,95).

Рассчитайте прогнозное значение и доверительные границы для него для момента $t = 12$.

Как изменятся результаты, если доверительная вероятность будет увеличена? А если она будет уменьшена?

3. Покажите, что формулы (3.1), (3.3) и (3.4) задают одну и ту же оценку a^* параметра a.

4. Выведите формулы расчета асимптотических доверительных границ для параметров a и d (с заменой в выражениях для дисперсий оценок a^* и d^* неизвестной величины σ^2 на ее состоятельную оценку).

5. Разработайте методы проверки статистических гипотез о равенстве параметров a и d определенным значениям, прежде всего 0.

6. Как в методе наименьших квадратов используются преобразования переменных?

7. Как связаны коэффициент линейной корреляции Пирсона и непараметрический коэффициент ранговой корреляции Спирмена?

8. Как метод наименьших квадратов используется для прогнозирования цен в отрасли лома черных металлов?

9. Как метод линеаризации позволяет построить доверительный интервал для точки пересечения двух регрессионных прямых?

10. Сравните модели порождения данных при наличии периодической составляющей (разд. 3.7) и без таковой (разд. 3.1). Что при расчетах по методу наименьших квадратов является общим и в чем проявляется различие?

11. Примените методы разд. 3.7 к данным табл. 3.4 (шесть вариантов — соответственно зависимым переменным $X1$–$X6$). Образец расчетов приведен в примере в конце разд. 3.7.

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ, РЕФЕРАТОВ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Примеры практического использования метода наименьших квадратов (см., например, [39]).

2. Для непараметрической модели метода наименьших квадратов в случае линейной функции одной переменной разработайте алгоритмы:

а) расчета доверительных границ для коэффициентов модели;

б) проверки гипотез относительно этих коэффициентов.

3. Докажите, что сумма исходных значений зависимой переменной должна быть равна сумме восстановленных значений.

4. Критерии качества регрессионной модели.

5. Доказательство теоремы о предельном геометрическом распределении первого локального минимума остаточной дисперсии как оценки степени многочлена, описывающего зависимость.

6. Состоятельные оценки степени многочлена, описывающего регрессионную зависимость.

7. Использование непараметрических оценок плотности для восстановления зависимости.

8. Статистические методы прогнозирования и роль в них метода наименьших квадратов (на основе [12, 26, 49]).

9. Разработайте способы проверки условий применимости методов разд. 3.7 (условий (3.24)).

Для этого изучите распределение случайной величины:

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})f^*(t_k)}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2}.$$

Докажите асимптотическую нормальность случайной величины Z, найдите ее математическое ожидание и дисперсию, проведите вычисления для данных табл. 3.9.

10. Методы выявления информативного подмножества признаков в регрессионном анализе (на основе [23]).

11. Проблема мультиколлениарности в регрессионном анализе (на основе [9]). (**Мультиколлинеарность** *(multicollinearity)* — ситуация, при которой одна или более независимых переменных, входящих в уравнение регрессии, являются точными линейными функциями от одной или более других независимых переменных того же уравнения. При приближении к такой ситуации оценки параметров модели становятся неустойчивыми. Чтобы сделать их более устойчивыми, применяют специальные приемы, например гребневую регрессию.)

12. Варианты метода наименьших квадратов в нелинейных (по параметрам) моделях.

13. Применение матричной алгебры в линейном регрессионном анализе.

14. Регрессионный анализ в статистике нечисловых данных.

15. Регрессионный анализ интервальных данных.

16. Регрессионный анализ нечетких переменных (см. прил. 2 к настоящему учебнику).

ГЛАВА 4. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНФЛЯЦИИ

Каждый день мы встречаемся с такими экономическими величинами, как цены на товары и услуги. Как правило, они изменяются с течением времени. Вполне естественно подвергнуть динамику цен на товары и услуги анализу с позиций организационно-экономического моделирования и эконометрики.

Под инфляцией в настоящей главе, как и в учебнике [1], понимаем повсеместно наблюдаемый рост цен. Как следствие, покупательная способность денежных единиц (рублей, евро, долларов США и др.) падает. Следовательно, при анализе экономических процессов, протяженных во времени, при сравнении стоимостных характеристик необходимо переходить к сопоставимым ценам. Это невозможно сделать без расчета индекса роста цен, т. е. индекса инфляции. Проблема состоит в том, что цены на разные товары растут с различной скоростью, и необходимо эти скорости усреднять. Продемонстрируем свойства индекса инфляции и алгоритмы его расчета на примере минимальной потребительской корзины продовольственных товаров, которая была разработана в Институте высоких статистических технологий и эконометрики МГТУ им. Н.Э. Баумана на основе физиологических норм потребления. Затем разберем различные применения индексов инфляции в экономических расчетах.

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И РАСЧЕТ ИНДЕКСА ИНФЛЯЦИИ

Краткая история инфляции в России на рубеже тысячелетий. Цены на продовольственные товары (хлеб, молоко и т. п.) в СССР определялись государственными органами и не менялись в течение десятилетий — с начала 1960-х гг. Конец этого периода — 2 апреля 1991 г., когда постановлением Правительства СССР цены на основные потребительские товары были подняты в 2–3 раза.

По сообщению Государственного комитета по статистике (сегодня — Росстат), к концу 1991 г. (к моменту развала СССР) цены выросли в 2,6 раза. Со 2 января 1992 г. началась — уже в Российской Федерации — так называемая «либерализация цен», в ходе которой торговые организации стали самостоятельно устанавливать цены. В результате за год цены выросли в 26,1 раз. С тех пор рост цен не прекращался. К июлю 2007 г. цены выросли примерно в 60 000 раз, а к декабрю 2008 г. — в 100 000 раз. Однако в январе 1998 г. была проведена так называемая «деноминация», во всех записях стоимостных характеристик были отброшены три нуля, т. е. цены (и доходы) формально уменьшились в 1 000 раз. Как следствие, цены июля 2007 г. в 60 раз превышают цены марта 1991 г. (и предыдущих лет), цены декабря 2008 г. — соответственно в 100 раз, а цены июня 2023 г. — в 350 раз.

Итак, цены к июлю 2007 г. выросли в 60 раз, т. е. покупательная способность рубля сократилась в 60 раз. Другими словами, 60 руб. июля 2007 г. соответствуют 1 руб. 1990 г. Это простое соотношение позволяет сопоставлять доходы и расходы, разделенные 17 годами.

Замечание 1. С течением времени любая конкретная дата уходит в прошлое. А вместе с ней — и все конкретные численные значения экономических величин. Примем для сравнения цен март 1991 г. и июль 2007 г. Первая из этих дат — конец стабильности цен в СССР, вторая — начало мирового экономического кризиса, прервавшего рост российской экономики в период стабильности (1999–2007). Читатель сможет перейти к интересующему его моменту с помощью эконометрических методов, разобранных в настоящей главе.

Замечание 2. Мы специально разбираем примеры и проводим обсуждения для достаточно давно прошедших дат, поскольку хотим избежать дискуссий о современном положении дел. Проще говоря, чтобы отделить научные положения от текущих политических вопросов.

Пример приведения к сопоставимым ценам. Рассмотрим часто обсуждаемый экономический показатель — среднюю заработную плату в России. (Здесь рассматриваем среднюю арифметическую зарплат, т. е. результат деления фонда оплаты труда на число работников.) По данным государственных статистических органов, средняя заработная плата в декабре 1990 г. составляла 303 руб., а в апреле 2007 г. — 12 510 руб. Рост в 41,29 раза. Однако цены выросли в 60 раз, поэтому 12 510 руб. 2007 г. соответствуют 12 510 / 60 = = 208,50 руб. 1990 г., т. е. в апреле 2007 г. реальная средняя заработная плата составляет 208,50 / 303 × 100 % = 68,81 % от уровня 1990 г., другими словами, сократилась в 1,45 раза. При этом способе расчета мы привели данные 2007 г. к сопоставимым ценам 1990 г.

Можно поступить и противоположным образом: привести данные 1990 г. к сопоставимым ценам 2007 г. А именно, если проиндексировать заработную плату 1990 г., т. е. умножить ее на индекс инфляции, показывающий рост цен (в рассматриваемом случае — на 60), то получим 303 × 60 = 18 180 руб. — вот такой должна была бы быть средняя заработная плата в 2007 г., если бы она росла теми же темпами, как и цены. Проиндексированная заработная плата в 18 180 / 12 510 = 1,45 раз выше реально начисленной, т. е. реальная средняя заработная плата уменьшилась за 17 лет в 1,45 раз, как и было получено при предыдущем расчете.

Рост цен для различных товаров и услуг. Цены на те или иные товары и услуги растут с различной скоростью. Например, в табл. 4.1 приведены данные о ценах на несколько видов товаров и услуг.

Таблица 4.1

Примеры цен (в руб.) товаров и услуг в 1990 и 2007 гг. (Москва)

№	Наименование товара (услуги)	Цены, руб.		Рост цен
		1990	2007	
1	Одна поездка в метро	0,05	17,00	340
2	Батон белого хлеба «Нарезной»	0,13	9,50–11,80	73–91
3	Газета	0,03	2,00–6,60	67–220
4	Водка среднего качества (0,5 л)	10,00	80,00–120,00	8–12
5	Электроэнергия (1 кВт·ч)	0,04	2,08	52

Наблюдаем значительное различие в темпах роста цен — в десятки раз. Поэтому для получения сводного показателя необходимо усреднять темпы роста цен для отдельных товаров и услуг. Этот факт подчеркивают и названия рассматриваемых в настоящей главе показателей: индексы инфляции, индексы потребительских цен. Введем используемые в дальнейшем понятия.

Индексы и их применение. **Индекс** (лат. *index* — показатель, список) — это статистический относительный показатель, характеризующий соотношение во времени (динамический индекс) или в пространстве (территориальный индекс) социально-экономических явлений. Речь идет о ценах на товары и услуги, объемах производства, себестоимости, объемах продаж и др.

Индексы делятся на индивидуальные и сводные. Так, *индивидуальный динамический индекс* описывает изменение тех или иных явлений во времени. Например, изменения цены на отдельный товар, объема выплавки стали, урожайности картофеля. Для вычисления индивидуального индекса значение измеряемой величины в текущем периоде делят на ее значение в базисном периоде. *Сводный индекс* служит для сопоставления непосредственно несоизмеримых, разнородных явлений. Например, объемов продаж различных продовольственных товаров (в килограммах). Для требуемого сопоставления необходимо составные элементы несоизмеримых явлений сделать соизмеримыми, выразив их общей мерой: стоимостью, трудовыми затратами и т. д.

Сводные индексы обычно имеют один из трех видов:

$$I_1 = \frac{\sum x_1 f_0}{\sum x_0 f_0}, \quad I_2 = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1}, \quad I_3 = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_0},$$

где x — индексируемая величина; f — веса индексов; 0 и 1 — знаки соответственно базисного и текущего периодов, суммирование ведется по одному и тому же множеству «индексов суммирования» [2, с. 154]. (Обратите внимание на то, что в статистических методах согласно традиции термин «индекс» может использоваться во многих разных смыслах.) Таким образом, индексы зависят от двух переменных: индексируемой величины x и весов индексов f.

Определение понятия «индекс инфляции». В качестве примера построения и использования индексов рассмотрим индекс потребительских цен, он же индекс инфляции.

Наблюдаем, что цены на различные товары меняются по-разному. Как усреднить темпы роста цен? Одна из основных проблем в современной экономике — проблема агрегирования с целью сжатия информации (см., например, монографию [3]). Как свести к одной величине темпы роста цен различных товаров и услуг?

Уровень цен выражается в виде индекса. Он является измерителем соотношения между совокупной ценой определенного набора товаров, называемого рыночной корзиной (или потребительской корзиной), для данного (текущего) момента времени и совокупной ценой идентичной либо сходной группы товаров в базовый момент времени.

Первое, что приходит в голову, — усреднить индексы для отдельных товаров и услуг. Но какое среднее взять? Среднее арифметическое? Среднее геометрическое? Среднее гармоническое? Среднее квадратическое? В экономике используется много различных видов средних (см., например, гл. 6). Опишем наиболее распространенный подход.

Рассмотрим конкретного покупателя товаров и услуг, т. е. конкретного экономического субъекта: физическое лицо, домохозяйство или фирму. Он покупает не один товар, а много. Обозначим через n количество типов товаров или услуг (далее кратко — товаров), которые он хочет и может купить. Пусть $Qi = Qi(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — объемы покупок этих товаров в момент времени t по ценам:

$$pi = pi(t), i = 1, 2, \ldots, n$$

(имеется в виду цена за единицу измерения соответствующего товара, например за штуку или килограмм).

Подход к измерению роста цен основан на выборе и фиксации потребительской корзины ($Q_1(t)$, $Q_2(t)$, …, $Q_n(t)$), ***не меняющейся со временем,*** т. е. $(Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_n(t)) \equiv (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$. Стоимость $S(t)$ потребительской корзины в момент времени t такова:

$$S(t) = \sum_{1 \le i \le n} p_i(t) Q_i \, .$$

Затем необходимо сравнить стоимости $S(t_1)$ и $S(t_2)$ потребительской корзины (Q_1, Q_2, …, Q_n) в старых $p_i(t_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и новых $p_i(t_2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ценах.

Определение. Индексом инфляции называется:

$$I(t_1, t_2) = \frac{S(t_2)}{S(t_1)} = \frac{\sum\limits_{1 \le i \le n} p_i(t_2) Q_i}{\sum\limits_{1 \le i \le n} p_i(t_1) Q_i} \, .$$

Здесь индексируемая величина — цены, а весами служат объемы потребления, зафиксированные в принятой исследователем потребительской корзине.

С математической точки зрения **индекс инфляции** — это функция двух переменных, а именно двух моментов времени: начального, или базового, момента t_1 и конечного, или текущего, момента t_2. Когда говорят об инфляции за определенный промежуток времени, то t_1 — начало этого промежутка (года, месяца), а t_2 — его конец. Обычно $t_1 < t_2$, хотя в приведенном определении это не требуется.

Подчеркнем, что каждой конкретной потребительской корзине соответствует свой индекс инфляции. **Потребительская корзина** — это инструмент экономиста, предназначенный для усреднения индивидуальных индексов инфляции:

$$I_i(t_1, t_2) = \frac{p_i(t_2)}{p_i(t_1)}, \; i = 1, 2, \ldots, n \, ,$$

темпов роста цен отдельных товаров (услуг). Потребительская корзина не имеет отношения к реальному потреблению экономического субъекта. В частности, структура реального потребления в соответствии с законом Энгеля меняется в зависимости от дохода этого субъекта, в то время как потребительская корзина, используемая для расчета индекса инфляции, зафиксирована и никак не связана с доходом субъекта.

Обсудим подробнее различие понятий «реальное потребление» и «фиксированная потребительская корзина, используемая при расчете индекса инфляции». Расходы на покупки товаров и услуг некоторого экономического субъекта:

$$C = C(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t) Q_i(t).$$

следует сопоставлять с его доходом D. Если $D - C > 0$, то экономическое положение субъекта благоприятно, его доход больше расходов. Если же $D - C < 0$, то его положение неблагоприятно, доход меньше расходов. Это означает, что он расходует ранее накопленные средства, делает долги (в частности, берет кредиты) и т. д.

Из сказанного вытекает, что величина расходов $C(t)$ обязательно регулируется экономическим субъектом в соответствии с его доходом. Изменение (рост) цен $pi(t)$ с течением времени t делает невозможным сохранение прежней структуры потребления (Q_1, Q_2, …, Q_n), если рост дохода отстает от роста цен. Структура потребления изменяется, сокращается потребление относительно дорогих товаров и услуг, в порядке компенсации увеличивается потребление относительно дешевых. Например, уменьшается потребление мяса и увеличивается — хлеба и картофеля. При быстром росте цен возможен и другой эффект: «бегство от рубля». В связи с обесцениванием сбережений экономические субъекты направляют доход на текущее потребление ценой отказа от накопления средств на приобретение дорогостоящих товаров длительного пользования.

Таким образом, реальное потребление товаров и услуг определяется как действующими ценами, так и величиной доходов экономических субъектов. Чтобы измерять рост цен, нужно избавиться от влияния изменения доходов. Именно для этого зафиксирована потребительская корзина, используемая для измерения инфляции.

Замечание. Приведем выписку из «Экономического словаря» (http://abc.informbureau.com). «**Закон Энгеля** — зависимость доли расходов на продукты питания в доходах семьи от их уровня, установленная в XIX в. немецким статистиком и экономистом Эрнстом Энгелем (1821–1896). Согласно этому закону по мере роста доходов семьи падает доля расходов на продовольствие, почти не меняется удельный вес затрат на жилище, отопление, освещение, одежду; зато растет доля расходов на прочие нужды (прежде всего на сбережения). Выведенная Энгелем эмпирическая зависимость подтверждается длительным опытом экономического развития. Статистические ряды показывают, что в структуре расходов американских семей за 1909–1985 гг. устойчиво снижается доля физических и материально-вещественных потребностей (продуктов питания — на 35 %, расходов на жилище — на 5,5 %, предметов домашнего обихода — на 26 %, расходов на одежду и обувь — на 47 %). В то же время систематически возрастает удельный вес более высоких "гуманитарных" потребностей в образовании, медицинском обслуживании, организации досуга и отдыха». Об этом же свидетельствует и статистика семейных бюджетов в СССР (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Расходы на питание в СССР (1963 г.)

Совокупный доход в месяц (руб.)	**Расходы на питание, %**
До 75	51,5
75–100	42,7
100–150	35,8
150–200	31,9
Свыше 200	28,4
Все семьи	34,3

Современная западная наука существенно дополнила развитые Энгелем положения, используя для этого новый аналитический аппарат. «На основе формулы эластичности спроса по доходам подсчитано, что в конце 1980-х гг. в США с ростом дохода на 1 % спрос на продукты питания возрастал на 0,77 %, на одежду — на 0,32 %, на транспортные средства — на 1,1 %, на жилище — на 0,89 %, на медицинские услуги — на 1,9 %, на предметы роскоши — на 3,6 %, на спортивные товары — на 3,7 %, на услуги такси — на 2,8 %» (http://abc.informbureau.com/html/caeii_yiaaess.html).

Разброс цен в пространстве. В определении индекса инфляции участвуют цены $p_i(t)$. Однако цены меняются при переходе от одной торговой точки к другой. Это отражено и в табл. 4.1. Два полностью идентичных батона хлеба могут продаваться по разной цене даже в соседних магазинах. Обсудим эффект разброса цен в пространстве и его учет при расчете индекса инфляции.

В конкретном акте купли-продажи цена товара или услуги полностью определена. Однако в современных условиях, когда в большинстве случаев продавец, а иногда и покупатель могут влиять на цену товара или услуги, эта цена зачастую меняется от одного акта купли-продажи к другому. Можно выделить несколько вариантов:

1. Конкретный продавец меняет цену в зависимости от поведения конкретного покупателя. Пример: индивидуальный продавец на базаре.

2. В конкретном магазине цена фиксирована, но от магазина к магазину она меняется. Примеры: большинство товаров (продаваемых в магазинах и киосках), цены которых указаны для сведения покупателей.

3. Единые цены в регионе, например на электроэнергию, услуги транспорта и почтовой связи.

В первом и втором случаях имеет быть разброс цен на однотипный товар. Этот эффект проявляется как и нашей стране, так и за рубежом. Например, в современной Франции цены на определенный товар в фешенебельных центральных магазинах и в окраинных непрестижных супермаркетах могут отличаться в несколько раз. Это одно из проявлений так называемой ценовой диверсификации.

Какие же цены использовать при расчете индекса инфляции? Возможны два подхода к проведению организационно-экономического исследования — средней цены и фиксированного маршрута.

Подход на основе средней цены предполагает проведение обширного статистического исследования, позволяющего с достаточной степенью точности установить распределение цены определенного товара (рассматриваемой как случайная величина). По распределению рассчитывается средняя цена. Нужные данные получают, например, в ходе проводимого органами Росстата бюджетного обследования нескольких тысяч семей, при котором ежедневно фиксируют все их расходы. Тогда достаточно получить среднее арифметическое всех цен при покупках рассматриваемого товара, осуществленных в определенный день, взвешивая их по объему покупок. В другом варианте планирования исследования на основе анализа расходов семей устанавливают доли покупок (по объему), приходящиеся на торговые организации различных типов (базары, магазины, супермаркеты и т. п.), а затем специально подготовленные наблюдатели снимают цены, действующие в этих торговых организациях.

Подход, основанный на использовании фиксированного маршрута, предполагает постоянное слежение за ценами в торговых точках, расположенных вдоль раз и навсегда выбранного маршрута (в идеальном варианте — в одном и том же магазине, в котором продаются все товары, включенные в потребительскую корзину). С помощью такой методики измерения удается избавиться от разброса цен в пространстве и сосредоточиться на изучении их динамики во времени. Именно так собирали цены сотрудники Института высоких статистических технологий и эконометрики, на основе исследовательского опыта которого подготовлен учебный материал, представленный в настоящей главе и — несколько подробнее — в учебнике [1, гл. 7].

4.2. ПРАКТИЧЕСКИ ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЕ КОРЗИНЫ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИНДЕКСЫ ИНФЛЯЦИИ

Каждый человек, семья (домохозяйство), фирма, выбрав подходящую потребительскую корзину, может без больших трудозатрат оценивать влияние роста цен на свое экономическое положение (подробнее — в разд. 4.4).

Однако обычно индекс инфляции рассматривают для более или менее обширной совокупности экономических субъектов: для жителей региона или страны, предприятий определенной отрасли и т. д. При этом потребительскую корзину (Q_1, Q_2, …, Q_n) стараются приблизить к суммарным объемам потребления для рассматриваемой совокупности, а в качестве цен рассматриваются средневзвешенные цены в осуществленных актах купли-продажи.

Пример. В макроэкономике используют так называемый **дефлятор валового внутреннего продукта** (ВВП) — индекс цен на все произведенные в течение года конечные товары и услуги, составляющие объем ВВП, используемый для учета влияния инфляции на величину номинального ВВП. Номинальный ВВП исчисляется в текущих рыночных ценах. Чтобы определить реальную величину ВВП, необходимо выразить его в сопоставимых ценах базисного года. Для этого применяется индекс инфляции, который отражает изменение среднего уровня цен максимально широкой группы товаров и услуг (охватывающей все составляющие ВВП) за рассматриваемый период.

Согласно принятому нами определению, индекс инфляции определяется номенклатурой (т. е. набором, перечнем) товаров и услуг, для которых он вычисляется, объемами потребления и ценами этих товаров и услуг на начальный и на текущий моменты времени. Отсюда вытекает, в частности, что индекс инфляции для продовольственных товаров отличается, вообще говоря, от такового для промышленных товаров, для услуг и от индекса инфляции оптовых цен; индекс инфляции для москвича отличается от такового для жителя Краснодара (хотя бы потому, что климат различается, а потому и объем потребляемой энергии); индекс инфляции для машиностроительной продукции отличается от индекса инфляции в строительстве; индекс инфляции меняется в зависимости от индивидуальных структур потребления в семьях и т. д. Для адекватного рассматриваемому экономическому субъекту определения индекса инфляции необходимо знать типовые объемы купли-продажи и цены в соответствующих актах купли-продажи, иначе можно говорить только о той или иной оценке этого индекса.

Конкретизация задачи вычисления индекса инфляции. Прежде всего необходимо сформулировать цель экономического анализа роста цен. Будем ориентироваться на положение основной массы населения. Это означает, в частности, что персональные компьютеры (в 2001 г. их имели 6 % российских семей) и автомашины иностранных марок (в 2001 г. их имели 0,5 % российских семей) в потребительскую корзину, предназначенную для использования на рубеже тысячелетий, включать нецелесообразно.

Как показывают бюджетные исследования, в том числе проведенные Институтом высоких статистических технологий и эконометрики, количество видов товаров и услуг, потребляемых физическими лицами, измеряется тысячами (а в классификаторах промышленной продукции указаны миллионы марок различных товаров). Поэтому первый шаг — ограничение номенклатуры товаров и услуг, используемых для вычисления индекса инфляции.

На рубеже тысячелетий существенная часть доходов населения России (зачастую не менее половины) идет на покупку продовольственных товаров (что по классическому закону Энгеля — см. также, например, учебник нобелевского лауреата по экономике П. Самуэльсона [4] — свидетельствует о сравнительно низком жизненном уровне). Поэтому представляется естественным рассчитать индекс инфляции для продовольственных товаров.

Потребительская корзина Центра экономической конъюнктуры. В первой половине 1990-х гг. Центр экономической конъюнктуры (ЦЭК) при Правительстве РФ и Государственный комитет РФ по статистике следили за движением цен по фиксированному набору товаров (табл. 4.3), которые относительно постоянно бывают в магазинах (по различным причинам время от времени этот набор меняется).

Потребительская корзина Института высоких статистических технологий и эконометрики (ИВСТЭ) на основе данных Института питания РАМН. Однако приведенный в табл. 4.3 набор ЦЭК не полностью соответствует перечню продуктов питания, рекомендованному медиками. И дело не только в сигаретах.

Таблица 4.3

Объемы годового потребления продовольственных товаров (потребительская корзина Центра экономической конъюнктуры в сравнении с компонентами потребительской корзины ИВСТЭ)

№	Продукты питания, кг	Потребительские корзины	
		ЦЭК на 1993 г.	ИВСТЭ
1	Хлеб ржаной	92,0	65,3
2	Хлеб пшеничный	86,7	59,8
3	Пшено	18,1	4,9
4	Вермишель	7,3	4,9
5	Сахар	24,8	19,0
6	Масло растительное, л	10,0	3,8
7	Масло животное	3,6	2,5
8	Говядина	42,0	4,4
9	Колбаса вареная	2,2	0,7
10	Колбаса полукопченая	1,1	0,7
11	Молоко, л	184,3	110,0
12	Сметана	4,2	1,6
13	Сыр твердый	2,0	2,3
14	Яйца, шт.	183	152
15	Картофель	146,0	124,2
16	Капуста свежая	29,8	30,4
17	Лук репчатый	10,2	27,9
18	Яблоки	11,0	15,1
19	Сигареты, пачки	96	–

Рассмотрим минимальную потребительскую корзину физиологически необходимых продовольственных товаров, разработанную в 1993 г. Институтом высоких статистических технологий и эконометрики на основе исходных данных Института питания Российской академии медицинских наук (РАМН). Эти данные использовались также Министерством труда РФ. Рассматриваемую минимальную потребительскую корзину обозначим сокращенно «корзина ИВСТЭ». В отличие от приведенной выше корзины Центра экономической конъюнктуры в ней содержание белков, жиров и углеводов соответствует (минимальным) медицинским нормам. В корзине ИВСТЭ *продукты питания разделены на 11 групп*:

1. Хлеб и хлебопродукты.
2. Картофель.
3. Овощи.
4. Фрукты и ягоды.
5. Сахар.
6. Мясопродукты.
7. Рыба и рыбопродукты.
8. Молоко и молочные продукты.
9. Яйца.
10. Масло растительное и маргарин.
11. Прочие.

Общая стоимость «прочих» видов продуктов — до 6 % от стоимости первых 10 групп продуктов данной потребительской корзины.

На основе физиологических норм потребления Института питания РАМН в ИВСТЭ составлена минимальная потребительская корзина, т. е. указан годовой объем потребления по основным продовольственным товарам, необходимый для поддержания нормальной жизнедеятельности человеческого организма (табл. 4.4). При разработке корзины специалисты Института питания исходили из *трех принципов*:

1. Суммарное содержание белков, жиров, углеводов и калорий должно быть не менее нормативов, определяющих согласно науке о питании (как части медицины) возможность продолжения существования человеческого организма без физиологического вырождения.
2. На основе включенных в корзину продуктов может быть разработано меню трехразового питания на год.
3. Стоимость корзины должна быть минимальна.

Первый и третий принципы позволяют сформулировать задачу оптимизации (линейного программирования). Ее решение таково (в расчете на день): 812 г черного хлеба, 705 г картофеля, 180 г молока и 10 г сыра. Хотя этот набор продуктов обеспечивает необходимое количество белков, жиров, углеводов и калорий, ежедневно питаться таким образом невозможно. Второй принцип обеспечивает человека полноценным трехразовым питанием. Но стоимость корзины возрастает примерно на четверть.

Потребительская корзина, представленная в табл. 4.4, не описывает реальное потребление большинства граждан. Например, типовой москвич покупает значительно больше колбасы, сала, копченостей, чем включено в корзину, и в несколько раз меньше муки. Корзина табл. 4.4 предназначена прежде всего для измерения инфляции. Однако еще одно ее использование — оценка (снизу) минимально допустимых расходов на продовольственные товары, обеспечивающих нормальную жизнедеятельность человеческого организма. Таковы расходы в некоторых закрытых учреждениях: больницах, тюрьмах, приютах, домах престарелых.

Таблица 4.4

Номенклатура, годовые нормы потребления и цены (руб.) за 1 кг для потребительской корзины ИВСТЭ

Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 14.03.91	Цена на 14.03.94	Рост цен, раз
1. Хлеб и хлебопродукты				
1.1. Мука пшеничная	18,5	0,46	646	1 404
1.2. Рис	3,5	0,88	620	705
1.3. Другие крупы	4,9	0,62	750	1 210
1.4. Хлеб пшеничный	59,8	0,50	720	1 440
1.5. Хлеб ржаной	65,3	0,20	390	1 950
1.6. Макаронные изделия	4,9	0,70	1 200	1 714
2. Картофель	124,2	0,10	490	4 900
3. Овощи				
3.1. Капуста	30,4	0,20	500	2 500
3.2. Огурцы и помидоры	2,8	0,85	2 500	2 941
3.3. Столовые корнеплоды	40,6	0,20	450	2 250
3.4. Прочие (лук и др.)	27,9	0,50	900	1 800
4. Фрукты и ягоды				
4.1. Яблоки свежие	15,1	1,50	960	640
4.2. Яблоки сушеные	1,0	3,00	1 900	633
5. Сахар и кондитерские изделия				
5.1. Сахар	19,0	0,90	650	722
5.2. Конфеты	0,8	4,50	3 500	778

Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 14.03.91	Цена на 14.03.94	Рост цен, раз
5.3. Печенье и торты	1,2	1,40	14 700	3 357
6. Мясо и мясопродукты				
6.1. Говядина	4,4	2,00	2 700	1 350
6.2. Баранина	0,8	1,80	1 940	1 078
6.3. Свинина	1,4	2,00	2 300	1 150
6.4. Субпродукты (печень)	0,5	1,40	3 500	2 500
6.5. Птица	16,1	2,40	2 600	1 083
6.6. Сало	0,7	2,40	3 300	1 375
6.7. Копчености	0,7	3,70	15 000	4 054
7. Рыба и рыбопродукты				
7.1. Свежая (минтай)	10,9	0,37	2 200	5 946
7.2. Сельди	0,8	1,40	2 500	1 786
8. Молоко и молочные продукты				
8.1. Молоко, кефир, л	110,0	0,32	520	1 625
8.2. Сметана, сливки	1,6	1,70	2 500	1 471
8.3. Масло животное	2,5	3,60	4 000	1 111
8.4. Творог	9,8	1,00	2 000	2 000
8.5. Сыр и брынза	2,3	3,60	6 000	1 667
9. Яйца, шт.	152,0	0,09	100	1 111
10. Масло растительное, маргарин				
10.1. Масло растительное, л	3,8	1,80	2 000	1 111
10.2. Маргарин	6,3	1,20	2 000	1 667
11. Прочие (6 % от стоимости товаров групп 1–10)	–	–	–	–

Примечание. Пункт 1.3 — геркулес (в этой таблице и далее).

Расчет стоимости минимальной потребительской корзины продовольственных товаров. Чтобы получить индекс инфляции, рассчитаем стоимость минимальной потребительской корзины продовольственных товаров, исходя из объемов потребления, заданных в разработках Института питания, и цен по состоянию на март 1991 г. (т. е. до первого значительного повышения цен в апреле 1991 г. и их «либерализации» в январе 1992 г.) и — в качестве примера — на март 1994 г. (очевидно, расчеты могут быть проведены и на любой иной момент времени) с целью установить динамику цен за полные три года.

Исходные данные для расчета приведены в табл. 4.4. Мы видим, что темпы роста цен на различные продукты питания существенно отличаются друг от друга. Минимальный рост цен — в 633 раза (яблоки сушеные), максимальный — в 5 946 раз (минтай).

Для нахождения расходов на определенные продукты питания (в расчете на год) достаточно умножить цены на объемы потребления, как это сделано в табл. 4.5. Там же приведены годовые расходы для каждой из 11 товарных групп.

Таблица 4.5

Годовые расходы на покупку продуктов (руб.)

Наименование продуктов питания и групп продуктов	Годовые расходы по ценам на 14.03.91	Годовые расходы по ценам на 14.03.94
1. Хлеб и хлебопродукты		
1.1. Мука пшеничная	8,51	11 951
1.2. Рис	3,08	2 170
1.3. Прочие крупы	3,04	3 675
1.4. Хлеб пшеничный	29,90	43 056
1.5. Хлеб ржаной	13,06	25 467
1.6. Макаронные изделия	3,43	5 880
Всего по группе 1	61,02	92 199
2. Картофель	12,42	60 858
3. Овощи		
3.1. Капуста	6,08	15 200
3.2. Огурцы и помидоры	2,38	7 000
3.3. Столовые корнеплоды	8,12	18 270
3.4. Прочие (лук и др.)	13,95	25 110
Всего по группе 3	30,53	65 580
4. Фрукты и ягоды		
4.1. Яблоки свежие	22,65	14 496
4.2. Яблоки сушеные	3,00	1 900
Всего по группе 4	25,65	16 396
5. Сахар и кондитерские изделия		
5.1. Сахар	17,10	12 350

Наименование продуктов питания и групп продуктов	Годовые расходы по ценам на 14.03.91	Годовые расходы по ценам на 14.03.94
5.2. Конфеты	3,60	2 800
5.3. Печенье и торты	1,68	5 640
Всего по группе 5	22,38	20 790
6. Мясо и мясопродукты		
6.1. Говядина	8,80	11 880
6.2. Баранина	1,44	1 552
6.3. Свинина	2,80	3 220
6.4. Субпродукты (печень)	0,70	1 750
6.5. Птица	38,64	41 860
6.6. Сало	1,68	2 310
6.7. Копчености	2,59	10 500
Всего по группе 6	56,65	73 072
7. Рыба и рыбопродукты		
7.1. Свежая (минтай)	4,03	23 980
7.2. Сельди	1,12	2 000
Всего по группе 7	5,15	25 980
8. Молоко и молочные продукты		
8.1. Молоко, кефир	35,20	57 200
8.2. Сметана, сливки	2,72	4 000
8.3. Масло животное	9,00	10 000
8.4. Творог	9,80	19 600
8.5. Сыр и брынза	8,28	13 800
Всего по группе 8	65,00	104 600
9. Яйца	13,68	15 200
10. Масло растительное, маргарин		
10.1. Масло растительное	6,84	7 600
10.2. Маргарин	7,56	12 600
Всего по группе 10	14,40	20 200
Всего по 10 группам	306,89	490 675
11. Прочие (6 % от стоимости товаров групп 1–10)	18,41	29 441
Суммарная стоимость минимальной потребительской корзины продуктов питания в расчете на год	325,30	520 116
Ее стоимость в расчете на месяц	27,11	43 499

Как вытекает из табл. 4.5, индекс инфляции (роста цен) по продуктам питания, исходя из минимальной потребительской корзины ИВСТЭ, составленной по физиологическим нормам потребления продуктов питания для г. Москвы (согласно разработкам Института питания РАМН и Министерства труда РФ), за три года (14.03.91–14.03.94) составил 520 116,00 / 325,30 = 1 598,88, или 159 788 % (связь между значениями индекса инфляции «в разах» и «в процентах» обсуждается ниже).

Таблицы типа приведенных выше табл. 4.4 и 4.5 могут быть составлены любым исследователем (студентом, менеджером или иным заинтересованным гражданином, сотрудником той или иной фирмы, органа власти, профсоюзной организации) с целью изучения динамики реального экономического положения. В табл. 4.6 приведены рассчитанные сотрудниками ИВСТЭ по независимо собранной информации значения стоимости потребительской корзины и индекса инфляции за 1991–2023 гг.

Таблица 4.6

Стоимость потребительской корзины ИВСТЭ и индекс инфляции

№ п/п	Дата снятия цен t	Стоимость потребительской корзины $S(t)$ (руб.) в месяц	Индекс инфляции I(31.03.91; t)
1	31.03.91	26,60	1,00
2	14.08.93	17 691,00	665,08
3	15.11.93	28 050,00	1 054,51
4	14.03.94	40 883,00	1 536,95
5	14.04.94	44 441,00	1 670,71
6	28.04.94	47 778,00	1 796,17
7	26.05.94	52 600,00	1 977,44
8	08.09.94	58 614,00	2 203,53
9	06.10.94	55 358,00	2 081,13
10	10.11.94	72 867,00	2 739,36
11	01.12.94	78 955,00	2 968,23
12	29.12.94	97 897,00	3 680,34
13	02.02.95	129 165,00	4 855,83
14	02.03.95	151 375,00	5 690,79
15	30.03.95	160 817,00	6 045,75
16	27.04.95	159 780,00	6 006,77

№ п/п	Дата снятия цен *t*	Стоимость потребительской корзины *S*(*t*) (руб.) в месяц	Индекс инфляции *I*(31.03.91; *t*)
17	01.06.95	167 590,00	6 300,38
18	29.06.95	170 721,00	6 418,08
19	27.07.95	175 499,00	6 597,71
20	31.08.95	173 676,00	6 529,17
21	28.09.95	217 542,00	8 178,27
22	26.10.95	243 479,00	9 153,35
23	30.11.95	222 417,00	8 361,54
24	28.12.95	265 716,00	9 989,32
25	01.02.96	287 472,55	10 807,24
26	05.03.96	297 958,00	11 201,43
27	05.04.96	304 033,44	11 429,83
28	08.05.96	305 809,55	11 496,60
29	05.06.96	302 381,69	11 367,73
30	03.07.96	306 065,21	11 506,21
31	03.08.96	308 963,42	11 615,17
32	07.09.96	288 835,07	10 858,46
33	01.10.96	278 235,35	10 459,98
34	05.11.96	287 094,77	10 793,04
35	04.12.96	298 024,76	11 203,94
36	03.01.97	314 287,16	11 815,31
37	04.02.97	334 738,24	12 584,14
38	04.01.98	345,72	12,997
39	03.01.99	630,07	20,395
40	05.01.00	737,80	27,737
41	03.01.01	886,84	33,340
42	03.01.02	1 051,79	39,541
43	03.01.03	1 210,62	45,512
44	03.01.04	1 355,91	50,974
45	14.05.2004	1 369,10	51,470
46	11.01.05	1 463,98	55,037
47	10.01.06	1 525,62	57,354
48	26.11.06	1 571,26	59,070

№ п/п	Дата снятия цен *t*	Стоимость потребительской корзины *S*(*t*) (руб.) в месяц	Индекс инфляции *I*(31.03.91; *t*)
49	10.01.07	1 580,89	59,432
50	02.07.07	1 644,38	61,819
51	03.01.08	1 891,04	71,092
52	03.07.08	2 286,54	85,960
53	10.01.09	2 458,03	92,407
54	02.07.09	2 682,08	100,83
55	11.01.10	2 833,04	106,48
56	01.07.10	2 954,86	111,07
57	11.01.11	3 082,35	115,85
58	01.07.11	3 267,29	122,80
59	11.01.12	3 496,00	131,40
60	01.07.12	3 740,72	141,91
61	11.01.13	4 227,01	160,36
62	01.07.13	4 507,77	170,79
63	11.01.14	4 776,53	181,20
64	01.07.14	5 206,42	197,51
65	11.01.15	5 349,77	202,94
66	01.07.15	5 681,46	215,52
67	11.01.16	6 039,82	229,12
68	01.07.16	6 291,41	238,28
69	01.01.17	6 731,81	254,96
70	01.07.17	6 799,13	257,51
71	01.01.18	6 867,12	260,08
72	01.07.18	7 004,46	265,29
73	01.01.19	7 144,55	270,59
74	01.01.20	7 358,89	278,71
75	01.01.21	7 719,47	292,37
76	01.01.22	8 367,13	316,90
77	01.01.23	9 366,17	352,74

Примечание. Учитывается проведенная 01.01.98 деноминация рубля. Стоимость потребительской корзины приводится без включения группы «прочие» (6 % от стоимости основной части корзины).

4.3. СВОЙСТВА ИНДЕКСОВ ИНФЛЯЦИИ

Перед тем как переходить к рассмотрению примеров использования индексов инфляции в экономических расчетах, целесообразно рассмотреть некоторые их свойства.

Соотношение индексов инфляции для трех моментов времени. Рассмотрим три произвольных момента времени t_1, t_2, t_3 и соответствующие индексы инфляции $I(t_1, t_2)$, $I(t_2, t_3)$ и $I(t_1, t_3)$. Из определения индекса инфляции как отношения стоимостей потребительской корзины в соответствующие моменты времени вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.1 (теорема умножения). Для любых трех моментов времени t_1, t_2, t_3 справедливо равенство:

$$I(t_1, t_3) = I(t_1, t_2)I(t_2, t_3).$$

Доказательство. По определению индекса инфляции:

$$I(t_1,t_2) = \frac{S(t_2)}{S(t_1)},\ \ I(t_2,t_3) = \frac{S(t_3)}{S(t_2)},$$

где $S(t)$ — стоимость потребительской корзины в момент времени t. Следовательно,

$$I(t_1,t_2)I(t_2,t_3) = \frac{S(t_2)}{S(t_1)}\ \frac{S(t_3)}{S(t_2)}.$$

В числителе и знаменателе стоит одно и то же выражение $S(t_2)$. Сократим на него, получим:

$$I(t_1,t_2)I(t_2,t_3) = \frac{S(t_3)}{S(t_1)}.$$

Выражение справа — это по определению индекс инфляции $I(t_1, t_3)$. Теорема 4.1 доказана.

Пусть, например, t_1 — это 31 декабря 2004 г., t_2 — это 31 декабря 2005 г., t_3 — это 31 декабря 2006 г. Тогда $I(t_1, t_2)$ — это индекс инфляции за 2005 г., равный 10,9 % (официальные данные Росстата). А $I(t_2, t_3)$ — это индекс инфляции за 2006 г., согласно тому же источнику он равен 9 %. Теорема умножения дает возможность рассчитать по этим данным индекс инфляции за два года (2005–2006), т. е. с 31 декабря 2004 г. по 31 декабря 2006 г.

Согласно приведенному определению индекс инфляции — действительное число. Если цены постоянны, то индекс инфляции равен 1. Если цены растут, то индекс инфляции больше 1. Однако часто приводят индекс инфляции в процентах. При этом в процентах выражают отклонение от ситуации постоянных цен, т. е. отклонение от 1. Обозначим через $a = a(t_1, t_2)$, или $a\,\% = a(t_1, t_2)\,\%$ индекс инфляции в процентах за интервал времени (t_1, t_2). Тогда

$$a(t_1,t_2)\% = (I(t_1,t_2)-1)\times 100\%,\ I(t_1,t_2) = 1+\frac{a(t_1,t_2)}{100}.$$

Или в сокращенной форме:

$$a\% = 100(I-1)\%, \quad I = 1+\frac{a\%}{100}.$$

Чтобы перейти к выражению индекса инфляции в процентах, надо значение «в разах» уменьшить на 1 и результат умножить на 100. Наоборот, чтобы от процентов перейти к разам, надо значение «в процентах» поделить на 100 и результат увеличить на 1.

Таким образом, 1,25 и 25 % — это две записи одного и того же значения индекса инфляции. Инфляция 9 % за 2006 г. означает, что цены выросли в среднем в 1,09 раза. Рост цен в 1992 г. в 26,1 раз означает, что индекс инфляции за этот год составил (26,1 – 1) × 100 % = 2 510 %.

Итак, используют два основных способа записи индекса инфляции: в разах и в процентах. В разах — это именно тот способ, который дан в определении индекса инфляции как отношения стоимостей потребительской корзины в два момента времени. Однако в средствах массовой информации предпочитают приводить инфляцию в процентах.

В теореме умножения индексы инфляции выражены в разах. Следовательно, для расчета индекса инфляции за два года надо от процентов перейти к разам. Индекс инфляции за 2005 г. составляет:

$$I(t_1,t_2) = 1+\frac{10{,}9}{100} = 1{,}109,$$

а индекс инфляции за 2006 г. равен:

$$I(t_2, t_3) = 1 + \frac{9}{100} = 1{,}09.$$

По теореме умножения индекс инфляции за два года таков:

$$I(t_1, t_3) = I(t_1, t_2) I(t_2, t_3) = 1{,}109 \times 1{,}09 = 1{,}20881.$$

Переведем в проценты:

$$I(t_1, t_3) = 100(1{,}20881 - 1)\% = 20{,}881\%.$$

С достаточной для практики точностью можно округлить: $I(t_1, t_3) = 20{,}9$ %.

Обратите внимание, что при сложении индексов инфляции, выраженных в процентах, получим 10,9 % + 9 % = 19,9 %, что меньше правильного результата 20,881 % почти на 1 %. К сожалению, неверная рекомендация о сложении процентов (вместо умножения «разов») иногда встречается в литературных источниках.

Теорема умножения позволяет переходить от индексов инфляции за отдельные недели к индексам инфляции за месяц (четыре недели), от помесячных индексов инфляции — к квартальным и годовым, от годовых — к индексам инфляции за несколько лет. Например, индекс инфляции за второй квартал — с 01.04.94 по 01.07.94 — т. е. I(01.04.94, 01.07.94), выражается через индексы инфляции за апрель I(01.04.94, 01.05.94), май I(01.05.94, 01.06.94) и июнь I(01.06.94, 01.07.94) соответственно как произведение этих индексов, т. е. находится по формуле:

$$I(01.04.94,\ 01.07.94) =$$
$$= I(01.04.94,\ 01.05.94) I(01.05.94,\ 01.06.94) I(01.06.94,\ 01.07.94).$$

Аналогично индекс инфляции за год равен произведению двенадцати индексов инфляции: за январь, февраль, март и остальные девять месяцев.

Насколько велика ошибка от сложения индексов инфляции в процентах? Найдем ее в общем виде. Поскольку для любых чисел x и y справедливо тождество:

$$(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy,$$

то, как легко проверить, для индексов инфляции в процентах:

$$i(t_1, t_2) = 100(I(t_1, t_2) - 1)$$

(в прежних обозначениях $i(t_1, t_2) = a$) справедливо тождество:

$$i(t_1, t_3) = i(t_1, t_2) + i(t_2, t_3) + \frac{i(t_1, t_2)i(t_2, t_3)}{100}.$$

Если индексы инфляции в процентах $i(t_1, t_2)$ и $i(t_2, t_3)$ малы, т. е. индексы инфляции в разах $I(t_1, t_2)$ и $I(t_2, t_3)$ мало отличаются от единицы, то справедлива приближенная формула:

$$i(t_1, t_3) = i(t_1, t_2) + i(t_2, t_3).$$

Погрешность этой формулы, измеряемая в процентах, равна:

$$(i(t_1, t_2)i(t_2, t_3)) / 100.$$

Эта величина становится заметной, если сомножители — порядка десятков и сотен (процентов). Если формула применяется несколько раз, то погрешность накапливается. Противоположный случай: при малых индексах инфляции погрешность приближенной формулы мала (является бесконечно малой более высокого порядка).

Период удвоения цен. Рассмотрим пример. В известном учебнике экономической теории [5] рассмотрена связь между ежегодным увеличением цен и числом лет, необходимых для увеличения цен вдвое. Приведено правило, которое вначале выглядит совершенно непонятным:

(*приблизительное количество лет, необходимое для удвоения цен*) =
= 70 / (*темп ежегодного увеличения уровня цен*, %).

Действительно, пусть n — количество лет, необходимое для удвоения цен, а x — темп ежегодного увеличения уровня цен (в % — $100x$ %). При «подходе профана» рост за n лет составит $100nx$, а потому срок удвоения цен должен находиться из условия:

$$100nx = 100,\ n = 100 / (100x),$$

т. е. в числителе дроби должно стоять число 100, а не 70. В чем дело?

А дело в том, что рост описывается не линейной функцией, а экспоненциальной, надо не складывать, а возводить в степень. За n лет рост цен составит $(1 + x)^n$. Период удвоения находится из уравнения:

$$(1 + x)^n = 2.$$

Тогда

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + x)}.$$

Воспользуемся приближенной формулой математического анализа:

$$\ln(1 + x) = x + O(x^2),$$

тогда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка:

$$n = 100 \ln 2 \,/\, 100\, x.$$

Остается заметить, что

$$100 \ln 2 = 100 \times 0{,}69314718,$$

т. е. с достаточной для подобных расчетов точностью 100 ln2 = 70. «Таинственное» правило полностью обосновано.

Следствия теоремы умножения. Эта теорема позволяет без труда сменить начало отсчета. Например, в табл. 4.6 начальный момент времени — 31 марта 1991 г. (можно заменить на 1990 г., поскольку цены были постоянными). Поскольку по теореме умножения

$$I(t_2, t) = \frac{I(t_1, t)}{I(t_1, t_2)},$$

то без труда можно перейти к отсчету инфляции от первого дня третьего тысячелетия. Действительно, в соответствии со строкой 41 табл. 4.6 имеем:

$$I(01.01.01, t) = \frac{I(31.03.91, t)}{I(31.03.91,\ 01.01.01)} = \frac{I(31.03.91, t)}{33{,}34}.$$

Например, получаем, что инфляция за 6 лет (2001–2006) составляет:

$$I(01.01.01,\ 10.01.07) = \frac{59{,}432}{33{,}340} = 1{,}7826,$$

т. е. 78,26 %.

Обсудим соотношение инфляции по месяцам и за год, а также понятие среднего темпа роста цен и среднемесячной инфляции. Пусть I_1 — индекс инфляции за январь, I_2 — за февраль, I_3 — за март, …, I_{12} — за декабрь, а $I_{год}$ — за год в целом. Тогда согласно теореме умножения:

$$I_{год} = I_1\ I_2\ I_3\ \dots\ I_{12}.$$

Как ввести понятие среднего индекса инфляции? Естественно исходить из требования, чтобы при подстановке среднего индекса инфляции вместо всех усредняемых величин итог не изменялся. Пусть $I_1\ I_2\ I_3\ \dots\ I_k$ — индексы инфляции за k последовательных интервалов времени, а $I_{ср}$ — средний индекс инфляции для этой совокупности. Тогда исходное требование — это требование выполнения равенства:

$$I_1 I_2 I_2 \dots I_k = I_{cp}^k.$$

Таким образом,

$$I_{cp} = \sqrt[k]{I_1 I_2 I_2 \dots I_k},$$

т. е. средний индекс инфляции рассчитывается как среднее геометрическое. Например, средний индекс инфляции за 2005–2006 гг. равен (по официальным данным):

$$I_{cp} = \sqrt{(1{,}109 \times 1{,}09)} = 1{,}09946.$$

Отметим, что всегда среднее геометрическое меньше среднего арифметического:

$$\sqrt[k]{I_1 I_2 I_3 \dots I_k} < \frac{I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_k}{k},$$

за исключением единственного случая, когда все усредняемые величины равны между собой (и равны их среднему арифметическому и среднему геометрическому). Среднее арифметическое индексов инфляции за 2005 и 2006 гг. равно (1,109 + 1,09) / 2 = 2,199 / 2 = 1,0995, что больше среднего геометрического 1,09946, хотя превышение и невелико.

Среднемесячная инфляция, как и средний темп роста для любого временного ряда, рассчитывается в предположении, что ежемесячный рост цен не меняется от месяца к месяцу. Для данных табл. 4.5 она равна:

$$\sqrt[36]{1598{,}88} = 1{,}2274, \text{ или } 22{,}74\ \%.$$

Другими словами, с 14.03.91 по 14.03.94 цены каждый месяц увеличивались в среднем на 22,74 %.

Примеры ошибок при расчетах с индексами инфляции. Информация об индексах инфляции и рассуждения, связанные с ними, постоянно появляются на страницах печати и обсуждаются в иных средствах массовой информации. К сожалению, достаточно широко распространены ошибки.

Так, в одной из экономических (!) газет была помещена публикация, в которой основной исходный материал для обсуждения — индексы инфляции по месяцам (табл. 4.7).

Таблица 4.7

Индексы инфляции по месяцам

Месяц	**Индекс инфляции**	**Месяц**	**Индекс инфляции**	**Месяц**	**Индекс инфляции**
Январь	1,00	Май	1,29	Сентябрь	1,22
Февраль	1,23	Июнь	1,30	Октябрь	1,19
Март	1,19	Июль	1,23	Ноябрь	1,23
Апрель	1,25	Август	1,22	Декабрь	1,25

Автору публикации были нужны индексы инфляции за несколько месяцев. Рассчитывая их, он без каких-либо сомнений пользовался ранее рассмотренной приближенной формулой (сложение индексов в процентах) вместо точной (перемножение индексов инфляции, выраженных в разах). В результате он получил для периода январь — декабрь (т. е. за год) значение индекса инфляции 3,60 (поскольку 0 + 23 + 19 + 25 + 29 + 30 + 23 + 22 + 22 + 19 + 23 + 25 = = 260 %, т. е. рост в 3,60 раза), в то время как на самом деле индекс инфляции, рассчитанный в результате перемножения индексов по месяцам, равен 10,23. Допущенная ошибка в 10,23 / 3,60 = 2,84 раза существенно исказила дальнейшие расчеты (фонда оплаты труда, средней зарплаты и других экономических характеристик) в рассматриваемой публикации, названной в специализированной экономической газете не как-нибудь, а «консультацией»!

В еженедельнике «Аргументы и факты» в апреле 1994 г. в рубрике «Прогноз» помещена беседа журналистки Татьяны Коростиковой с первым заместителем министра экономики России Яковом Уринсоном [6], в которой Я. Уринсон прогнозирует: «…Мы предполагаем рост цен за 1994 г. в 5 раз… В месяц — 7–8 %…»

Сказанное противоречиво. Если индекс инфляции за год равен 5,0, то за месяц, очевидно, рост цен равен в среднем

$$\sqrt[12]{5{,}0} = 1{,}1435,$$

т. е. 14,35 % в месяц, а не 7–8 %. Если же рост цен составляет 7–8 % в месяц, то индекс инфляции за год лежит между

$$(1{,}07)^{12} \text{ и } (1{,}08)^{12} = 2{,}52,$$

т. е. по крайней мере в два раза меньше, чем названный в беседе достаточно реальный прогноз на год — рост в 5 раз. Остается неясным, кто дезориентировал читателя многотиражного издания — чиновник или журналист. Наш запрос об этом в редакцию «Аргументов и фактов» остался без ответа.

Покажем на примере этих данных накопление погрешностей при использовании приближенной формулы, основанной на суммировании индексов инфляции в процентах. Если в месяц рост на 14,35 %, то за год по приближенной формуле — на 14,35 × 12 = 172,2 % (вместо 400 % — рост в 5 раз). Если в месяц — на 7 %, то за год — на 7 × 12 = 84 % (вместо 125 %). Если в месяц — на 8 %, то за год — на 8 × 12 = 96 % (вместо 152 %).

Приведенных примеров достаточно для констатации того, что к сообщениям в средствах массовой информации, посвященным росту цен, следует относиться с известной осторожностью.

Теорема сложения. Целью введения индекса инфляции была выдвинута необходимость усреднения индивидуальных темпов роста цен (индивидуальных индексов инфляции):

$$I_i(t_1,t_2) = \frac{p_i(t_2)}{p_i(t_1)},\ i = 1,2,...,n\,.$$

Однако индекс инфляции был определен не как среднее таких величин, а как отношение стоимостей потребительских корзин. Тем не менее индекс инфляции действительно является средним взвешенным арифметическим индивидуальных индексов инфляции, как показывает следующая теорема.

Теорема 4.2 (теорема сложения). Существуют положительные весовые коэффициенты $\beta_i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что

$$I(t_1,t_2) = \sum_{1\le i\le n} \beta_i I_i(t_1,t_2)\,,$$

причем $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 1$. При этом β_i — это доля стоимости потребительской корзины, приходящаяся на соответствующий (i-й) товар (услугу) в начальный (базовый) момент времени,

$$\beta_i = \frac{p_i(t_1)Q_i}{S(t_1)} = \frac{p_i(t_1)Q_i}{\sum\limits_{1\le k\le n} p_k(t_1)Q_k},\ i = 1,2,...,n\,.$$

Доказательство дается следующей последовательностью преобразований:

$$\sum_{1\le i\le n} \beta_i I_i(t_1,t_2) = \sum_{1\le i\le n} \frac{p_i(t_1)Q_i}{S(t_1)} \times \frac{p_i(t_2)}{p_i(t_1)} =$$

$$= \sum_{1\le i\le n} \frac{p_i(t_2)Q_i}{S(t_1)} = \frac{1}{S(t_1)} \sum_{1\le i\le n} p_i(t_2)Q_i = \frac{S(t_2)}{S(t_1)} = I(t_1,t_2)$$

(сокращается выражение $p_i(t_1)$, оказывающееся как в числителе, так и в знаменателе i-го слагаемого).

Теорема сложения справедлива и в случае, когда вместо индивидуальных коэффициентов инфляции стоят групповые (доказательство опущено). Например, при расчете индекса инфляции по потребительской корзине ИВСТЭ (табл. 4.4) можно сначала рассчитать индексы инфляции по 10 группам, выделенным в этой корзине (хлеб и хлебопродукты, овощи, сахар и кондитерские изделия и др.), а затем объединить их в единый индекс с помощью весовых коэффициентов согласно теореме сложения. Аналогично можно, получив индексы инфляции отдельно по продовольственной корзине, отдельно по товарам повседневного спроса, длительного спроса, отдельно по различным видам услуг (жилищно-коммунальных, транспортных, информационных и др.), получить итоговый индекс инфляции по объединенной корзине, например, предусмотренной в Федеральном законе «О прожиточном минимуме в Российской Федерации» (в редакции Федеральных законов РФ от 27.05.2000 № 75-ФЗ, от 22.08.2004 № 122-ФЗ).

Большое значение имеет теорема сложения при расчете дефлятора валового внутреннего продукта (с целью приведения его к сопоставимым ценам), поскольку потребительская корзина при этом должна охватывать весь спектр конечных товаров и услуг, производимых на территории страны за год.

4.4. ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНДЕКСА ИНФЛЯЦИИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Хорошо известно, что в любой стране стоимость ее денежных единиц со временем меняется. Например, на один доллар США полвека назад можно было купить примерно в восемь раз больше материальных ценностей (например, продовольствия), чем сейчас (см. таблицу пересчета в учебнике [5]), а если сравнивать с временами Тома Сойера — в 100 раз больше. Причем покупательная способность (другими словами, реальная стоимость) денежных единиц с течением времени, как правило, падает. Этому есть две основные причины: банковский процент и инфляция.

В экономике есть инструменты для учета изменения стоимости денежных единиц с течением времени. Один из наиболее известных — расчет *NPV (Net Present Value)* — чистой текущей стоимости. Однако бухгалтерский учет и построенный на данных баланса предприятия экономический анализ финансово-хозяйственной деятельности российского предприятия пока что, как правило, игнорируют сам факт наличия инфляции. Отличие финансиста от бухгалтера проявляется, в частности, в том, что бухгалтер имеет дело с величинами, выраженными в номинальных денежных единицах (поскольку в документах первичного бухгалтерского учета используются именно они), а финансист не может игнорировать изменение покупательной способности денежных единиц во времени.

В настоящем разделе обсудим некоторые возможности использования индекса инфляции в экономических расчетах в процессе подготовки и принятия управленческих решений [7–9]. Чтобы избежать непродуктивных эмоций при обсуждении современного экономического положения, отнесем большинство рассматриваемых примеров к ушедшей в историю середине 1990-х гг.

Будем пользоваться как данными ИВСТЭ (табл. 4.6), так и официальными (табл. 4.8).

Таблица 4.8

Индексы инфляции в Российской Федерации (1992–2007)
(по данным официальных статистических органов)

Год	**Индекс инфляции**	**Индекс инфляции, %**	**Накопленная инфляция с января 1992**	**Накопленная инфляция с марта 1991**	**Данные ИВСТЭ к столбцу (4)**
(1)	–	(2)	(3)	(4)	(5)
1991	–	–	–	2,6	–
1992	26,1	25 100	26,1	67,86	–
1993	9,4	840	245,34	637,88	1 235,42
1994	3,15	215	772,82	2 009,33	3 680,34
1995	2,31	131	1 785,22	4 641,56	9 989,32
1996	1,218	21,8	2 174,39	5 653,42	11 815,31
1997	1,11	11,0	2 413,58	6 274,30	12 997
1998	1,844	84,4	4,451	11,572	20,395
1999	1,365	36,5	6,075	15,795	27,737
2000	1,202	20,2	7,303	18,986	33,340
2001	1,186	18,6	8,661	22,517	39,541
2002	1,151	15,1	9,968	25,917	45,512
2003	1,12	12,0	11,164	29,028	50,974
2004	1,117	11,7	12,471	32,424	55 037
2005	1,109	10,9	13,830	35,958	57,354
2006	1,09	9,0	15,075	39,194	59,342
2007	1,119	11,9	17,830	46,358	85,960

Примечание. Накопленные индексы инфляции с 1998 г. даются с учетом деноминации.

Сравнение столбцов (4) и (5) показывает, что официальная статистика занижала реальную инфляцию в 1,5–2,0 раза. Именно это было причиной того, что ИВСТЭ по заказу Минобороны РФ в 1990-е гг. проводил сбор и анализ данных о динамике цен. Заказчика интересовали размеры финансирования НИР в реальных (сопоставимых) ценах. Часть полученных результатов была опубликована [10–12]. Мониторинг цен продолжается [13–16].

Необходимо отметить, что в начале XXI в. темпы роста цен, фиксируемые независимыми исследователями (в частности, ИВСТЭ) и официальной статистикой, достаточно близки. Прежние расхождения были порождены реалиями 1990-х гг. и остались в прошлом тысячелетии. Однако начиная с 2007 г. проявились расхождения нового типа (см. ниже). Специалисты отмечают нерешенные проблемы в области измерения инфляции, имеющие расхождения в подходах, отсутствие прозрачности в деятельности официальных статистических органов [23].

Переход к сопоставимым ценам. Индекс инфляции даст возможность перехода к сопоставимым ценам, расходам, доходам и другим экономическим величинам. Например, по данным ИВСТЭ (ср. табл. 4.6, в которой приведены значения индекса инфляции на 02.03.95 и 30.03.95), индекс инфляции за 4 года — с 14.03.91 по 16.03.95 — составил 5 936. Это означает, что покупательной способности 1 руб. марта 1991 г. соответствует примерно 6 000 руб. (а точнее 5 936 руб.) марта 1995 г.

Рассмотрим приведение доходов к неизменным ценам. Пусть Иван Иванович Иванов получал в 1990 г. 300 руб. в месяц, а в начале мая 1995 г. ему выдали 1 млн руб. за апрель (т. е. за предыдущий месяц). Увеличились его доходы или уменьшились?

Номинальная заработная плата выросла в 1 000 000 / 300 = 3 333 раза. Однако индекс инфляции на 18 мая 1995 г. составлял 6 180 (дата взята исходя из того, что средства, полученные в начале мая, Иван Иванович Иванов тратит в течение этого месяца). Это значит, что 1 руб. 1990 г. соответствовал по покупательной способности 6 180 руб. в ценах на 18.05.95. Следовательно, в ценах 1990 г. доход И.И. Иванова составлял 1 000 000 / 7 080 6 180 = 161 руб. 81 коп., т. е. 53,9 % от дохода в 1990 г.

Можно поступить наоборот: привести доход 1990 г. к ценам на 18 мая 1995 г. Для этого достаточно умножить его на индекс инфляции: доход 1990 г. соответствует 300 × 6 180 = 1 млн 854 тыс. руб. в ценах мая 1995 г., что в 1 854 000 / 100 000 = 1,854 раза больше, чем месячный доход в 1990 г. Следовательно, доход мая 1995 г. составляет 100 × (1 / 1,854) % = 53,9 % от дохода

1990 г. Нетрудно показать, что оба способа расчетов приводят к одному и тому же результату.

Средняя зарплата. Сопоставим инфляцию со средней заработной платой. В марте 1991 г. она равнялась приблизительно 300 руб. в месяц, т. е. минимальная продуктовая корзина ИВСТЭ составляла около 8,9 % от средней заработной платы. В марте 1994 г. среднемесячная зарплата в Москве была равна 206 076 руб. (данные Московского городского статистического комитета), следовательно, стоимость корзины ИВСТЭ составляла 4 349 900 / 206 076 % = = 21,11 % от нее. Если судить по ценам на продукты, за три года уровень жизни основной массы населения понизился в 21,1 / 11,4 = 1,85 раз.

В октябре 1995 г. в Москве средняя заработная плата — 520 тыс. руб., а стоимость потребительской корзины ИВСТЭ — 196,6 тыс. руб., т. е. 37,8 % от средней зарплаты, падение уровня жизни — в 4,2 раза.

По данным Госкомстата РФ, средняя заработная плата составляла в 1990 г. 303 руб., в октябре 1993 г. — 93 тыс. руб., в январе 1995 г. — 303 тыс. руб. Поскольку зарплата тратится в основном в следующем месяце после получки, то рассмотрим индексы инфляции на 15.11.93 и 02.02.95, равные 1 054 и 4 856 соответственно (см. табл. 4). В ценах 1990 г. средняя зарплата составила 88 руб. 24 коп. и 62 руб. 40 коп. соответственно, т. е. 26,48 и 20,59 % от зарплаты 1990 г.

Среднемесячная заработная плата в Российской Федерации (номинальная и в процентах от уровня 1990 г.) представлена в табл. 4.9. Она составлена по данным Пенсионного фонда РФ, использующего сведения о средней заработной плате при расчете величин пенсий. Обратим внимание, что средняя заработная плата в декабре 1994 г. (354 тыс. руб.) больше, чем в январе 1995 г. (303 тыс. руб.). Проявляется эффект конца года: дополнительные выплаты по итогам года в сочетании с некоторым затишьем производственной деятельности в начале следующего года.

Средняя зарплата рассчитывается путем деления фонда оплаты труда на число работников. При этом объединяются доходы и низкооплачиваемых лиц, и сравнительно высокооплачиваемых. Известно, что распределение доходов резко асимметрично, большому числу низкооплачиваемых работников соответствует малое число лиц с высокими доходами. За 1991–1995-е гг. дифференциация доходов резко увеличилась. Это означает, что доходы основной массы трудящихся сдвинулись влево относительно средней зарплаты. По нашей оценке, 50 % получают не более 70 % от средней зарплаты (медиана распределения), т. е. не более 212 100 руб. по состоянию на январь 1995 г., а наиболее массовой является оплата в 50 % от средней (мода распределения), т. е. около 150 тыс. руб. в месяц.

Таблица 4.9

Среднемесячная заработная плата в Российской Федерации

№ п/п	Дата	Среднемесячная заработная плата в России (по данным Пенсионного фонда РФ, ноябрь 2004), руб.	Индекс инфляции I(31.3.91; t)	Среднемесячная заработная плата в России, в % от уровня 1990
1	1990	303 (за 1990)	1,00	100
2	Август 1993	65 400	665,08	32,45
3	Декабрь 1994	354 200	3 680,34	32,08
4	Декабрь 1995	735 500	9 989,32	24,30
5	Декабрь 1996	1 017 000	11 815,31	28,32
6	Декабрь 1997	760 000	12 997,00	19,30
7	Декабрь 1998	760,0	23,395	10,72
8	Декабрь 1999	1 086,0	32,004	10,97
9	Декабрь 2000	1 584,0	35,684	14,80
10	Декабрь 2001	1 671,0	43,321	12,73

Известно, что типичное распределение доходов таково, что мода величин доходов весьма меньше медианы, которая, в свою очередь, существенно меньше среднего арифметического (центральная часть распределения доходов — за исключением больших доходов — хорошо приближается логарифмически нормальным распределением). Дифференциация доходов в России быстро нарастала вплоть до второй половины 1990-х гг. и сильно превзошла уровень всех так называемых промышленно развитых стран. Правда, уровень Бразилии и Кении пока не достигнут, но и климат в этих странах существенно иной, так что минимальное жизнеобеспечение требует существенно меньших затрат.

Доходы отдельных слоев трудящихся снизились еще существеннее. Зарплата профессора Московского государственного института электроники и математики (технического университета) составляла в марте 1994 г. 42 руб. 92 коп. (в ценах 1990 г.), в июле 1995 г. — 43 руб. 01 коп., т. е. с 1990 г. (400 руб.) снизилась в 9,3 раза, дошла до уровня прежней студенческой стипендии. А студенческие стипендии снизились примерно в той же пропорции и составляли 4–5 руб. в ценах 1990 г.

Кроме того, необходимо учесть, что Госкомстат (и Росстат) учитывает начисленную зарплату, а не выплаченную. В отдельные периоды отечественной истории выплата заработной платы откладывалась надолго.

Минимальная зарплата и прожиточный минимум. Минимальная зарплата в сентябре 1994 г. (22 500 руб.) и в мае 1995 г. (43 700 руб.) составляла 38 и 23,4 % соответственно от стоимости минимальной физиологически необходимой продовольственной корзины. После подъема до 55 тыс. руб. она в сентябре 1995 г. составляла около 26,34 % от стоимости корзины, т. е. реально уменьшилась в 1,44 раза по сравнению с сентябрем 1994 г. В дальнейшем уменьшение стало еще более заметным.

Минимальная зарплата вместе с единой тарифной сеткой во многом определяла зарплату работников бюджетной сферы. Учитывая снижение коэффициентов тарифной сетки, проведенное весной 1995 г., снижение в 1,5 раза покупательной способности минимальной зарплаты, необходимо заключить, что в сентябре 1995 г. доход бюджетников в 2 раза меньше, чем год назад.

Оценим прожиточный минимум. Бюджетные обследования в 1990 г. показали, что для лиц с низкими доходами расходы на продовольствие составляют около 50 % всех расходов, т. е. на промтовары и услуги идет около 50 % доходов. Это соотношение подтвердило и проведенное ИВСТЭ бюджетное обследование конца 1995 г. Исходя из него, среднедушевой прожиточный минимум можно оценить, умножая на 2,0 стоимость минимальной продовольственной корзины ИВСТЭ (этот метод расчета прожиточного минимума разработан американской исследовательницей бедности польского происхождения М. Оршански [18]).

Например, на 28 декабря 1995 г. — 531 432 руб. (см. табл. 4.6). То есть прожиточный уровень для семьи из трех человек — муж, жена и ребенок — должен был на 28 декабря 1995 г. составлять 1,594 млн руб. (в месяц). Например, муж должен получать 900 тыс. руб., жена — 700 тыс. руб. в месяц (чистыми, т. е. после вычета подоходного налога). В декабре 1995 г. средняя заработная плата составляла 735 500 руб. (табл. 4.9). Сопоставление приведенных численных значений показывает, что среднеоплачиваемые работники не могли обеспечить прожиточный минимум для своей семьи (муж и жена суммарно могли заработать лишь 1,471 млн «грязными», что заметно меньше прожиточного минимума).

Численные значения стоимостей потребительских корзин и индексов инфляции рассчитаны ИВСТЭ в основном по ценам на продукты в Москве и Подмосковье. Однако для других регионов численные значения отличаются мало. Для Москвы индекс инфляции на 27.07.95 — 6 598, а для Иванова на 1.08.95 — 7 542. Поскольку потребительская корзина на 14.03.91 в областном центре г. Иванове была на 95 коп. дешевле, то и на 1.08.95 она несколько дешевле, чем была бы при том же индексе инфляции в Москве, и равна 193 452 руб., а прожиточный минимум — 386 905 руб. Этот и другие подобные расчеты показывают, что приведенные выше численные значения для Москвы в качестве первого приближения можно использовать для различных регионов России.

Индексы инфляции с помощью описанной выше методики можно рассчитать для любого региона, профессиональной или социальной группы, отдельного предприятия или даже конкретной семьи. Эти значения могут быть эффективно использованы на трехсторонних переговорах между профсоюзами, работодателями и представителями государства.

Проценты по вкладам в банк, плата за кредит и инфляция. Рассмотрим банк, честно выполняющий свои обязательства. Пусть он дает 10 % в месяц по депозитным вкладам. Тогда 1 руб., положенный в банк, через месяц превращается в 1,1 руб., а через 2 — по формуле сложных процентов — в $1{,}1^2 = 1{,}21$ руб., …, через год — в $1{,}1^{12} = 3{,}14$ руб. Однако за год росли не только вклады, но и цены. Например, с 19.05.94 по 18.05.95 индекс инфляции составил 3,73. Значит, в ценах на момент оформления вкладов итог годового хранения равен 3,14 / 3,73 = 0,84 руб. Хранение оказалось невыгодным: реальная стоимость вклада уменьшилась на 16 %, несмотря на, казалось бы, очень выгодные условия банка. Другими словами, реальный процент платы за депозит оказался отрицательным, равным –16 % в годовом исчислении, притом что в номинальных рублях договор с банком обеспечивает 214 % годовых.

Пусть фирма получила кредит под 200 % годовых. Значит, вместо 1 руб., полученного в настоящий момент в кредит, через год ей надо отдать 3 руб. Пусть она взяла кредит 19.05.94, а отдает 18.05.95. Тогда в ценах на момент взятия кредита она отдает 3 / 3,73 = 0,80 руб. за 1 руб. кредита (в сопоставимых ценах на момент выдачи кредита). Таким образом, кредит частично превратился в подарок: возвращать надо на 20 % меньше, чем получил, реальная ставка кредита отрицательна, она равна –20 %! Такова была типичная ситуация в России в течение ряда лет начиная с 1992 г., особенно в 1992–1994 гг. Но бесплатных подарков в бизнесе не бывает — за них надо платить по другим каналам, как правило, криминальным.

Сколько стоит доллар? На 14 августа 1993 г. курс доллара США составлял в Российской Федерации 1 984,5 руб., а инфляция — 665,08. Следовательно, в сопоставимых ценах 1990 г. реальный курс доллара США равнялся 1 984,5 / 665,08 = 2 руб. 98 коп.

В июле 1995 г. индекс инфляции — около 6 500 (табл. 4), а курс доллара США — около 4 500 руб. за доллар. Следовательно, доллар США стоит

4 500 / 6 500 = 0,69 руб. в ценах 1990 г., т. е. примерно соответствует официальному обменному курсу в 1980-х гг. Сопоставим с тем, что в сентябре 1994 г. курс доллара был около 2 000, а индекс инфляции — около 2 200, т. е. доллар стоил около 0,91 руб. в ценах 1990 г. Реальная покупательная способность доллара упала за 10 месяцев в 1,32 раза.

Пик реального курса доллара приходился на время после дефолта 1998 г. На начало января 1999 г. курс был 20 руб. 65 коп. при индексе инфляции 20,395, т. е. в реальном исчислении он составлял 20,65 / 20,395 = 1 руб. 01 коп. За год до этого, в начале 1998 г., индекс инфляции равнялся 12,997, курс доллара — 5 руб. 96 коп., в реальном исчислении 5,96 / 12, 997 = 0,46, т. е. 46 коп. — в 2 с лишним раза меньше, чем в начале 1999 г.

В середине 2003 г. курс доллара был несколько больше 30 руб. (30 руб. 38 коп.), индекс инфляции составлял 48,56, следовательно, 1 долл. США по своей покупательной способности в России на июль 2003 г. соответствовал 63 коп. начала 1991 г. В начале 2004 г. курс доллара составлял около 28 руб. 50 коп. при индексе инфляции 50,974, следовательно, 1 долл. США по своей покупательной способности в России на начало 2004 г. соответствовал 55 коп. начала 1991 г. Всего за полгода доллар подешевел на 15 %.

В конце июля 2007 г. курс доллара США — 25 руб. 41 коп. при индексе инфляции 61,819, следовательно, реальный его курс — 41 коп. (в сопоставимых ценах 1990 г.).

В конце декабря 2008 г. курс доллара США — 29 руб. 00 коп. при индексе инфляции около 100, следовательно, его реальный курс — 29 коп. (в сопоставимых ценах 1990 г.).

Реальный курс доллара США на любой момент времени можно получить, располагая двумя широкодоступными временными рядами: ежедневными данными о номинальном курсе доллара США на Московской межбанковской валютной бирже и рядом значений индексов инфляции (табл. 4.6 и 4.8). В 1990-е гг. был распространен миф о том, что можно избавиться от влияния инфляции, ведя расчеты в долларах США. Этот миф опровергается приведенными выше результатами расчетов. Инфляция уменьшает покупательную способность доллара США — как в нашей стране, так и в самих США [5], а также в других странах.

Как известно, курс доллара США в Российской Федерации определяется в результате торгов на Московской межбанковской валютной бирже. Каковы свойства валютного рынка? Легко увидеть, что это отнюдь не рынок чистой конкуренции [4, 5]. Игроки не являются равноправными. Участвующие в торгах коммерческие банки административно зависят от Центрального банка РФ. Другой инструмент влияния Центрального банка — долларовые или рублевые интервенции. Необходимо признать, что реально курс доллара во многом определяется руководством страны, решающим поставленные перед собой задачи, действуя через Центральный банк РФ. Не будем пытаться обсуждать эти задачи, констатируем только, что официальный курс доллара США в Российской Федерации определяется во многом административным путем. Возникает естественный вопрос: а каков же реальный курс?

Международные сопоставления на основе паритета покупательной способности. Процитируем типичную публикацию в средствах массовой информации:

«Российский рубль входит в число самых недооцененных мировых валют по паритету покупательной способности, говорится в очередном исследовании журнала The Economist. Исходя из результатов исследования справедливая цена доллара составляет 15,2 руб. Однако участники рынка считают, что подешеветь до 15 руб. доллар сможет лишь через 15–20 лет.

Индекс "Биг Мака" основывается на паритете покупательской способности (ППС), рассчитанной с помощью одинакового во всех странах мира продукта (в данном случае "Биг Мака"). Согласно методике расчета индекса "Биг Мака", курсы валют должны быть такими, чтобы стоимость этого продукта была во всех странах одинаковой.

Индекс "Биг Мака", рассчитанный журналом The Economist, показал, что рубль недооценен на 41 %. При этом китайский юань, например, недооценен на 58 %» (ежедневная деловая газета «РБК Daily», 09.07.2007).

Обсудим три вопроса. По каким причинам реальное соотношение валют может отличаться от официального? Как установить реальный курс? Какие последствия влечет пересчет с официальных курсов на реальные?

Если официальный курс доллара США по отношению к рублю выше реального, то это означает, что государство защищает отечественных товаропроизводителей, поскольку зарубежные товары (из долларовой зоны) продаются внутри страны дороже, чем было бы при соответствии официального курса реальному. Государство поддерживает также работу отечественных предприятий на экспорт, искусственно занижая издержки производства. Одновременно завышение официального курса ставит препятствия на пути закупки новейших зарубежных технологий, делает невыгодным получение кредитов. Ясно, что возвращать долги в долларах легче при низком курсе доллара, чем при высоком. Остановившись на сказанном, констатируем, что в те или иные периоды своего развития государство, ведущее активную экономическую политику, имеет основания устанавливать официальный курс обмена валюты, отличный от реального, соответствующего свободному рынку.

Как же установить реальный курс? Принцип ***паритета покупательной способности*** (ППС) предлагает исходить из того, что одна и та же потребительская корзина должна стоить одинаково в разных странах. Если потребительская корзина ИВСТЭ стоит в начале июля 2007 г. в Москве 1 644 руб., а в Нью-Йорке, к примеру, 100 долл., то приравниваем: 1 644 руб. = 100 долл. США, т. е. курс доллара по ППС — 16 руб. 44 коп. В процитированной публикации из СМИ приравнивалась стоимость «Биг Мака» — продукта, который в распространенной по многим странам мира сети ресторанов быстрого питания «Макдоналдс» всюду изготавливается по одной и той же рецептуре. Другими словами, в качестве используемой для сравнения потребительской корзины берется набор товаров и услуг, необходимых для изготовления «Биг Мака» (включая продукты питания, электроэнергию, оплату труда, амортизацию оборудования и т. п.).

Надо отметить, что в зависимости от конкретной методики международного сопоставления, выбранной тем или иным экономистом (в частности, конкретной потребительской корзины и способа измерения ее стоимости), оценки реального курса валют по ППС могут заметно различаться. Например, курс доллара США — от 8 до 15 руб. (по состоянию на 2007 г.). Несмотря на разногласия, общий вывод одинаков: курс доллара США в Российской Федерации завышен в несколько раз.

Международные сопоставления на основе ППС приводят к принципиально иным результатам, чем на основе официальных курсов обмена валют. В качестве примера приведем табл. 4.10, демонстрирующую это различие на примере валового национального дохода (ВНД) десяти ведущих стран мира [19]. Таблица составлена на основе «Доклада о мировом развитии», представленного Всемирным банком в 2004 г. [20]. Валовой национальный доход страны — одна из основных ее макроэкономических характеристик [4, 5]. ВНД меньше валового национального продукта (ВНП) на величину амортизационных отчислений. Другими словами, ВНД аккумулирует добавленную стоимость, произведенную живым трудом в течение года, в то время как в ВНП входят и перенесенные на вновь созданные товары и услуги результаты прошлого труда. Все показатели табл. 4.10 рассчитаны специалистами Всемирного банка по принятым в этой организации методикам.

Таблица 4.10

Валовой национальный доход (ВНД) на 2002 г., млрд долл.

№	Страна	Объем ВНД	Место в мире по ППС	Объем ВНД по ППС
1	США	10 110	1	10 100
2	Китай	1 210	6	5 625
3	Япония	4 266	2	3 315
4	Индия	502	11	2 691
5	Германия	1 870	3	2 163
6	Франция	1 343	5	1 556
7	Великобритания	1 486	4	1 523
8	Италия	1 098	7	1 467
9	Бразилия	497	12	1 266
10	Россия	308	16	1 127

В табл. 4.10 страны упорядочены в соответствии с убыванием объема ВНД, рассчитанного по паритету покупательной способности. Видно, что упорядочение по этому показателю значительно отличается от упорядочения по ВНД, соответствующего средним обменным курсам 2002 г. Китай с шестого места поднялся на второе, далеко опередив Японию, Германию, Великобританию, Францию, которые предшествовали ему по «официальному» ВНД. Индия поднялась с одиннадцатого места на четвертое, Бразилия — с двенадцатого на девятое, Россия — с шестнадцатого на десятое. Соответственно, сдвинулись вниз ведущие европейские страны.

С течением времени экономическая мощь государств меняется. Рассмотрим размеры ВВП по паритету покупательной способности (ППС) в миллиардах долларов[4] (данные МВФ, 2017 г.):

1. КНР — 23 208.
2. США — 19 485.
3. Индия — 9 474.
4. Япония — 5 443.
5. Германия — 4 199.
6. Россия — 4 016.

[4] *Тюрин А.* Россия — шестое место в мире по ВВП (ППС), четвертое — по промышленности. URL: https://zavtra.ru/blogs/rossiya_-_shestoe_mesto_v_mire_po_vvp_(pps)_chetvertoe_-_po_promishlennosti?ysclid=liyc9u6czp474344996 (дата обращения: 16.11.2023).

7. Индонезия — 3 250.
8. Бразилия — 3 247.
9. Великобритания — 2 925.

Если считать только сектора реального производства, т. е. промышленность и сельское хозяйство, то в миллиардах долларов по ППС:

1. КНР — 11 070.
2. Индия — 4 329,6.
3. США — 3 858.
4. Россия — 1 489,9.
5. Япония — 1 333,5.
6. Германия — 1 289,1.

Таким образом, сейчас Китай обладает самой мощной экономикой в мире, его ВВП превышает ВВП США. По «экономической силе» на первом месте — Китай, на втором — США, на третьем — Индия. По объему реального производства США отходит на третье место — после КНР и Индии. Эти упорядочения целесообразно учитывать российским организациям при стратегическом планировании. А студентам, нацеленным на перспективу, пора учить китайский язык.

Проблема учета инфляции при экономическом анализе финансово-хозяйственной деятельности предприятия. Индексы инфляции используются для пересчета номинальных цен в неизменные (сопоставимые). Другими словами, для приведения доходов и расходов к ценам определенного момента времени. Потребительские корзины для промышленных предприятий, конечно, должны включать промышленные товары, а потому отличаться от потребительских корзин, ориентированных на изучение жизненного уровня. Однако «в первом приближении» можно использовать потребительскую корзину ИВСТЭ или применять индексы инфляции Росстата, особенно для тех организаций, для которых в структуре себестоимости выпускаемых товаров и услуг большое место занимает оплата труда.

Рассмотрим условное предприятие. В табл. 4.11 представлена информация о прибыли предприятия по годам. Эти значения взяты из ежегодных отчетов, сданных в налоговые органы, и выражены в номинальных денежных единицах. Видим, что прибыль год от года растет, за 6 лет выросла на 80 %. Напрашивается вывод, что предприятие процветает, его руководители заслуживают похвал и наград.

Однако не будем торопиться. Приведем прибыль к сопоставимым ценам. В качестве точки отсчета естественно взять начало тысячелетия, т. е. конец

2000 г. — начало 2001 г. Другими словами, приведем интересующую нас характеристику работы предприятия к сопоставимым ценам на 1 января 2001 г. Именно в этих ценах выражена прибыль 2000 г. Будем использовать официальные данные Росстата (табл. 4.8). Индексы инфляции «в разах» приведены в столбце (4) табл. 4.11.

Для приведения прибыли 2001 г. к сопоставимым ценам на начало года достаточно разделить ее на годовой индекс инфляции: 1,1 / 1,186 = 0,927. Вот уже первая неожиданность: реальная прибыль не выросла в 2001 г. на 10 % по сравнению с 2000 г., как номинальная, а, наоборот, упала на 7,3 %.

Таблица 4.11

Динамика прибыли предприятия, млн руб.

№	Год	Прибыль, млн руб.	Индекс инфляции	Накопленная инфляция	Прибыль в сопоставимых ценах
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	2000	1,0	–	–	1,0
2	2001	1,1	1,186	1,186	1,1 / 1,186 = 0,927
3	2002	1,3	1,151	1,365	1,3 / 1,365 = 0,952
4	2003	1,4	1,12	1,529	1,4 / 1,529 = 0,912
5	2004	1,5	1,117	1,708	1,5 / 1,708 = 0,878
6	2005	1,7	1,109	1,894	1,7 / 1,894 = 0,896
7	2006	1,8	1,09	2,064	1,8 / 2,064 = 0,872

Чтобы привести к сопоставимым ценам прибыль 2002 г. (и следующих лет), надо сначала найти накопленную инфляцию за прошедшие годы. За 2001–2002 гг. индекс инфляции находится путем перемножения индексов за отдельные годы: 1,186 × 1,151 = 1,365. Аналогично индекс инфляции за три года (2001–2003) равен 1,186 × 1,151 × 1,12 = 1,365 × 1,12 = 1,529. За четыре года индекс таков: 1,529 × 1,117 = 1,708. За пять лет: 1,708 × 1,109 = 1,894. Наконец, за 6 лет (2001–2006): 1,894 × 1,09 = 2,064.

Рассчитанные значения прибыли в сопоставимых ценах приведены в столбце (6) табл. 4.11. Наблюдаем совсем другую картину по сравнению с номинальной прибылью. Реальная прибыль отнюдь не растет, наоборот, имеет устойчивую тенденцию к снижению. К 2006 г. она снизилась на 12,6 %, в то время как номинальная прибыль выросла на 80 %.

И выводы получаются совсем другие. Нельзя сказать, что предприятие прогрессивно развивается. Констатируем тенденцию к застою и деградации. Руководители вряд ли заслуживают похвал и наград, наоборот, им следует тщательно проанализировать ситуацию и разработать меры улучшения работы предприятия. Хотя и надо отметить, что говорить о катастрофе преждевременно: прибыль остается положительной, ее снижение не слишком большое.

Как известно, разработана и широко применяется развернутая система коэффициентов, используемых при экономическом анализе финансово-хозяйственной деятельности предприятия [21]. Она основана на данных бухгалтерского баланса. Естественно, опирается на два столбца баланса: данные на «начало периода» и данные на «конец периода». Записывают в эти столбцы номинальные значения.

В настоящее время согласно правилам бухгалтерского учета инфляцию полностью игнорируют (за исключением периодических корректировок стоимости основных фондов в соответствии с принимаемыми руководством страны нормативными документами). Это приводит к искажению оценки реального положения предприятия — если пользоваться только данными текущего бухгалтерского учета. Денежные средства преувеличиваются, а реальная стоимость основных фондов занижается. По официальной отчетности предприятие может считаться получившим хорошую прибыль, а по существу не иметь средств для продолжения производственной деятельности, например для закупки необходимого сырья.

Ясно, что учитывать инфляцию надо. Вопрос в другом — как именно. Потребительская корзина должна, видимо, состоять из тех товаров и услуг, которые предприятие закупает. Стоимость основных фондов может не убывать в соответствии с амортизацией, а возрастать согласно отраслевому темпу инфляции (уменьшенному на амортизационные коэффициенты) и т. д. Обсуждение конкретных методик расчетов выходит за пределы настоящего учебника.

Сколько стоит предприятие? Специалисты по оценке бизнеса используют три подхода: затратный, доходный и сравнительный [22]. Согласно первому из них важно оценить основные фонды. Для этого нужно взять их стоимость в определенный момент времени, например в 1990 г., и умножить на индекс инфляции (и учесть амортизационные отчисления). Вспомним здесь, что официальный индекс инфляции Госкомстата-Росстата в 1,5 раза меньше, чем наш, если отсчитывать от 1990 г. (см. табл. 4.8). Есть много способов исказить экономические показатели, и «специалисты» ими умело пользуются. Занижение индекса инфляции выгодно тем, кто хочет обзавестись собственностью по заниженной цене.

В мировой практике известны различные варианты учета инфляции в бухгалтерской деятельности и в работе финансовых аналитиков [23].

4.5. ДИНАМИКА ЦЕН НА ПРОДОВОЛЬСТВЕННЫЕ ТОВАРЫ

Проведем сравнительный анализ результатов расчетов на основе различных потребительских корзин с целью оценки точности определения темпов роста цен.

Сравнение индексов инфляции Госкомстата РФ и ИВСТЭ. Результаты расчетов по различным потребительским корзинам дают, естественно, различные значения индексов инфляции, хотя эти различия, как представляется, не слишком значительны. Так, в табл. 4.3 приведена потребительская корзина Центра экономической конъюнктуры (ЦЭК) при Правительстве РФ и Государственного комитета РФ по статистике, если короче — корзина Госкомстата РФ, а в табл. 4.4 дана потребительская корзина ИВСТЭ. Было проведено сравнение соответствующих индексов инфляции. Полученные результаты (табл. 4.12) показали, что эти индексы достаточно близки.

Таблица 4.12

Сравнение результатов подсчета стоимостей потребительских корзин и индексов инфляции Госкомстата РФ и ИВСТЭ

Промежуток времени	Стоимость корзины и индекс инфляции	
	Госкомстат РФ	ИВСТЭ
С 14.03.91 по 14.03.94	30,82 / 48 990,33 1 589,8	26,85 / 40 889,1 1 598,88
С 15.11.93 по 14.03.94	31 255 / 48 990,33 1,57	28 050 / 40 889,1 1,46
С 19.05.94 по 26.05.94	56 670,2 / 57 667,75 1,02	55 615 / 56 332 1,01

Примечание. В табл. 4.12 верхние числа — стоимости потребительских корзин (в руб.) соответственно на первую указанную дату и через дробь — на вторую, нижнее число — индекс инфляции за данный период.

Близость различных индексов инфляции за большой промежуток времени объясняется тем, что цены растут в целом достаточно согласованно, «аномалии» выправляются: если темп роста цены определенного продукта отстает от среднего роста цен, то имеются основания полагать, что его цена в ближайшее время сильно возрастет. Однако на малых и средних промежутках времени проявляется различие роста цен на отдельные товары.

Тем более интересно, что официально публикуемые индексы инфляции Госкомстата РФ при отсчете с 1990 г. (или, что то же самое, с 14.03.91) давали в середине 1990-х гг. по крайней мере вдвое меньшие значения, чем расчеты Института высоких статистических технологий и эконометрики (подробнее см. коллективную монографию [24] тех лет).

Изучение динамики цен в условиях реформ. Уже более 30 лет в России осуществляется так называемая радикальная экономическая реформа. Одним из сопутствующих ей эффектов является изменение сложившейся к 1991 г. системы цен на все товары, услуги, труд (рабочую силу). Эти изменения цен приобрели ярко выраженный инфляционный характер. В течение 30 с лишним лет «радикальной реформы» произошли изменения не только абсолютных величин цен, но и их пропорций.

Масштабы инфляции были определены не только дисбалансом между скопившейся к 1992 г. у населения значительной массой наличных денег и наличием товаров, но и массовым преобразованием безналичных средств предприятий в наличные деньги в период расцвета совместных предприятий и кооперативов в 1989–1991 гг. (а также отменой монополии внешней торговли, в результате чего, например, около 1/3 произведенных в СССР в 1990 г. товаров массового потребления было вывезено за границу).

В дальнейшем в результате применения жестких мер (например, невыплаты заработной платы), ограничивающих поступление наличных денег на рынок товаров и услуг, а также количество покупателей среднего класса и тем самым обеспечивающих искусственное снижение спроса, темпы инфляции заметно снизились, но инфляция не прекратилась. Болезнь не исчезла. Удалось сбить температуру больного, т. е. отключить сигнальную систему, но не вылечить болезнь. Стоит только лишь начать платить людям наемного труда заработанные ими деньги при условии корректной оценки труда как рыночного товара, как инфляционная болезнь возобновится (как это и произошло в 2007 г. — см. ниже). В августе 1998 г. инфляция была подстегнута руководством страны путем искусственного подъема курса доллара.

Институт высоких статистических технологий и эконометрики изучает динамику экономического положения граждан России на основе независимо собранной информации. Приведение к сопоставимым ценам (с помощью индексов инфляции и дефляторов) — составная часть любого экономического расчета, связанного более чем с одним моментом времени. Как показали наши наблюдения над ценами, использование публикуемых Госкомстатом РФ значений индексов инфляции приводит к систематическим ошибкам. Так, например, по нашим данным цены за 6 с небольшим лет (с марта 1991 г. по май 1997 г.) выросли в среднем примерно в 12 500 раз, а по данным Госкомстата РФ — примерно в 6 000 раз. Сказанное определяет актуальность использования независимой информации о ценах и индексах инфляции при анализе экономического положения России, а также при разработке прикладных моделей и методов управления в современных условиях.

Предметом описанного здесь исследования ИВСТЭ [10, 12] является оценка изменения в ходе реформ фактического среднего и минимального физиологически необходимого уровней жизни граждан РФ через сравнение индексов инфляции, вычисленных на основании потребительских корзин, и индекса изменения величины средней заработной платы.

Организация сбора и анализа данных. В 1994–1997 гг. еженедельно собирались данные о ценах 35 продуктов в 12 точках Москвы, Подмосковья и Крыма. А именно, информация о ценах собиралась в 9 точках г. Москвы; в 2 точках Московской области (г. Раменское и г. Ногинск) и в Крыму (г. Симферополь). Регулярное измерение цен производилось с интервалом в одну неделю по 35 различным товарам.

Расчеты по собранным ценам продовольственных товаров проводились для следующих 5 потребительских корзин:

1. **ИВСТЭ** — продовольственная потребительская (продуктовая) корзина Института высоких статистических технологий и эконометрики (табл. 4.4). Составлена с учетом разработок Института питания РАМН. Является сбалансированной по белкам, жирам и углеводам. Обеспечивает минимальные физиологически необходимые потребности человека.

2. **ГКС-1** — продуктовая корзина из 19 продуктов питания (включая сигареты) Государственного комитета РФ по статистике, применявшаяся в 1993–1996 гг. (табл. 4.3).

3. **ГКС-2** — продуктовая корзина Государственного комитета РФ по статистике, используемая с 1 января 1997 г. Нормы потребления предложены Министерством труда.

4. **Бюдж-1** — продуктовая корзина, разработанная на основе бюджетного обследования «бедных семей» студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) (среднедуше-

вое потребление не превосходит 90 % от медианы обследованной совокупности семей). Эта корзина определяет усредненные фактические объемы потребления (кг/год/человек и, соответственно, кг/месяц/человек) 35 продуктовых товаров, по которым производились измерения цен при использовании корзины ИВСТЭ. Общий объем затрат «бедных семей» на продуктовые и иные товары предлагается находить умножением стоимости корзины Бюдж-1 на соответствующие коэффициенты по методу Оршански.

5. **Бюдж-2** — продовольственная потребительских корзина, разработанная на основе бюджетного обследования семей студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) (октябрь — ноябрь 1995 г.). Совокупность обследованных семей в целом характеризуется средним уровнем потребления. Эта корзина определяет усредненные фактические объемы потребления (кг/год/человек и, соответственно, кг/месяц/человек) 35 продуктовых товаров, по которым производились измерения цен в корзине ИВСТЭ. Общий объем затрат «семей со средним достатком» на продуктовые и иные товары предлагается находить умножением стоимости корзины Бюдж-2 на соответствующие коэффициенты.

Количество элементарных измерений (значений собранных цен продовольственных товаров) приблизительно равно 30 000. Собранные данные о ценах обрабатывались на компьютерах Macintosh как известными, так и оригинальными методами. Точность вычислений равна обычной компьютерной точности на компьютере Macintosh при работе с числами с плавающей точкой. В дальнейшем все средние величины цен приведены с точностью до одного рубля, а величины процентов — с точностью до 1/10 %.

При проведении мониторинга за ценами на продукты питания исследователи обычно создают ***компьютерную базу данных***, в которую заносят сведения вида:

1) название продукта питания;

2) объем потребления продукта;

3) цена продукта;

4) дата снятия цены;

5) название торговой точки.

Кроме того, есть вполне понятная последовательность действий (алгоритм) по ***вычислению индекса инфляции*** с момента времени t_1 по момент времени t_2:

– вычислить сумму (по всем составляющим потребительской корзины) произведений цен на объем потребления для момента времени t_1;

– вычислить сумму произведений цен на объем потребления для момента времени t_2;

– найти их отношение.

Для нахождения индексов инфляции по товарным группам эти действия выполняются для продуктов искомой группы.

Для вычисления индекса инфляции по продуктам питания разработаны различные программные средства для IBM PC и для персональных компьютеров фирмы Apple.

Результаты анализа динамики цен. Приведем некоторые результаты анализа данных о ценах. Начнем с временных рядов стоимостей потребительских корзин в Москве. Оказалось, что стоимость потребительской корзины ГКС-2 примерно в 1,5 раза меньше стоимости потребительской корзины ГКС-1. Потребительская корзина ИВСТЭ располагалась по стоимости примерно посередине между ГКС-1 и ГКС-2. Несмотря на различие стоимостей, индексы инфляции для всех трех корзин ГКС-1, ГКС-2, ИВСТЭ близки и составляют 8 233–8 896 на конец декабря 1995 г. и 10 396–10 890 на конец февраля 1997 г.

Любопытно отметить, что ГКС-1 имеет наименьшие значения индекса из трех корзин, а ГКС-2 — наибольшие, если сравнивать с мартом 1991 г. (Госкомстат РФ такие сравнения не проводит), в то время как за исследуемый промежуток времени (с конца декабря 1995 г. по конец февраля 1997 г.) наибольший рост дает корзина ИВСТЭ (28,05 %), а наименьший — ГКС-2 (22,42 %).

Совсем иная картина со стоимостями потребительских корзин Бюдж-1 и Бюдж-2. Они относятся к реальному потреблению сравнительно обеспеченных москвичей, включают в себя стоимости не только продуктов, но и других товаров и услуг, в то время как корзины ИВСТЭ, ГКС-1 и ГКС-2 дают представление о стоимости минимального набора товаров и услуг, обеспечивающего физиологические потребности человека. В конце декабря 1995 г. стоимость корзины Бюдж-1 (для «бедных») составляла 659 852 руб., а корзины Бюдж-2 (для «средних» семей) — 726 364 руб., а к февралю 1997 г. они «подросли» до 832 498 (на 26,16 %) и 950 989 руб. (на 30,92 %) соответственно. Эти величины больше прожиточного минимума согласно данным Московской федерации профсоюзов (750 тыс. руб. в мае 1997 г.), хотя разницу нельзя назвать заметной.

Интереснее другое: общий рост цен (на февраль 1997 г.) составил 8 060–8 446, т. е. примерно на 20 % меньше, чем рост стоимостей корзин ИВСТЭ, ГКС-1, ГКС-2. Значит, «реформы» тяжелее всего ударили по наиболее дешевым товарам, предназначенным для наиболее бедной части населения. Это связано, видимо, с сокращением и прекращением дотаций для таких товаров.

Правда, затем темпы роста выровнялись: при сравнении февраля 1997 г. с декабрем 1995 г. они составляют 28,05 % для корзины ИВСТЭ, 26,27 % — для ГКС-1, 26,16 % — для Бюдж-1 и 30,92 % — для Бюдж-2. Особняком стоит ГКС-2 — 22,42 %, заметно меньше, чем для других корзин. В то же время наибольший рост для корзины Бюдж-2 может указывать на тенденцию более быстрого роста цен на товары, предназначенные для более состоятельных людей.

Анализ временных рядов стоимостей потребительских корзин и индексов инфляции по Подмосковью в целом подтверждает приведенные выше выводы, сделанные по московским данным. Снова наблюдаем близость роста цен с 1991 г. для корзин ИВСТЭ, ГКС-1, ГКС-2, снова ГКС-2 в полтора раза дороже ГКС-1, снова темп роста с декабря 1995 г. меньше всего из этих трех корзин у ГКС-2. Снова индексы с 1991 г. для корзин Бюдж-1 и Бюдж-2 на 20–25 % меньше, чем для первых трех корзин. Однако с декабря 1995 г. наибольший рост стоимости корзины не у двух последних, а у ГКС-1 (на втором месте — корзина ИВСТЭ). Возможно, это отражает меньшую долю состоятельных людей в Подмосковье и, соответственно, меньшую ориентацию торговцев на их «покупательные» возможности.

Обращает на себя внимание меньшая величина индексов с марта 1991 г. в Подмосковье по сравнению с Москвой. Возможно, дело в том, что стоимости потребительских корзин по состоянию на 31 марта 1991 г. брались те же, что и в Москве, поскольку сведения о ценах на тот момент в Московской области у нас отсутствуют. Это приводит к занижению истинных значений индексов инфляции, поскольку и до 31 марта 1991 г. цены в Подмосковье были несколько ниже, чем в Москве. Это относится, в частности, к ценам на овощи и фрукты, молочные продукты и др.

Вполне естественно, что с марта 1991 г. цены на различные товары выросли по-разному. Так, цены на рыбу (треска, минтай) выросли примерно в 25 000 раз, а цена на сахар — менее чем в 4 000 раз. Цены на творог выросли в 2,5 раза больше, чем на сыр, и т. д. В Москве и Московской области рост цен достаточно хорошо согласован. Можно было бы предположить, что в рыночных условиях были исправлены диспропорции прежней дотационной плановой системы. Тогда рост цен после декабря 1995 г. должен был бы быть примерно равномерным, отражающим динамику общеэкономических процессов. Однако конкретные эмпирические данные о динамике цен отвергают это предположение.

В Москве при общем среднем росте цен на 20–30 % больше всего выросли цены на огурцы (74,8 %), баранину (75,9 %), птицу (74,5 %), упали цены на капусту (–4,6 %), сахар (–5,5 %). В Московской области при таком же среднем росте цен больше всего выросли цены на мясо: на говядину (82,6 %), свинину (88,6 %), баранину (107,6 %), при этом упали цены на картофель (–10 %), капусту (–10 %), сахар (–13,1 %), конфеты (–21,1 %), минтай (–6,5 %), растительное масло (–20,6 %) и маргарин (–13 %).

Приходится констатировать, что цены растут непропорционально, стабилизация цен не наступила, более того, динамика цен на отдельные товары не только не согласована, но и отнюдь не близка. Нет никаких признаков приближения к равновесным ценам, чего можно было бы ожидать после 5 лет «либерализации» в соответствии с учебниками экономической теории. В качестве дополнительного следствия из сказанного вытекает, что, подбирая нужным образом номенклатуру товаров для потребительской корзины, можно получить индекс инфляции желательной величины — от значительного роста (+80 %) до падения цен (–20 %).

Временные ряды наименьшей, средней и наибольшей из зарегистрированных по Москве цен 35 продовольственных товаров показывают, что такое понятие, как «цена товара», строго говоря, некорректно. Оно применимо к единственному акту купли-продажи определенного товара в фиксированном месте, в крайнем случае к актам купли-продажи в определенном магазине, но не к огромному городу в целом.

Действительно, зафиксированные нашими сотрудниками цены на один и тот же товар в один и тот же день могут различаться в несколько раз. Так, 26 июня 1996 г. максимальная зафиксированная цена на рис превышает минимальную в 3,04 раза, а на картофель — в 3,13 раза. Аналогичное превышение для баранины 27 декабря 1996 г. равно 2,79. Типовое же превышение максимальной цены над максимальной — в 1,5 раза. Ничего странного в сказанном нет: всем московским потребителям известно, что наибольшие цены — в центральных престижных магазинах, средние — в рядовых магазинах, наименьшие — на «оптовых» рынках.

С целью обеспечения сопоставимости данных сотрудники ИВСТЭ собирали данные в одних и тех же местах (магазинах, киосках, рынках). Это позволяло отслеживать рост цен и получать корректные значения индексов инфляции. Однако это делало несколько условной стоимость потребительской корзины: потребитель, потратив время и обойдя достаточное количество мест продажи, мог обеспечить себя теми же продуктами по менее высоким ценам. Дополнительную сложность вносит большая номенклатура видов одного и того же товара. На какой тип батона белого хлеба ориентироваться? Что понимать под говядиной — отечественную или импортную, вырезку или кости для супа?

Объективно существующая свобода при решении организаторами исследования жизненного уровня подобных вопросов дает возможность для сдвига результатов в заранее заданном направлении. Объективно цены не являются стабильными в пространстве и во времени.

На практике указанные сложности в основном преодолимы. Оказалось, в частности, что стоимость потребительских корзин в различных районах Москвы хотя и отличается, но не более чем на 5–10 %. Отклонения в стоимости отдельных продуктов частично компенсируют друг друга.

Нами изучены вклады отдельных продовольственных товаров в стоимости потребительских корзин. Обращает на себя внимание различие между нормативными (т. е. заданными априори) корзинами ИВСТЭ, ГКС-1, ГКС-2 и полученными в результате анализа реального потребления корзинами Бюдж-1 и Бюдж-2. В реальном потреблении гораздо меньше муки, пшена, геркулеса, ржаного хлеба, картофеля, трески, минтая, молока, маргарина, но гораздо больше лука, яблок, конфет, колбасы, сельди, сливочного масла, сыра. Объяснение достаточно очевидное: корзины ИВСТЭ, ГКС-1, ГКС-2 — это «корзины выживания», действительно минимальные по стоимости корзины, в то время как корзины Бюдж-1 и Бюдж-2 — это корзины реального потребления в семьях студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) различного достатка.

Продовольственные товары, на наш взгляд, можно разделить на две группы. Цены на одни растут монотонно, без всякой связи со временем года, т. е. ведут себя примерно так же, как промышленные товары. Можно предположить, что индексы инфляции, построенные по подмножеству таких товаров, представляют собой общие индексы, «очищенные от сезонности», а потому лучше описывающие реальное состояние экономики, чем исходные индексы. Однако при их применении теряется связь со стоимостью корзины выживания, обеспечивающей существование без физиологического вырождения.

Второе подмножество — это товары с ярко выраженной сезонностью, прежде всего овощи, цены на которые падают во второй половине лета и осенью, а затем начинают возрастать. Наличие этой составляющей приводит к тому, что рост стоимостей корзин практически останавливается летом, а наиболее быстрым является зимой.

Можно ли управлять процессом роста цен? Мы наблюдали результаты явно административного воздействия: в ноябре 1995 г., перед выборами в Государственную Думу, цены в Москве внезапно упали на 9 %, хотя в ноябре цены обычно растут быстрее, чем в иное время года. Тем не менее необходимо констатировать, что обычно изменение цен происходит на микроэкономическом уровне, хотя и провоцируется макроэкономическими процессами, в частности монопольными изменениями цен на энергоносители.

Ложная, на наш взгляд, идея монетаристов состоит в том, что они считают необходимым бороться с инфляцией, сокращая денежную массу в стране, например, не выплачивая вовремя зарплату и пенсии. Однако, как писал академик-секретарь Отделения экономики РАН Д.С. Львов (1930–2007): «Макроэкономические расчеты показывают, что за каждый процент сокращения инфляции приходится расплачиваться тремя-пятью процентами спада производства» [25, с. 11]. Основной удар монетаристской политики приходится не по инфляции, а по производству.

Процесс инфляции частично управляем административными методами. Осенью 1996 г. спрогнозированного ИВСТЭ роста цен не произошло, что объясняется изменением условий: правительство перешло к борьбе с инфляцией путем гигантского роста задолженностей по зарплате, пенсиям и другим платежам (например, детским пособиям, стипендиям студентов).

Если у населения нет денег, торговцы не поднимают цены. Так, в Москве за 2 года — с лета 1995 г. по лето 1997 г. — цены выросли примерно на 50 %, в то время как в г. Иваново — лишь на 15 %, а импортные товары на ивановских рынках стоят на 1/3 дешевле, чем на московских (хотя эти импортные товары закупаются в Москве). Объяснить это можно тем, что экономическое положение в Иваново гораздо хуже, чем в Москве, ниже уровень доходов, больше безработных, что вынуждены учитывать торговцы.

Расчет индекса инфляции — вспомогательная задача, решение которой необходимо для приведения экономических характеристик к сопоставимому виду. Важнейшей задачей является расчет реальной заработной платы, равной частному от деления номинальной заработной платы на индекс инфляции. Известно, что цены на промышленные товары и на услуги, как правило, растут быстрее, чем на продовольствие. Поэтому рассчитываемые по продовольственным потребительским корзинам значения индексов инфляции дают оценку снизу для роста потребительских цен и стоимости жизни в целом.

Минимальный прожиточный минимум оцениваем по методу американской исследовательницы польского происхождения М. Оршански [18] с коэффициентом Энгеля 0,5. Этот метод основан на расчете стоимости минимальной продовольственной корзины и учете стоимостей остальных минимально необходимых затрат с помощью коэффициентов. Так, для «бедных семей» студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) во время пробного бюджетного обследования в октябре — ноябре 1995 г. затраты на продовольствие составили 52 % от всех расходов. Поэтому стоимость прожиточного минимума для них получим, приняв за 52 % стоимость минимальной продовольственной корзины ИВСТЭ, т. е. умножив ее стоимость на 1 / 0,52 = 1,92.

Метод М. Оршански предполагает, что структура затрат практически не меняется. Однако, как уже отмечалось, цены на промышленные товары и на услуги растут быстрее, чем на продовольствие. Поэтому замена 1,92 на 2,00 представляется обоснованной. Полученные значения (на май 1997 г. — 700 тыс. руб. в месяц на человека) хорошо согласуются с уже цитированными данными Московской федерации профсоюзов (750 тыс. руб.). Отметим, что для всей совокупности семей, чьи бюджеты были обследованы в 1996 г., затраты на продовольствие составили 42 %, т. е. для них коэффициент Оршански равен 1 / 0,42 = 2,38.

Средняя (начисленная) заработная плата в Москве составляла в декабре 1996 г. 1,12 млн руб. (в России — 0,84 млн). В сопоставлении со сказанным выше (с учетом логнормального характера функции распределения доходов и наличия детей) это означает, что даже в Москве по крайней мере половина семей живет ниже прожиточного уровня. В 1990 г. средняя зарплата превышала прожиточный минимум в 5,5 раз, а в 1997 г. — лишь в 1,2 раза (по России), т. е. уровень жизни упал в среднем в 4,6 раза. Он весной 1998 г. соответствовал концу 50-х — началу 60-х гг. За август — сентябрь 1998 г. корзина ИВСТЭ подорожала в 1,5 раза (а средняя зарплата практически не изменилась), следовательно, уровень жизни упал уже в 7 раз, и по покупательной способности зарплаты рядовые граждане «приблизились» к возможностям начала 1950-х гг.

Переход к сопоставимым ценам необходимо использовать также при расчете таких макроэкономических характеристик, как валовой внутренний продукт, объем бюджетных ассигнований и т. д. С учетом сказанного выше можно утверждать, что экономика России с 1990 г. по 1998 г. была «сокращена» в 4–6 раз, что соответствует сдвигу назад по времени на 35–45 лет.

Материалы описанного исследования ИВСТЭ были опубликованы в 1998–1999 гг. в работах [10, 12].

Инфляция в XXI в. Использование одной и той же потребительской корзины обеспечивает возможность сопоставления результатов расчетов за различные временные периоды. Этим работы ИВСТЭ выгодно отличаются от подхода официальной статистики. Как известно, Госкомстат РФ (сегодня — Росстат) в 1993–2008 гг. из конъюнктурных соображений неоднократно менял состав потребительской корзины и объемы потребления входящих в нее товаров. Однако в начале XXI в. потребительская корзина официальной статистики мало отличалась от нашей. Здравый смысл восторжествовал: статистическое ведомство решило исходить из тех же разработок специалистов-диетологов РАМН, на которые мы опирались еще в 1993 г. На основе наших исследований инфляции была составлена гл. 7 учебника [1] и соответствующий раздел учебного курса «Эконометрика». Следующий шаг был сделан ИВСТЭ весной 2004 г. [13].

Студенты факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана раз в месяц собирали данные о ценах и рассчитывали индекс инфляции. С целью сопоставимости результатов студент все четыре раза собирал данные на продукты одних и тех же конкретных наименований (марок, сортов) и в одних и тех же торговых организациях. По данным за февраль, март и апрель 2004 г. методом наименьших квадратов строился точечный и непараметрический интервальный прогноз (см. гл. 3) на май, который затем сопоставлялся с реальностью.

Собранные данные позволили изучить разброс значений индекса инфляции в зависимости от конкретных мест сбора данных. Рассмотрим значения индекса инфляции $I(t_1, t_2)$ на текущий момент t_2 = 14 мая 2004 г., соответствующие базовому моменту t_1 = 14 марта 1991 г. (табл. 4.13 — по Москве, табл. 4.14 — по Московской области).

Таблица 4.13

Индексы инфляции в Москве в мае 2004 г.

39,10	40,50	40,56	40,70	41,56	41,73	44,03	47,18
47,18	47,30	48,40	49,27	51,45	52,67	52,70	53,04
54,60	55,00	55,01	55,33	55,62	56,40	57,15	57,29
57,65	57,72	57,80	58,26	58,40	59,59	62,43	–

Таблица 4.14

Индексы инфляции в Московской области в мае 2004 г.

44,02	48,11	50,40
51,02	51,08	54,12
54,12	55,65	57,32

Статистические характеристики для двух выборок индексов инфляции, приведенных в табл. 4.13 и 4.14, содержатся в табл. 4.15. Они показывают, что индекс инфляции — это не число, а типичная нечисловая экономическая величина (см. [26] и гл. 7). Индекс инфляции в Москве можно описать интервалом [39,1; 62,43], а в Московской области — интервалом [44,02; 57,32].

Таблица 4.15

Результаты статистической обработки данных об инфляции (май 2004 г.)

Статистические характеристики	Москва	Подмосковье
Минимум	39,1	44,02
Максимум	62,43	57,32
Объем выборки	31	9
Выборочное среднее арифметическое	51,47	51,76
Среднее квадратическое отклонение	6,80	4,08

Нечисловой характер индекса инфляции позволяет тем не менее сделать полезные для практического применения *выводы*:

1. В мае 2004 г. индекс инфляции равен приблизительно 50 (±20 %), т. е. 50 руб. мая 2004 г. по своей покупательной способности соответствуют 1 руб. марта 1991 г.

2. Индексы инфляции в Москве и Московской области практически совпадают.

В мае 2004 г. в Москве стоимость минимальной продовольственной корзины оценивается как (27 руб. 11 коп.) × 51,47 = 1 400 руб., а прожиточный минимум — как 2 800 руб. в месяц.

Индекс инфляции — это эконометрический инструмент, позволяющий доказательно обсуждать и решать те или иные экономические проблемы. Например, проблему соотношения зарплаты и прожиточного минимума [27]. Средства массовой информации часто рассматривают эту тематику. К сожалению, не всегда обсуждение является доказательным, а выводы — обоснованными. Так, в статье [28] утверждается, что мы в конце 2003 г. «живем, как в 1985 г.». Это не так.

Сравним уровни жизни в 1985 и 2003 гг. Поскольку цены на основные продовольственные товары до марта 1991 г. не росли, можно признать, что индекс инфляции с 1985 по конец 2003 г. совпадает с таковым с марта 1991 по конец 2003 г., т. е. согласно [17, 3-е изд.] с достаточной для расчетов точностью равен 50 (см. табл. 4.6, 4.8). В статье [28] приведены значения средней зарплаты по стране — 199 руб. в 1985 г. и 5 722 руб. в конце 2003 г. Номинальная зарплата выросла в 29 раз, а цены — в 50 раз. Значит, реальная зарплата сократилась в 1,7 раза. В 1985 г. средняя зарплата почти в 4 раза превосходила прожиточный минимум, а в 2003 г. — лишь в 2 с небольшим раза.

В 2004 г. среднестатистический гражданин РФ живет гораздо хуже, чем в 1985 г. Основную причину назвал Президент РФ В.В. Путин в Послании 2004 г. Федеральному Собранию РФ: валовой внутренний продукт (в сопоставимых ценах) в 2003 г. меньше, чем в 1989 г. (динамика макроэкономических показателей России анализируется в [9, с. 285]). Большое значение имеет резко возросшая дифференциация доходов. Измеряющий ее децильный коэффициент увеличился за эти годы с 3 до 15; в развитых странах его значение — около 7.

Крупное исследование было проведено через три с половиной года. Студенты собрали данные о ценах и рассчитали индексы инфляции в Москве и Московской области за период с t_1 = 14 марта 1991 г. до t_2 = 26 ноября 2006 г. (табл. 4.16, 4.17). Обработка данных была проведена О.Ю. Проскуриной.

Таблица 4.16

Индексы инфляции в Москве в ноябре 2006 г.

46,14	46,44	48,26	49,21	49,27	49,71
50,29	51,05	51,07	52,52	53,64	53,75
53,83	54,36	54,68	55,07	57,16	57,83
57,83	58,7	59,11	59,12	60,41	60,41
60,53	60,57	63,81	65,9	68,01	72,15
72,15	72,15	72,15	72,23	73,3	83,61

В Москве индексы инфляции были рассчитаны по ценам в таких торговых организациях, как гипермаркет «Ашан», супермаркет SPAR, гипермаркет «Метро», супермаркет «Перекресток», другие магазины, рынки. Проверка на однородность двух выборок — индексов инфляции в гипермаркете «Ашан» и индексов инфляции в других магазинах, не входящих в сети, — с помощью критерия Крамера — Уэлча [29] показала, что выборки однородны, а следовательно, их можно объединить в одну.

Слушатели программы «Топ-менеджер» («Мастер делового администрирования» / MBA) Академии народного хозяйства при Правительстве РФ (в настоящее время — Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ) собрали данные о ценах и рассчитали индексы инфляции в ряде регионов РФ в 2006 г. (табл. 4.18).

Таблица 4.17

Индексы инфляции в Московской области в ноябре 2006 г.

39,84	49,15	52,58	58,65
63,51	66,09	68,09	69,18

Таблица 4.18

Индексы инфляции по регионам России

№	Город, регион	Дата	Индекс
1	Владимир	22.02.07	44,5
		22.03.07	46,8
2	Иркутск	09.01.07	42,38
		09.02.07	42,97
3	Красноярск (1)	25.11.06	59,50
		30.01.07	61,77
4	Красноярск (2)	25.11.06	64,60
		08.02.07	66,86
5	Калужская область, г. Малоярославец	20.12.06	46,86
		10.02.07	48,51
6	Нижний Новгород	10.11.06	43,16
		21.05.07	47,0
7	Новосибирск	01.03.07	51,79
		01.05.07	53,74
8	Петропавловск-Камчатский	10.11.06	28,94
		25.01.07	32,96
9	Ростов-на-Дону (1)	01.02.05	51,99
		01.02.07	67,67

№	Город, регион	Дата	Индекс
10	Ростов-на-Дону (2)	01.02.07	39,66
		01.03.07	46,63
11	Ростов-на-Дону (3)	01.02.07	43,83
12	Татарстан, г. Бавлы	10.11.06	33,72
		25.01.07	36,05
13	Томск	25.12.06	49,86
		01.02.07	51,03
14	Тюменская область, пос. Боровский	Январь 07	38,37
		Март 07	41,27
15	Череповец	01.11.06	48,1
		20.01.07	54,3

Примечание. Несколько исследований, проведенных в одном городе, указаны под разными порядковыми номерами. Следует иметь в виду, что стоимости потребительской корзины ИВСТЭ в марте 1991 г. для разных регионов различаются, иногда существенно.

Статистические характеристики для выборок индексов инфляции, приведенных в табл. 4.16–4.17, содержатся в табл. 4.19. Они показывают, что индекс инфляции имеет заметный разброс, это не число, а типичная нечисловая экономическая величина [26]. В соответствии с приведенными данными индекс инфляции в Москве можно описать интервалом [46,14; 83,61], в Московской области — интервалом [39,84; 69,18].

Таблица 4.19

Результаты статистической обработки данных об индексах инфляции I(1990, 11.2006) в ноябре 2006 г.

Статистические характеристики	Москва	Подмосковье	Россия
Минимум	46,14	39,84	42,38
Максимум	83,61	69,18	64,6
Объем выборки	36	8	6
Выборочное среднее арифметическое	59,07	58,39	53,40
Среднее квадратическое отклонение	9,74	9,04	7,67

Статистическую обработку данных, приведенных в табл. 4.18, проводить было бы необоснованно, поскольку регионы, в которых проводились исследования, не представляют собой представительную (репрезентативную) выборку из генеральной совокупности регионов России (см. гл. 1). Кроме того, различаются даты снятия информации о ценах. Поэтому для включения в посвященный РФ столбец отобрана лишь часть данных. Тем не менее табл. 4.18 дает предварительное представление о динамике цен в регионах России. В частности, подтверждается высказанное ранее утверждение о том, что официальные статистические органы систематически занижают индексы инфляции: приведенное в табл. 4.8 значение 39,194 меньше 24 из 29 индексов инфляции, замеренных слушателями Академии народного хозяйства.

Судя по собранным данным, структура стоимости потребительской корзины в среднем по Москве сравнительно мало изменилась с марта 1991 г. по декабрь 2006 г. (рис. 4.1).

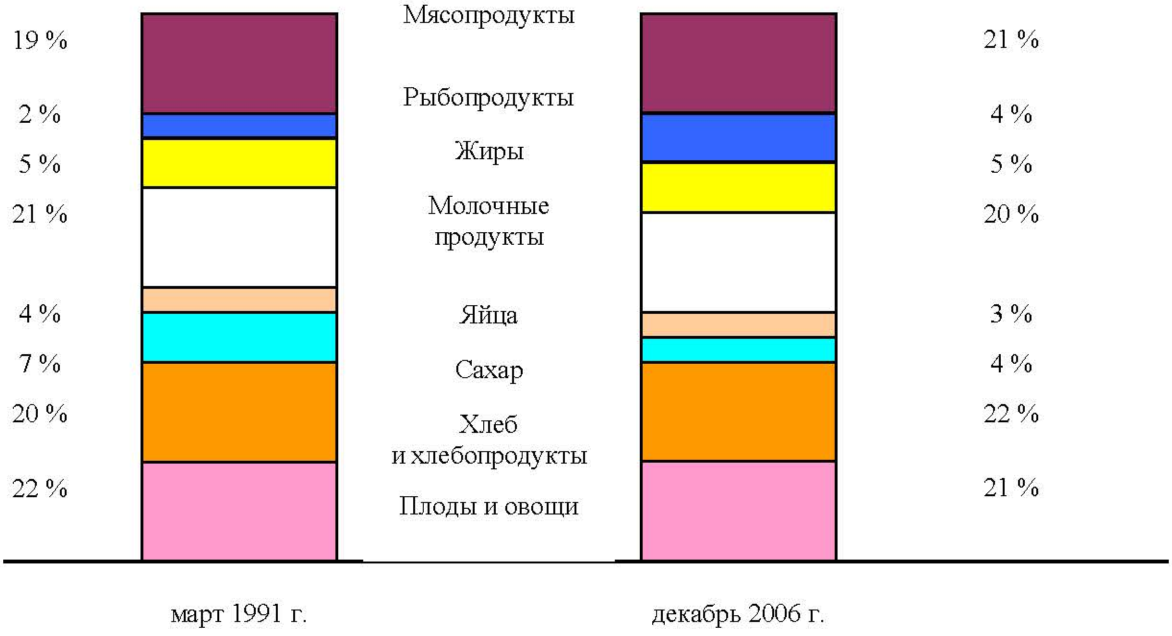


Рис. 4.1. Структура стоимости минимального набора продуктов питания

Нечисловой характер индекса инфляции позволяет тем не менее сделать полезные для практического применения *выводы*:

1) в 2007 г. индекс инфляции равен приблизительно 60, т. е. современные 60 руб. по своей покупательной способности примерно соответствуют 1 руб. марта 1991 г.;

2) индексы инфляции в Москве и Московской области практически совпадают и достаточно близки к индексам инфляции по большинству других регионов РФ;

3) в ноябре 2006 г. в Москве стоимость минимальной продовольственной корзины оценивается как (27,11 руб.) × 59,07 = 1 601,4 руб., а прожиточный минимум — как 3 202,8 руб. в месяц (в соответствии с методом Оршански [18] с коэффициентом Энгеля C = 2,0).

Отметим для сравнения, что по методике и данным Росстата (www.gks.ru) стоимость минимального набора продуктов питания в среднем по России в конце ноября 2006 г. составила 1 443,6 руб. в расчете на месяц.

В 2007–2008 гг. наблюдаем всплеск роста цен (табл. 4.19–4.21). Таблица 4.19 (Москва и Подмосковье) рассчитана по данным факультета ИБМ МГТУ им. Н.Э. Баумана, табл. 4.19 (РФ) и табл. 4.20 получены слушателями программы «Топ-менеджер» (МБА) Бизнес-школы АНХ при Правительстве РФ, табл. 4.21 — слушателями Бизнес-школы MBA МИРБИС, т. е. действующими менеджерами высшего звена организаций и предприятий различных регионов РФ и Москвы.

Таблица 4.20

Индексы инфляции в Российской Федерации на конец 2007 — начало 2008 г.

№	Регион	Дата t_1	$I(90,t_1)$	Дата t_2	$S(t_2)$, месяц	$I(90,t_2)$	$I(t_1,t_2)$
1	Якутск	01.11.07	76,067	01.01.08	2 074,67	84,519	11,1 %
2	Хабаровск	30.11.07	66,87	30.12.07	1 759,21	68,79	2,9 %
3	Петропавловск-Камчатский	09.12.07	93,70	10.01.08	2 576,69	102,31	9 %
4	Малоярославец	12.06.07	55,09	01.08.08	2 153,49	84,21	53 %
5	Красноярск	08.12.07	82,81	12.01.08	2 486,29	97,58	18 %
6	Тюмень	05.12.07	75,36	10.01.08	2 297,28	82,94	10 %
7	Красноярск	26.10.07	47,77	10.01.08	1 594,42	63,17	32,2 %
8	Нижневартовск	01.11.07	54,45	01.01.08	1 949,92	62,513	14,8 %
9	Екатеринбург	01.12.07	50,28	10.01.08	2 142,82	84,10	67 %
10	Рязань	01.11.07	63,28	01.01.08	1 785,92	69,84	10 %
11	Москва	26.11.07	88,80	26.12.07	2 280,69	88,84	0,05 %
12	Новосибирск	01.12.07	84,09	13.01.08	2 167,30	84,75	0,78 %
13	Самара	28.11.07	67,5	08.01.08	1 762,17	68,9	2 %

Анализ приведенных в табл. 4.19–4.21 результатов измерений роста цен приводит к ряду интересных и практически полезных выводов [30]. В частности, в Екатеринбурге цены за полтора месяца выросли на 67 %, в Красноярске за два с половиной — на 32 %, в Малоярославце за последний год — на 53 %. Данные Росстата — 11,9 % за 2007 г. Средний результат по табл. 4.20 и 4.21 — 13,8 % за последние месяц-два. Средний рост цен с 1990 г. — в 81,69 раз, т. е. на один рубль можно было купить в 1990 г. столько же, сколько на 81 руб. 69 коп. в январе 2008 г. А год назад индекс инфляции был заметно меньше — 59,07 (табл. 4.19, Москва). Рост на 38,3 % — в три с лишним раза больше, чем по данным Росстата.

Таблица 4.21

Индексы инфляции на конец 2007 — начало 2008 г., Москва

№	Дата t_1	$I(90, t_1)$	Дата t_2	$S(t_2)$, мес.	$I(90, t_2)$	$I(t_1, t_2)$
1	28.12.07	115,08	30.01.08	2 992,42	117,01	1,68 %
2	28.12.07	73,61	29.01.08	1 944,66	76,04	3,30 %
3	27.12.07	76,60	31.01.08	2 034,95	79,57	3,88 %
4	27.12.07	65,53	31.01.08	–	68,37	4,33 %
5	27.12.07	79,25	31.01.08	2 074,60	81,12	2,36 %
6	28.12.07	115,492	29.01.08	3 109.94	121,01	5,30 %
7	01.01.08	75,38	01.02.08	2 035,45	79,59	5,58 %
8	16.01.08	92,73	31.01.08	2 472,84	96,70	4,28 %
9	01.01.08	98,96	01.02.08	2 695,68	105,41	6,52 %
10	10.12.07	66,99	10.01.08	1 735,22	67,85	1,29 %

Отметим, что расхождение результатов расчетов по независимо собранной информации и данных официальной статистики частично объясняется тем, что в последние годы Росстат в очередной раз сменил потребительскую корзину. Это делает еще более неясной связь сообщаемых им численных значений инфляции с динамикой реальных экономических процессов (на эту неясность обращали внимание участники дискуссии, проведенной в ходе журналистского расследования [17]). Как следствие, констатируем, что каждое физическое и юридическое лицо может самостоятельно измерять рост цен с помощью методики, подробно изложенной в настоящей главе. Таким путем целесообразно бороться с монополией Росстата на результаты измерений инфляции.

Отметим еще одну особенность последних лет. Коэффициент Энгеля $C = 2,0$ при оценке прожиточного минимума был получен на основе бюджетного исследования середины 1990-х гг. Им можно пользоваться лишь при условии постоянства структуры расходов. Однако в последние годы резко растет доля расходов на оплату жилищно-коммунальных услуг. Это означает, что доля расходов на продовольствие у всех семей и особенно у бедных заметно снижается. Следовательно, коэффициент Энгеля $C = 2,0$ должен быть повышен, по экспертной оценке, до 3,0 (в 2009 г.).

Инфляция за 80 лет. Нет необходимости связывать возможность расчета индекса инфляции с каким-либо определенным интервалом времени и даже с определенным социально-экономическим строем. Можно формально вычислить индексы инфляции и за весьма длительные промежутки времени. Так, например, рост цен на основные продукты питания с 1913 г. по апрель 1994 г. представлен в табл. 4.22.

Таблица 4.22

Цены в 1913 г. и в апреле 1994 г. (руб./кг)

Наименование продукта	Цена в 1913 г.	Цена в апреле 1994 г.
Хлеб пшеничный	0–05	740
Хлеб ржаной	0–03	400
Молоко	0–14	625
Сыр	0–40	6 150
Масло сливочное	0–55	5 100
Масло растительное	0–13	2 300
Сметана	0–30	2 500
Говядина	0–23	2 760
Свинина	0–20	4 000
Баранина	0–17	2 000

Используя объемы потребления из потребительской корзины ИВСТЭ, получаем, что индекс инфляции за 1913–1994 гг. составил 11 297, или 1 129 600 %. Подобные расчеты позволяют оценить реальное значение количественных экономических величин, используемых в публикациях разных лет.

Отметим, что представление о прожиточном минимуме меняется со временем. Еще 40 лет назад выход в Интернет и мобильная телефонная связь были уделом избранных, а сейчас эти услуги пора включать в прожиточный минимум. С другой стороны, во многих крупных городах дрова перестали быть предметом первой необходимости, а потому нет надобности и возможности отслеживать цены на дрова. Необходимость модернизации потребительских корзин создает дополнительные проблемы по обеспечению сопоставимости результатов расчетов.

Потребительские корзины, включающие в себя промтовары и услуги, и соответствующие индексы инфляции. В настоящее время, чтобы не только быть в курсе проблем, касающихся инфляции в нашей стране, но и хорошо ориентироваться в создавшейся ситуации, недостаточно отслеживать только изменение цен на продовольственные товары. Необходимо фиксировать инфляцию и в сфере коммунальных, транспортных, медицинских, образовательных и других услуг, а также анализировать цены на промышленные товары широкого потребления.

Рост цен в этих областях достаточно заметен (если в 1990 г. проезд в метро в Москве обходился в 5 коп., то в ноябре 1995 г. он стоил 1 000 руб., в феврале 1999 г., после деноминации в 1 000 раз, — 4 рубля, в 2001 г. разовая поездка обходилась в 5 руб., а в 2009 г. — уже в 22 руб.). Следует также отметить, что темпы роста цен на те или иные промышленные товары и услуги не всегда совпадают с темпами роста цен на продовольственные товары. Например, наблюдалось подорожание хлебобулочных товаров примерно в 2 000 раз за три года (1991–1994), а цены на компьютерные товары выросли за это время в среднем только в 80 раз.

При обсуждении проблем инфляции часто обращают внимание на то, что в настоящее время заметная часть доходов каждой семьи идет на оплату коммунальных услуг и покрытие расходов на транспорт и связь. Необходимо учитывать расходы на услуги прачечной, парикмахерской, на ремонт обуви и т. д. Увеличиваются расходы на удовлетворение культурных потребностей из-за роста цен на книги, журналы, газеты, билеты в театры и кино, спортивный инвентарь и т. д. С течением времени подобные расходы конкретных физических лиц могут и сокращаться из-за прекращения покупок книг, журналов, газет, прекращения походов в театры и т. д.

Дорогими сегодня являются и промышленные товары. Но при подсчете индекса инфляции по этим товарам возникает ряд трудностей. Например, наблюдается разброс цен по торговым точкам или имеет место временное отсутствие в магазинах некоторых товаров. Кроме того, меняется мода, многие виды одежды выходят из употребления, вместо них появляются новые. То же самое в связи с развитием техники происходит и с товарами длительного пользования (когда-то раньше не было телевизоров, холодильников, стиральных машин, железных дорог и самолетов). Кроме того, пока еще мы можем пользоваться отдельными бесплатными услугами в области медицины и образования, но скоро, очевидно, и это будет платным, по крайней мере частично.

Для того чтобы подсчитать индекс инфляции по достаточно обширной потребительской корзине, включающей не только продовольственные товары, но и одежду, товары длительного пользования, услуги и т. п., необходимо иметь соответствующие нормы потребления. Определить их весьма трудно. (При нормативном подходе к экономическим явлениям — откуда взять нормы? При позитивном — как в нестабильной ситуации замерить потребительские бюджеты?) Поэтому в настоящей главе мы ограничились индексами инфляции, рассчитанными для продовольственной потребительской корзины. Индекс инфляции можно считать не только для Москвы в целом, но и для отдельных ее районов и даже для покупателей отдельных магазинов — достаточно измерить соответствующие цены; не только для населения в целом, но и для отдельных слоев и даже отдельных семей — достаточно знать соответствующие потребительские корзины.

Как уже отмечалось, в настоящее время, в частности в связи с резким ростом стоимости жилищно-коммунальных услуг, коэффициент 2,0 в методе Оршански расчета прожиточного минимума представляется заниженным. Адекватное значение может быть получено в результате анализа результатов бюджетного обследования типа того, что было проведено ИВСТЭ в 1995 г. Альтернативный подход состоит в использовании иной потребительской корзины, например, предусмотренной в Федеральном законе «О прожиточном минимуме в Российской Федерации» (в редакции Федеральных законов от 27.05.2000 № 75-ФЗ, от 22.08.2004 № 122-ФЗ).

Инфляция и ВВП. Валовой внутренний продукт (ВВП), валовой национальный доход (ВНД) и другие характеристики экономического положения страны рассчитываются в текущих ценах. Для перехода к неизменным ценам надо поделить на индекс инфляции (т. е. умножить на дефлятор). В 2 раза занизишь индекс инфляции — в 2 раза завысишь валовой национальный продукт, валовой внутренний продукт, национальный доход и иные макроэкономические характеристики.

По данным Правительства РФ, к концу 1998 г. валовой внутренний продукт составил 55,7 % от уровня 1990 г. (динамика макроэкономических показателей России анализируется в [19, с. 285]). Падение больше, чем в Германии в результате разгрома фашизма. И это по официальным данным! Используя же коэффициент занижения инфляции со стороны Госкомстата РФ, равный 2, получаем более реальную цифру — 25 % от уровня 1990 г. Падение в 4 раза! Эта оценка близка к выводам ряда специалистов, независимых от правительства.

Напомним, что номинальный ВВП исчисляется в текущих рыночных ценах. Чтобы определить реальный ВВП, необходимо выразить его в сопоставимых ценах базисного года. Для этого применяется так называемый дефлятор ВВП, т. е. индекс инфляции, который отражает изменение среднего уровня цен самой широкой группы товаров и услуг за определенный период, охватывающей все составляющие ВВП. Расчеты проводят с помощью так называемой системы национальных счетов [31].

Нет ничего удивительного в том, что дефлятор ВВП отличается от индекса инфляции Росстата. Так, индекс-дефлятор ВВП за 2006 г. по отношению к ценам 2005 г. составил 15,4 %, в то время как индекс инфляции Росстата за 2006 г. равен 9 %. Разные корзины — разные результаты.

Виды инфляции. Эконометрика описывает инфляцию. Причины инфляции — это предмет иных экономических наук. Однако несколько слов сказать об этом полезно.

Всегда говорят об *инфляции спроса*. Это ситуация, когда у населения много денег, которые оно хочет истратить, а товаров мало. Тогда цены растут. Либо непосредственно, либо через механизм «черного рынка».

Другой вид инфляции — *инфляция издержек*. Производитель вынужден повышать цену на свою продукцию, потому что его поставщики повышают цены на собственную продукцию. Этот порочный круг очень трудно разорвать.

Третий вид инфляции — *административная инфляция*. Цены повышает государство. Естественно, на то, что оно контролирует. Например, с августа по декабрь 1998 г. курс доллара США был поднят примерно в 4 раза. Последствия были понятные: адекватный подъем цен на импортные товары, потом рост цен на продукцию, для изготовления которой использовались импортные комплектующие, а затем и рост цен на чисто отечественную продукцию. В результате инфляция за год составила более 80 %.

Выше уже приводились примеры административного регулирования цен. Политика государственных органов в области энергетики, транспорта, экспорта и импорта, налогообложения и других сфер государственного регулирования экономики оказывает непосредственное влияние на инфляцию.

Заключительные замечания. Нобелевский лауреат по экономике Василий Васильевич Леонтьев (1905–1999) подсчитал, что лишь 1 % ученых-экономистов анализирует вновь собранные данные, 30 % используют данные, приведенные в публикациях предшественников, а остальные в своих рассуждениях вообще не обращаются к реальному миру [32]. Настоящая глава учебника составлена на основе работ ИВСТЭ, относящихся к тому 1 %, о котором писал В.В. Леонтьев.

Судя по опыту двух последних десятилетий, инфляционные процессы стали постоянной составляющей отечественной экономической жизни, и экономистам, менеджерам, инженерам различных специальностей придется учитывать их свойства в своей работе. В настоящей главе рассмотрены основы эконометрической теории инфляции. Однако не все проблемы раскрыты достаточно подробно. Кратко рассмотрим некоторые из них.

Прогнозирование индекса инфляции осуществляется с помощью методов наименьших квадратов (гл. 3), экспертных технологий (гл. 5), в том числе основанных на сценарном подходе, и различных иных процедур, разработанных в организационно-экономическом моделировании. Обратим внимание на периодическую составляющую во временном ряду индексов инфляции. Темп роста цен максимален в зимние месяцы (декабрь — январь), затем постепенно уменьшается до минимума в летние месяцы (июль — август), иногда переходя в дефляцию, затем снова растет. Непараметрический метод выделения периодической составляющей временного ряда рассмотрен в [1, разд. 6.3], [29, разд. 10.2], а также — иной подход — в гл. 3 выше.

Стоимости потребительской корзины ИВСТЭ на один и тот же момент времени в наших публикациях, как мог заметить внимательный читатель, несколько отличаются. В этом нет ничего странного, так как исходные цены на продукты несколько отличались. Строго говоря, цены, стоимости потребительских корзин, индексы инфляции и многие другие экономические величины следовало бы считать нечисловыми данными (см. гл. 7, [26], [1, разд. 1.5]), например интервальными или нечеткими. Развитие нечисловой экономики — перспективное направление научных исследований.

Неоднозначность выбора потребительской корзины, приводящая к неоднозначности индекса инфляции, порождает естественный вопрос: можно ли описать рост цен однозначно, т. е. полностью определенной функцией времени? Строгий ответ известен: нет, нельзя.

Еще в 1930-е гг. В.В. Леонтьев показал, что однозначно можно сравнивать только состояния экономик, имеющих одинаковую отраслевую структуру, так что описывающие их векторы (объемов производства по отраслям) отличаются только множителем [32]. Реально таких двух экономик не существует.

Каждый год структура экономики меняется. Поэтому, строго говоря, нельзя сравнивать состояния экономик разных стран и даже состояния экономики одной и той же страны в разные годы. Этому же феномену посвящена теорема профессора В.В. Подиновского: любое изменение коэффициентов весомости единичных показателей качества продукции приводит к изменению упорядочения некоторых пар изделий по средневзвешенному показателю (гл. 6).

Однако реально мы, несмотря на теоретический запрет, сравниваем экономическое положение в разные годы — зная, что это сравнение проводится с некоторой степенью условности, допустимой в рассматриваемых постановках прикладных задач. Точно на тех же основаниях мы должны принимать во внимание рост цен, выражаемый тем или иным индексом инфляции.

Мы почти не затрагивали историю инфляции. Наиболее быстро цены росли в Германии после Первой и Второй мировых войн и в СССР после Гражданской войны. Немецкий писатель Эрих Мария Ремарк в своем романе «Черный обелиск» описывает Германию 1923 г.: «Доллар стал неистовствовать, он подскакивает ежедневно уже не на тысячи и десятки тысяч, а на сотни тысяч марок. Позавчера он стоил миллион двести тысяч, вчера — миллион четыреста. Ожидают, что завтра он дойдет до двух миллионов, а в конце месяца — до десяти. Рабочие получают теперь заработную плату два раза в день — утром и под вечер, и каждый раз им дают получасовой перерыв, чтобы они успели сбегать в магазины и поскорее сделать покупки — ведь если они подождут до вечера, то потеряют столько, что их дети останутся полуголодными» [33, с. 420]. Рассмотрение методов выхода из инфляции находится вне рамок настоящего учебника.

Знание динамики индекса инфляции повышает обоснованность принятия хозяйственных решений. Отслеживание изменения индекса инфляции полезно и одновременно доступно всем юридическим и физическим лицам. Трудоемкость расчета одного значения индекса инфляции не превосходит 2–4 ч. Проведение такой работы обеспечивает связь обучения экономическим и управленческим дисциплинам с реальной экономической жизнью и может быть рекомендовано на всех уровнях экономических дисциплин, от средней школы до послевузовского образования. Полученные по независимо собранной информации оценки инфляции, рассмотренные в настоящей главе, используются в научных исследованиях и учебном процессе различных образовательных структур, а также в производственной деятельности предприятий и организаций, например на Магнитогорском металлургическом комбинате.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебник для вузов / А.И. Орлов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва : Экзамен, 2004. — 576 с.

2. Статистический словарь / главный редактор М.А. Королев. — Москва : Финансы и статистика, 1989. — 623 с.

3. *Орлов, А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях / А.И. Орлов. — Москва : Наука, 1979. — 296 с.

4. *Самуэльсон, П.* Экономика / П. Самуэльсон. — Москва : МГП «Алгон» : Изд-во ВНИИСИ, 1992. — Т. 1. — 333 с. — Т. 2. — 415 с.

5. *Макконнелл, К.Р.* Экономикс: Принципы, проблемы и политика. В 2 томах. Т. 1 / К.Р. Макконнелл, С.Л. Брю. — Москва : Республика, 1995. — 400 с.

6. *Коростикова, Т.* Цены вырастут в 5 раз / Т. Коростикова // Аргументы и факты. — 1994. — № 16. — С. 5.

7. *Орлов, А.И.* Методы принятия управленческих решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : КНОРУС, 2018. — 286 с.

8. *Орлов, А.И.* Основы теории принятия решений : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 66 с.

9. *Орлов, А.И.* Теория принятия решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 826 с.

10. Как оценивать уровень жизни? (На примере московского региона) / А.И. Орлов, В.Н. Жихарев, В.А. Цупин, В.В. Балашов // Обозреватель (Observer). — 1999. — № 5(112). — С. 80–83.

11. Математические модели в экономике. Расчет индекса инфляции / А.И. Орлов, В.В. Балашов, О.В. Куроптев [и др.]. — Москва : Изд-во МИЭМ НИУ ВШЭ, 1994. — 32 с.

12. *Орлов, А.И.* Анализ динамики цен на продовольственные товары в Москве и Московской области / А.И. Орлов, В.Н. Жихарев, В.А. Цупин // Научные труды Рижского института мировой экономики. — Рига : РИМЭ, 1998. — № 2. — С. 19–25.

13. *Орлов, А.И.* Интервальная оценка инфляции по независимой информации / А.И. Орлов, Л.А. Орлова // Российское предпринимательство. — 2004. — № 10. — С. 44–49.

14. *Орлов, А.И.* Оценка инфляции по независимой информации / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 108. — С. 259–287.

15. *Куликова, С.Ю.* Контроллинг динамики потребительских цен и прожиточного минимума / С.Ю. Куликова, В.С. Муравьева, А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2017. — № 126. — С. 403–421.

16. *Найдис, О.А.* Потребительские корзины, контроллинг уровня потребительских цен и МРОТ / О.А. Найдис, И.А. Найдис // Контроллинг. — 2019. — № 74. — С. 40–53.

17. *Панфилова, Ю.* Как вы считаете? / Ю. Панфилова, К. Угодников // Итоги. — 2005. — № 46(492). — С. 26–30.

18. *Orshansky, M.* How Poverty is measured? / M. Orshansky // Monthly Labor Review. — 1969. — Vol. 92. — № 2. — P. 37–41.

19. *Ковнир, В.Н.* История экономики России : учебное пособие / В.Н. Ковнир. — Москва : Логос, 2005. — 472 с.

20. Доклад о мировом развитии 2004 г. Всемирный банк. — Москва : Весь Мир, 2004. — 290 с.

21. *Баканов, М.И.* Теория экономического анализа / М.И. Баканов, А.Д. Шеремет. — Москва : Финансы и статистика, 2000. — 416 с.

22. *Сычева, Г.И.* Оценка стоимости предприятия (бизнеса) / Г.И. Сычева, Е.Б. Колбачев, В.А. Сычев. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2003. — 384 с.

23. *Мюллер, Г.* Учет: международная перспектива / Г. Мюллер, Х. Гернон, Г. Миик. — 2-е изд., стер. — Москва : Финансы и статистика, 1996. — 136 с.

24. Математическое моделирование процессов налогообложения (подходы к проблеме) / под редакцией В.Н. Жихарева, А.И. Орлова и др. — Москва : Изд-во ЦЭО Министерства общего и профессионального образования РФ, 1997. — 232 с.

25. *Львов, Д.С.* Реформы с позиции современной науки / Д.С. Львов // Научные труды Международного союза экономистов и Вольного экономического общества России. — Москва : Санкт-Петербург, 1995. — С. 7–16.

26. *Орлов, А.И.* Размытые цены. Нечисловая экономика и управление инвестиционным процессом / А.И. Орлов // Российское предпринимательство. — 2001. — № 12. — С. 103–108.

27. *Федосеев, В.Н.* За что нас покупают (состояние рыночной мотивации труда в России) / В.Н. Федосеев, А.И. Орлов // Российское предпринимательство. — 2000. — № 6. — С. 10–19.

28. *Добротворский, Н.* Курс холодильника к кошельку: живем, как в 1985 году! / Н. Добротворский, А. Седов // Комсомольская правда. — 2003. — С. 3–4.

29. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

30. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование процессов управления промышленными предприятиями в условиях рисков инфляции /

А.И. Орлов // Стратегическое планирование и развитие предприятий. Секция 4. — Москва : ЦЭМИ РАН, 2008. — С. 124–126.

31. Национальное счетоводство / под редакцией Г.Д. Кулагиной. — Москва : Финансы и статистика, 1997. — 448 с.

32. *Леонтьев, В.В.* Экономические эссе. Теория, исследования, факты и политика / В.В. Леонтьев. — Москва : Политиздат, 1991. — 414 с.

33. *Ремарк, Э.М.* Черный обелиск / Э.М. Ремарк. — Москва : ВИТА-ЦЕНТР, 1992. — 384 с.

34. *Елисеева, И.И.* Общая теория статистики / И.И. Елисеева, М.М. Юзбашев. — Москва : Финансы и статистика, 1998. — 368 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Рассчитайте индекс инфляции с 14.03.1991 по 14.03.2001 на основе потребительской корзины и цен, приведенных в таблице.

Номенклатура, годовые нормы потребления и цены (руб.)

№ п/п	Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 14.03.1991	Цена на 14.03.2001
1	Хлеб ржаной	65,3	0–20	10
2	Столовые корнеплоды	40,6	0–20	9
3	Колбаса докторская	0,4	2–30	95
4	Молоко, кефир	110,0	0–32	17
5	Сметана, сливки	1,6	1–70	50
6	Маргарин	6,3	1–20	35

2. Гражданин Иванов в марте 1991 г. получил 200 руб., а в марте 2001 г. — 5 000 руб. Во сколько раз изменился его доход? Увеличился или уменьшился? (Используйте индекс инфляции из задачи 1.)

3. За январь индекс инфляции составил 50 %, а за февраль — 200 %. Чему равен индекс инфляции за два месяца? Каков средний темп (уровень) инфляции?

4. Выразите текущий курс доллара США в ценах марта 1991 г. (индекс инфляции можно принять равным 100).

5. Расскажите о динамике индекса инфляции в России.

6. Почему для определения индекса инфляции (в процентах) за два года нельзя складывать индексы инфляции за первый год и за второй год, выраженные в процентах?

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ, РЕФЕРАТОВ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Место индексов инфляции в системе экономических индексов (сравните с индексами Ласпейреса, Пааше, И. Фишера [34]).

2. Теоремы умножения (в случае четырех и более моментов времени) и сложения (для групповых индексов инфляции), их доказательства и использование.

3. Экспериментальная работа: соберите данные о ценах и рассчитайте индекс инфляции для своего региона (на основе потребительской корзины ИВСТЭ).

4. Прогнозирование индекса инфляции: методы, практическая реализация, использование для принятия управленческих решений.

5. Учет инфляции при проведении анализа финансово-хозяйственной деятельности предприятия.

6. Обеспечение сопоставимости результатов расчетов при модернизации потребительской корзины.

7. Влияние инфляции на хозяйственную жизнь.

8. Методы выхода из инфляции.

ГЛАВА 5. ЭКСПЕРТНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В экономике и управлении используют как объективные данные, так и мнения людей. Поэтому важными составляющими эконометрики и организационно-экономического моделирования являются современные экспертные технологии, основанные на теории и практике экспертных оценок.

5.1. ПРИМЕРЫ ПРОЦЕДУР ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Согласно англо-русскому словарю *expert* — это специалист. Однако в русском языке слово «эксперт» приобрело дополнительные нюансы. Под экспертом понимают не просто специалиста (например, выпускника вуза), а только такого, кто обладает высокой квалификацией. И, кроме того, умеющего использовать свою интуицию для решения поставленных перед ним задач. Например, для диагностики, прогнозирования, выбора варианта технического или управленческого решения.

Ударение в слове «эксперт», как и в словах «маркетинг» и «творог», можно ставить как на первый слог, так и на второй. Оба варианта признаются нормой. Ударение на первый слог соответствует английскому языку, ударение на второй слог больше подходит для русского языка.

Рассмотрим ряд примеров процедур экспертных оценок, одновременно вводя нужные для дальнейшего обсуждения термины.

Индивидуальные и коллективные экспертные оценки. Экспертные оценки бывают индивидуальные и коллективные. *Индивидуальные оценки* — это оценки одного специалиста. Например, преподаватель единолично ставит на экзамене оценку студенту; врач ставит диагноз больному и назначает лечение; инспектор ГИБДД экспертно оценивает соблюдение правил дорожного движения водителем и прописывает лечение — штраф за нарушение правил.

Но в сложных случаях заболевания или при угрозе отчисления студента за плохую учебу обращаются к *коллективному* мнению *экспертной комиссии*: симпозиуму врачей или комиссии преподавателей. Классический пример коллективной экспертной оценки — решение суда присяжных. По простым делам судья принимает решение единолично, при рассмотрении тяжких преступлений законодательством предусмотрена возможность участия в принятии решений комиссии экспертов — присяжных заседателей.

Аналогичная ситуация — в армии. Обычно командующий принимает решение единолично, но в сложных и ответственных ситуациях проводят военный совет. Один из наиболее известных примеров такого рода — военный совет 1812 г. в Филях, на котором под председательством М.И. Кутузова решался вопрос: «Давать или не давать французам сражение под Москвой?»

Работа экспертной комиссии может быть растянута во времени. Например, лечащий врач может отправить пациента на обследование врачам-специалистам, дать распоряжение провести различные анализы, флюорографию и т. п. Собрав мнения экспертов (в данном случае врачей-специалистов) и проанализировав объективные данные, лечащий врач формулирует окончательное решение, выражающее мнение всей экспертной комиссии.

Индивидуальная экспертная оценка может потребовать от специалиста выполнения большого объема работы. Например, подготовка рецензии на рукопись книги или заключения оппонента о диссертации, представленной к защите на соискание ученой степени. Обычно эксперт должен следовать тем или иным правилам, приведенным в нормативной и методической документации по определенному виду экспертной деятельности. Например, при оценке диссертации эксперт должен исходить из нормативных документов Высшей аттестационной комиссии РФ.

Индивидуальная экспертная оценка научно-технических проектов. В структуры государственной власти постоянно поступают научно-технические проекты, подготовленные различными организациями и отдельными гражданами. По каждой заявке требуется принять решение о целесообразности осуществления проекта и необходимом для этого содействии со стороны структур государственной власти (финансировании, организационных решениях).

Первый шаг — проект направляется на экспертизу. Эксперт вместе с проектом получает задание примерно следующего содержания.

Вопросы, которые должны быть отражены в заключении эксперта:

1. Актуальность проекта.
2. Краткая характеристика положения в данной области в стране и за рубежом.
3. Научное значение проекта.
4. Научная новизна предлагаемых решений.
5. Прикладное значение проекта.
6. Новизна предлагаемых технических (технологических) решений.
7. Существующие отечественные и зарубежные аналоги (марка, тип, фирма, страна).
8. В чем заключается преимущество предлагаемых решений по сравнению с существующими в данной области в стране и за рубежом?

9. Сравнительные данные экономических показателей объекта и его аналогов (в сопоставимом виде).

10. Оценка потенциала разработчика:

– наличие научно-технического задела в данной области и в чем он выражается;

– наличие научно-производственной базы.

11. Обоснованность стоимости работ, оценка структуры затрат.

12. Реальность достижения поставленных целей:

– в предлагаемые сроки;

– предлагаемыми способами (методами) и ресурсами.

13. Возможность серийного освоения предлагаемого проекта.

14. Последствия создания и использования проекта:

– научные и научно-технические;

– экологические;

– гуманитарные;

– экономические;

– социальные.

15. Выводы:

– необходимость реализации проекта (полная, частичная);

– целесообразность финансирования (в целом, частично);

– рекомендации эксперта.

Мнение эксперта должно быть выражено в специальном документе — ***заключении***. На все 15 приведенных выше вопросов эксперт должен ответить в своем заключении. Ясно, что этот документ должен быть достаточно объемным, а подготовка его трудоемка.

Когда нужна формализация мнений экспертов? Цели экспертизы могут быть различны. Так, отзыв официального оппонента заканчивается выводом о том, соответствует или нет рассмотренная им диссертация требованиям ВАК РФ. Рецензент научного журнала делает в конце своего заключения вывод о том, может или нет данная статья быть опубликована в журнале. В этих двух случаях нет необходимости сравнивать между собой различные объекты экспертизы.

Однако часто необходимо проводить такое сравнение. Научно-технические или инвестиционные проекты нельзя рассматривать отдельно друг от друга, поскольку ограничено суммарное финансирование, выделенное на всю совокупность проектов.

Насколько подходят для сравнения объектов экспертизы обширные заключения, подготовленные различными экспертами? С одной стороны, эти заключения содержат результаты высококвалифицированного труда по оценке содержания проектов. С другой стороны, написанные в свободной манере заключения не всегда позволяют сопоставить между собой отдельные характеристики проектов. Поэтому эксперты заполняют еще один формализованный документ.

Карта оценки объекта экспертизы

Научная значимость:

1. Исключительно высокая.
2. Значительная.
3. Невысокая.
4. Неопределимая (в настоящее время).
5. Отсутствует.

Практическая значимость:

1. Исключительно высокая.
2. Значительная.
3. Невысокая.
4. Неопределимая (в настоящее время).
5. Отсутствует.

Научная новизна, оригинальность:

1. Не имеет аналогов.
2. Нет аналогов в стране, есть за рубежом.
3. Нет аналогов за рубежом, есть в стране.
4. Есть сведения об отдельных отечественных и зарубежных аналогах.
5. Научная новизна отсутствует.

Методы и способы достижения цели:

1. Новые.
2. Современные.
3. Традиционные.
4. Устаревшие.
5. Неадекватные.

Потенциал исполнителей в рассматриваемой области:

1. Достаточный.
2. Недостаточный в части научного задела (опыта работы).

3. Недостаточный в части материально-технической (лабораторно-экспериментальной) базы.

4. Недостаточный в части состава исполнителей.

5. Данных для оценки недостаточно.

Срок работы:

1. Реальный.
2. Завышен.
3. Занижен.
4. Данных для оценки недостаточно.

Стоимость работ (объем финансирования):

1. Приемлемая.
2. Завышена.
3. Занижена.
4. Данных для оценки недостаточно.

Рекомендуемый приоритет осуществления:

1. Работа первостепенной важности.
2. Работа высокой важности.
3. Работа представляет определенный интерес.
4. Работа представляет незначительный интерес, но заслуживает поддержки при наличии достаточных средств.
5. Работа поддержки не заслуживает.

Дата _________________ Эксперт _________________ Подпись _________________
(Ф.И.О.)

При заполнении «Карты оценки объекта экспертизы» ничего писать не надо, следует лишь обвести номера тех пунктов в каждом из разделов, которые соответствуют мнению экспертов. В разделе «Потенциал исполнителей» могут быть обведены несколько номеров, в остальных разделах — по одному. По «Карте оценки объекта экспертизы» легко сравнивать мнения экспертов между собой, а также сопоставлять различные объекты экспертизы.

Обратим внимание, что в конце «Карты оценки объекта экспертизы» предусмотрена подпись эксперта. Это связано с тем, что эксперт несет ответственность за свое заключение: уголовную, административную, материальную, гражданско-правовую. Экспертные исследования принципиально отличаются от маркетинговых и социологических, в которых подчеркивается анонимность опрашиваемых (см. гл. 1).

Типы вопросов и пилотаж. В экспертных исследованиях, а также в выборочных маркетинговых и социологических опросах используют три типа вопросов: закрытые, открытые и полузакрытые, они же полуоткрытые. Достоинства и недостатки различных типов вопросов уже обсуждались в гл. 1. Ясно, что «Вопросы, которые должны быть отражены в заключении эксперта» являются открытыми, а «Карта оценки объекта экспертизы» состоит из закрытых вопросов.

Отметим, что на этапе подготовки важного экспертного опроса проводят «пилотное» исследование («пилотаж») — апробацию документов и процедур анализа ответов, которые будут собраны в ходе будущего опроса. В пилотаже участвует небольшое число экспертов, цель работы которых — проверить доступность задач опроса и документации адекватному пониманию экспертов, работоспособность расчетных процедур, уточнить формулировки вопросов и способы сбора и анализа экспертных мнений. В частности, в рамках пилотного исследования может быть проведена предварительная экспертиза, специально посвященная отработке перечня и формулировок вопросов.

Оценка и выбор вариантов с помощью экспертов. Рассмотрим несколько процедур коллективных экспертных оценок, начиная с простейших, при этом вводя и обсуждая используемые в дальнейшем понятия.

Оценка номеров в КВН. Простейший пример коллективных экспертных оценок — оценка номеров в известной игре КВН («Клуб Веселых и Находчивых»). Экспертной комиссией является жюри. Просмотрев номер, каждый из членов жюри поднимает планшет со своей оценкой. Затем симпатичная девушка (технический работник, не член жюри) вычисляет среднюю арифметическую оценку, которая и объявляется как коллективное мнение жюри (ниже увидим, что такой подход некорректен с точки зрения теории измерений). Обратим внимание на эту девушку (технического работника), которая после обработки экспертных мнений выставляет оценку на стенд, делая результаты экспертизы доступными всем желающим. Она представляет коллектив тех, кто обеспечивает организацию и проведение экспертизы. Этот коллектив называют рабочей группой (РГ) [1, гл. 12] или группой сопровождения [22].

Таким образом, два основных объекта рассмотрения в настоящей главе — это *экспертная комиссия* (ЭК) и *рабочая группа* (РГ).

Фигурное катание. В фигурном катании процедура обработки оценок экспертов усложняется: перед усреднением отбрасываются самая большая и самая маленькая оценки. Это делается для того, чтобы не было соблазна завысить оценку одной спортсменке (например, соотечественнице) или занизить другой. Такие резко выделяющиеся из общего ряда оценки будут сразу отброшены.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — оценки n экспертов. При проведении КВН в качестве коллективной экспертной оценки используют среднее арифметическое всех n оценок:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

В фигурном катании нужно переставить элементы выборки в порядке возрастания (точнее, неубывания) и получить вариационный ряд $X(1) \le X(2) \le \ldots \le X(n)$, исключить минимум $X(1)$ и максимум $X(n)$, а затем в качестве коллективной экспертной оценки взять урезанное среднее арифметическое, т. е. среднее арифметическое оставшихся $(n - 2)$ членов вариационного ряда:

$$X^* = \frac{X(2) + X(3) + \ldots + X(n-1)}{n-2}.$$

С точки зрения прикладной математической статистики X^* — это робастная оценка теоретического среднего, нацеленная на борьбу с аномальными (резко выделяющимися) результатами наблюдений [3]. Поскольку ясно, что аномальные результаты порождены внешними влияниями на судей фигурного катания, искажающими их профессиональные экспертные оценки, то простое изменение правил расчетов итоговой оценки (переход от среднего арифметического к урезанному среднему) позволяет уберечь экспертов от вызванных извне уклонений от решения поставленных перед ними задач.

Итак, *правила обработки оценок экспертов* существенно влияют на объективность выводов экспертной комиссии.

Экспертный выбор. Экспертные оценки часто используются при выборе одного варианта технических устройств из нескольких, группы космонавтов из многих претендентов, набора проектов научно-исследовательских работ для финансирования из массы заявок, получателей экологических кредитов из многих желающих, выборе инвестиционных проектов для реализации среди представленных и т. д.

Типовая ситуация такова. Заказчик формулирует технические требования к будущему изделию. Объявляется конкурс (тендер), итогом которого должен быть выбор той или иной разработки для серийного выпуска. Допущенные к конкурсу организации к заданному сроку представляют опытные образцы. Как правило, оказывается, что эти образцы несравнимы, каждый из них по каким-то важным показателям качества лучше других, а по другим важным показателям — хуже того или иного из остальных образцов.

Например, у одного опытного образца дальность полета больше, у другого — расход топлива на 1 000 км меньше, у третьего — потолок полета выше, у четвертого — броня крепче, у пятого — под крыльями можно дополнительно подвесить две ракеты. Какой стратегический бомбардировщик (из разработанных разными конструкторскими бюро и представленных на тендер) выбрать для серийного производства?

Задача экспертной комиссии — выбрать опытный образец для запуска в серийное производство [4]. Есть два принципиально разных подхода к решению этой задачи.

Первый из них основан на сравнении образцов. Например, каждый из экспертов упорядочивает образцы в соответствии со своими предпочтениями. Полученные от экспертов упорядочения (ранжировки) обрабатываются теми или иными математическими методами с целью расчета итогового мнения комиссии экспертов. В другом варианте организации экспертизы эксперту образцы предъявляются попарно для сравнения, математический анализ результатов парных сравнений позволяет найти итоговое мнение. В третьем варианте каждого эксперта просят выбрать три лучших образца и т. д.

Второй подход имеет целью соизмерить сравнительную важность различных показателей качества, построить интегральный показатель качества (рейтинговую оценку), с помощью которого можно упорядочить образцы по качеству (рассчитать рейтинг образцов) [5]. Пусть, например, выделено (с помощью предварительного экспертного исследования) m показателей качества. Для конкретного объекта экспертизы экспертная комиссия оценивает эти показатели Y_1, Y_2, …, Y_m, затем РГ рассчитывает значение интегрального показателя качества:

$$Y = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_m Y_m .$$

На основе полученных значений Y можно выбрать наилучший образец, упорядочить образцы по качеству, указав рейтинг образцов, т. е. значения интегрального показателя, соответствующие образцам. Значения коэффициентов a_i (коэффициентов важности, весомости, значимости) обычно определяются с помощью той или иной экспертной процедуры.

Кроме аддитивной формы интегрального показателя, часто используют мультипликативный вариант этого показателя:

$$Z = \prod_{j=1}^{m} Y_j^{b_j} ,$$

в котором показатели степени b_j обычно также определяются экспертным путем.

В интегральный показатель иногда вводят условие, выполнение которого необходимо для дальнейшего рассмотрения объекта экспертизы. Например, для поступления в вуз необходимо набрать не менее 11 баллов из 15 возможных при сдаче трех экзаменов. Но при этом получение балла 2 на одном из экзаменов делает поступление невозможным, хотя суммы баллов 2 + 5 + 5 = 12 и 2 + 4 + 5 = 11 удовлетворяют требованиям приемной комиссии. В общем случае рассматриваемый вид интегрального показателя таков:

$$Y = \begin{cases} a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_m Y_m, & \textit{если условие } A \textit{ выполнено,} \\ 0, & \textit{если условие } A \textit{ не выполнено.} \end{cases}$$

Кроме задачи выбора наилучшего (с точки зрения экспертов) образца, описанные методы позволяют решить ряд иных практических задач, в частности задачу распределения финансирования. Пусть имеется ряд объектов экспертизы, нуждающихся в финансировании, например инвестиционных проектов или заявок на выполнение научно-технических проектов (работ). Естественно упорядочить объекты экспертизы по качеству (рентабельности, привлекательности и т. п.), а затем выделять необходимые объемы финансирования, начиная с наилучшего объекта. Тогда начальная часть вариационного ряда показателей качества будет соответствовать профинансированным объектам экспертизы, а заключительная — тем, кому финансирования не досталось.

На границе между этими двумя группами возможны нюансы. Например, объект экспертизы *A* нельзя профинансировать в необходимом объеме из-за недостатка средств, а вот на финансирование худшего, чем *A*, объекта экспертизы *B* средств достаточно. Тогда объект *B* будет финансироваться, а объект *A* — нет, вопреки рейтингу.

Военные советы как форма экспертной деятельности. С тех пор как люди научились говорить, проводились совещания специалистов. Поэтому можно сказать, что экспертным оценкам столько же лет, сколько человеческому обществу. Конечно, постепенно технологии экспертного оценивания развивались. Например, появилась идея *независимой экспертизы*. Ее можно сопоставить с идеей разделения власти на законодательную, исполнительную и судебную ветви в предположении независимости ветвей власти.

Весьма важен *регламент* проведения заседания комиссии экспертов. В «Капитанской дочке» (гл. X) А.С. Пушкин приводит слова, с которыми генерал, комендант Оренбурга, обратился к членам военного совета: «Теперь, господа, — продолжал он, — надлежит решить, как нам действовать противу мятежников: наступательно или оборонительно? Каждый из оных способов имеет свою выгоду и невыгоду. Действие наступательное представляет более надежды на скорейшее истребление неприятеля; действие оборонительное более верно и безопасно… Итак, начнем собирать голоса по законному порядку, то есть, начиная с младших по чину. Г-н прапорщик! — продолжал он, обращаясь ко мне. — Извольте объяснить нам ваше мнение».

Военный совет в данном случае — это собрание экспертов (военных специалистов). Председатель собрания четко поставил задачу: надо выбрать либо наступление, либо оборону. Обсуждение идет в однозначно заданном порядке — от младших к старшим. Младшие могут спокойно высказывать свои мысли, не боясь, что их предложения будут противоречить мнению старших. Старшие имеют возможность учесть высказанные аргументы и сделать свои выступления более обоснованными.

Важность соблюдения регламента проведения заседания экспертной комиссии становится особенно ясной при сопоставлении с распространенным в XVII в. местничеством. Бояре постоянно спорили, кто из них главнее и, следовательно, кто должен сидеть ближе к царю и говорить раньше и больше других. Заседание постоянно прерывалось схватками, иногда не только словесными, между его участниками. Повышению эффективности заседаний весьма способствовало введение Петром I системы чинов и регламентации служебных взаимоотношений в соответствии с нею. И в настоящее время общепринятой практикой являются выбор (или назначение) в начале собрания председателя и секретаря и утверждение регламента.

Наиболее известный в истории России военный совет состоялся 1 сентября 1812 г. в Филях, вскоре после Бородинского сражения. Обсуждался вопрос: «Дать французам сражение под Москвой или оставить Москву без боя?» Решение должен был принять главнокомандующий, министр обороны, фельдмаршал Кутузов. Обратим внимание, что военный совет, как и любая комиссия экспертов, — совещательный орган, а окончательные решения принимает тот, кому это поручено. В современной деловой литературе такой человек обозначается как Лицо, Принимающее Решение, сокращенно ЛПР (по первым буквам), или Руководитель, Принимающий Решение (РПР).

Большинство экспертов, рассказав о состоянии своих войск, высказалось за сражение. Однако, учитывая тяжелые потери русской армии, ЛПР (т. е. Кутузов) принял решение оставить Москву без боя. Аргументировал это решение Кутузов так: «Оставив Москву, мы сохраним армию; потеряв армию, мы потеряем и Москву, и Россию». И 2 сентября 1812 г. русские войска без боя оставили Москву, с ними ушла и половина московского населения (около 100 тыс. человек). Как известно, это решение Кутузова предопределило поражение Наполеона в войне и изгнание захватчиков.

Итак, ЛПР поступил вопреки мнению большинства экспертов. Значит ли это, что работа экспертной комиссии пропала впустую? Отнюдь! Собранная экспертами информация была использована ЛПР. Продемонстрированный генералами русской армии боевой дух, готовность сражаться с врагом также были учтены ЛПР, наряду с теми соображениями, которые не могли знать эксперты и которые были приняты во внимание ЛПР.

Обсуждение регламента проведения заседаний и организации экспертного исследования в целом, взаимоотношений ЛПР и ЭК касаются всех видов экспертных оценок, отнюдь не только военных советов.

Перейдем к развитию экспертных исследований в XX в.

Кибернетика — основа управления. Большое влияние на развитие исследований в области управления в целом и менеджмента (т. е. управления людьми) в частности оказало появление в 1948 г. книги американского математика Норберта Винера (1894–1964) «Кибернетика, или управление и связь в животном и машине» [6]. Через два года вышла его книга «Кибернетика и общество» [7]. Началось мощное научное движение, ключевые слова которого: кибернетика, исследование операций, системный анализ, математическое моделирование, оптимальное управление, экспертные оценки и др. Оно до сих пор определяет лицо современной науки об управлении. В нашей стране огромную роль в развертывании исследований по кибернетике сыграл академик АН СССР адмирал-инженер Аксель Иванович Берг (1893–1979). С 1950-х гг. до последних дней жизни он возглавлял Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика».

Один из вождей отечественного кибернетического движения академик СССР и РАН Никита Николаевич Моисеев (1917–2001) в своей книге [8] приводит ряд фактов, позволяющих проследить историю кибернетических идей. В частности, он обращает внимание на книгу профессора Бронислава Трентовского «Отношение философии к кибернетике как искусству управления народами», вышедшую в Познани в 1843 г. (за 105 лет до книги Н. Винера) на польском языке. Для образованных людей XIX в., знакомых с древнегреческим языком, слово «кибернетика» было вполне понятно. Оно означало систему взглядов, знаний, навыков, которой должен был обладать управляющий (губернатор) для того, чтобы эффективно управлять людьми и ресурсами, находящимися в его распоряжении.

Большой вклад в кибернетику в целом и в теорию систем в частности внесли отечественные ученые: член Петербургской академии наук Евграф Степанович Федоров (1853–1919) и особенно Александр Александрович Богданов (1873–1928), деятель российского революционного движения, врач, философ, экономист (настоящая фамилия — Малиновский), с 1926 г. организатор и директор Института переливания крови. Погиб, производя на себе медицинский опыт. Основное сочинение А.А. Богданова — трехтомная «Всеобщая организационная наука (тектология)». Первый том напечатан в 1913 г. Полностью книга вышла в 1925–1929 гг.

Многие идеи кибернетики были известны задолго до Н. Винера (хотя сам он об этом, скорее всего, и не догадывался). Почему же именно книга Н. Винера послужила толчком к развитию работ по теории управления, а не работы Трентовского, Федорова, Богданова? Одно из возможных объяснений: «Кибернетика» Винера появилась вовремя, после Второй мировой войны, когда стали выделять большие ресурсы на развитие науки (это было реакцией правительств на продемонстрированную в Хиросиме и Нагасаки роль науки в практике). Подробнее эта точка зрения на развитие науки в XX в. рассмотрена в гл. 3 ч. I учебника [9].

После Второй мировой войны в рамках научного движения, включающего кибернетику, информатику, теорию управления, системный анализ, менеджмент и исследование операций, стала развиваться самостоятельная научно-практическая дисциплина — теория и практика экспертных оценок.

Метод Дельфи. Один из наиболее известных методов экспертных оценок — это метод Дельфи. Название дано по ассоциации с древним обычаем для получения поддержки при принятии решений обращаться в Дельфийский храм. Он был расположен у выхода ядовитых вулканических газов. Жрицы храма (пифии), надышавшись отравы, начинали пророчествовать, произнося непонятные слова. Специальные «переводчики» — жрецы храма — толковали эти слова и отвечали на вопросы пришедших со своими проблемами паломников. Те спрашивали, отправляться ли в морское путешествие, вступать ли в брак, заключать ли договор с тем или иным деловым партнером, начинать ли войну и т. д.

Технология экспертного оценивания состояла в следующем. Получив «заказ на экспертное прогнозирование», жрецы передавали его пифиям, выслушивали их пророчества, а затем толковали услышанное заказчику. С течением времени в храме накапливались пожертвования и памятные доски от тех, для кого прогнозы сбылись. Если же прогноз не осуществился, то сообщить об этом зачастую было некому: заказчик лежал на морском дне или был убит в битве, разорен и продан в рабство и т. п.

По традиции говорят, что Дельфийский храм находился в Греции. Но там нет вулканов. Видимо, он был в Италии — у Везувия или Этны, а сами описанные предсказания происходили в XII–XIV вв. Это вытекает из высшего достижения современной исторической науки — новой статистической хронологии.

В США в 1960-х гг. методом Дельфи назвали экспертную процедуру прогнозирования научно-технического развития. В первом туре эксперты называли вероятные даты тех или иных будущих свершений. Во втором туре каждый эксперт знакомился с прогнозами всех остальных. Если его прогноз сильно отличался от прогнозов основной массы экспертов, его просили пояснить свою позицию, и часто он изменял свои оценки, приближаясь к средним значениям. Эти средние значения и выдавались заказчику как групповое мнение. Надо сказать, что реальные результаты исследования оказались довольно скромными: хотя дата высадки американцев на Луну была предсказана с точностью до месяца, все остальные прогнозы провалились — холодного термоядерного синтеза и средства от рака в XX в. человечество не дождалось.

Однако сама методика оказалась популярной: за последующие 15 лет она использовалась не менее 40 тыс. раз. Это объяснялось впечатлением от беспрецедентного успеха предсказания даты высадки на Луну. Можно констатировать, что именно этот успех выдвинул методы экспертных оценок на роль самостоятельного научно-практического направления, с которым должны быть знакомы все инженеры и управленцы, а также деятели иных специальностей.

Средняя стоимость экспертного исследования по методу Дельфи — 5 тыс. долл. США, но в ряде случаев приходилось расходовать и более крупные суммы — до 130 тыс. долл..

Метод сценариев. Несколько в стороне от основного русла экспертных оценок лежит метод сценариев, применяемый прежде всего для экспертного прогнозирования.

Рассмотрим основные идеи технологии сценарных экспертных прогнозов.

Социально-экономическое или, скажем, экологическое прогнозирование, как и любое прогнозирование вообще, может быть успешным лишь при некоторой стабильности условий. Однако решения органов власти, отдельных лиц, иные события меняют условия, и события развиваются по-иному, чем ранее предполагалось. Вполне очевидно, что после первого тура президентских выборов 1996 г. о дальнейшем развитии событий можно было говорить лишь в терминах сценариев: если во втором туре победит Б.Н. Ельцин, то будет то-то и то-то, если же победит Г.А. Зюганов, то события пойдут так-то и так-то.

Метод сценариев необходим не только в социально-экономической или экологической области. Например, при разработке методологического, программного и информационного обеспечения анализа риска химико-технологических проектов необходимо составить детальный каталог сценариев аварий, связанных с утечками токсических химических веществ. Каждый из таких сценариев описывает аварию своего типа, со своим индивидуальным происхождением, развитием, последствиями, возможностями предупреждения.

Таким образом, **метод сценариев** — это метод декомпозиции задачи прогнозирования, предусматривающий выделение набора отдельных вариантов развития событий (сценариев), в совокупности охватывающих все возможные варианты развития. При этом каждый отдельный сценарий должен допускать возможность достаточно точного прогнозирования, а общее число сценариев должно быть обозримо.

Возможность подобной декомпозиции не очевидна. При применении метода сценариев необходимо осуществить *два этапа исследования*:

1) построение исчерпывающего, но обозримого набора сценариев;

2) прогнозирование в рамках каждого конкретного сценария с целью получения ответов на интересующие исследователя вопросы.

Каждый из этих этапов лишь частично формализуем. Существенная часть рассуждений проводится на качественном уровне, как это принято в общественно-экономических и гуманитарных науках. Одна из причин заключается в том, что стремление к излишней формализации и математизации приводит к искусственному внесению определенности там, где ее нет по существу, либо к использованию громоздкого математического аппарата. Так, рассуждения на словесном уровне считаются доказательными в большинстве ситуаций, в то время как попытка уточнить смысл используемых слов с помощью, например, теории нечетких множеств приводит к весьма громоздким математическим моделям.

Набор сценариев должен быть обозрим. Приходится исключать различные маловероятные события: прилет инопланетян, падение астероида, массовые эпидемии ранее неизвестных болезней и т. д. Само по себе создание набора сценариев — предмет экспертного исследования. Кроме того, эксперты могут оценить вероятности реализации того или иного сценария.

Прогнозирование в рамках каждого конкретного сценария с целью получения ответов на интересующие исследователя вопросы также осуществляется в соответствии с описанной выше методологией прогнозирования. При стабильных условиях могут быть применены статистические методы прогнозирования временных рядов. Однако этому предшествует анализ с помощью экспертов, причем зачастую прогнозирование на словесном уровне является достаточным (для получения интересующих исследователя и ЛПР выводов) и не требующим количественного уточнения.

Как известно, при принятии решений на основе анализа ситуации (как говорят, при ситуационном анализе), в том числе анализа результатов прогнозных исследований, можно исходить из различных критериев. Так, можно ориентироваться на то, что ситуация сложится наихудшим, или наилучшим, или средним (в каком-либо смысле) образом. Можно попытаться наметить мероприятия, обеспечивающие минимально допустимые полезные результаты при любом варианте развития ситуации, и т. д.

Мозговой штурм. Еще один вариант экспертного оценивания — мозговой штурм. Организуется он как собрание экспертов, на выступления которых наложено одно, но очень существенное ограничение: нельзя критиковать предложения других. Можно их развивать, можно высказывать свои идеи, но нельзя критиковать! В ходе заседания эксперты, «заражаясь» друг от друга, высказывают все более экстравагантные соображения. Часа через два записываемое на магнитофон или видеокамеру заседание заканчивается, и начинается второй этап мозгового штурма — анализ высказанных идей. Обычно за время дискуссии высказывается около 100 идей. Из них примерно 30 заслуживают дальнейшей проработки, 5–6 идей дают возможность сформулировать прикладные проекты, а 2–3 идеи оказываются в итоге приносящими полезный эффект: прибыль, перевод конфликта в сотрудничество, повышение экологической безопасности, оздоровление окружающей природной среды и т. п.

При этом интерпретация идей — творческий процесс. Например, при обсуждении возможностей защиты кораблей от торпедной атаки была высказана идея: «Выстроить матросов вдоль борта и дуть на торпеду, чтобы изменить ее курс». После проработки эта идея привела к созданию устройств, создающих волны, сбивающие торпеду с курса.

Экспертные оценки на современном этапе. В настоящее время практически все виды трудовой деятельности так или иначе связаны с проведением экспертиз. Врачи и преподаватели, управленцы (менеджеры) и инженеры, юристы и экономисты — все они в той или иной степени эксперты. Классифицировать основные виды экспертной деятельности можно по областям конкретной профессиональной деятельности, а также по тем задачам, которые решают с помощью экспертных исследований.

По областям конкретной профессиональной деятельности выделяют, в частности, следующие ***виды экспертиз***:

– строительная;

– медицинская;

– судебная;

– экологическая, в том числе объектов недропользования;

– товароведческая;

– экспертиза качества товаров;

– патентная;

– страховая;

– аудит;

– экспертиза при оценке имущества, бизнеса, нематериальных активов и т. д. [10].

Экспертная деятельность в конкретных областях обычно регулируется соответствующими нормативными актами и осуществляется в соответствии с теми или иными методическими материалами. В дальнейшим в качестве примера нормативного регулирования экспертной деятельности будем рассматривать Федеральный закон от 23.11.1995 № 174-ФЗ «Об экологической экспертизе» [11].

При классификации по решаемым задачам выделяют [10] оценочные и управленческие экспертизы.

Результатами оценочных экспертиз являются:

1) численные оценки объектов (значений показателей, параметров, характеристик объектов);

2) отнесение объектов экспертизы к тому или иному виду объектов, классу объектов, сорту;

3) ранжирования объектов по тому или иному свойству, качеству, показателю, критерию;

4) рейтинги, позволяющие определить численные значения, характеризующие сравнительную предпочтительность объектов экспертизы;

5) индексы, позволяющие оценить (характеризующие) состояние объектов экспертизы;

6) иные объекты числовой или нечисловой природы, используемые для оценивания объектов экспертизы (конкретные виды объектов нечисловой природы рассматриваются в следующих главах учебника).

Примерами результатов оценочных экспертиз, в частности, являются:

– результаты определения победителей конкурсов, тендеров, подрядных торгов, иных соревнований;

– рейтинги организаций (промышленных предприятий, вузов, банков, страховых компаний), ценных бумаг, политических деятелей, бизнесменов и спортсменов;

– индексы (Доу-Джонса и др.), характеризующие движение курсов ценных бумаг на биржах.

Результатом управленческих экспертиз является подготовка рекомендаций и заключений на всех этапах цикла выработки, принятия и реализации управленческих решений. К их числу относятся экспертизы при:

1) выработке стратегии и тактики (определении стратегических целей, приоритетов деятельности, планов, организационных структур, разработке бизнес-планов и т. д.);

2) подготовке аналитических материалов и проведении ситуационного анализа, включая разработку прогнозов и сценариев;

3) генерировании и отборе альтернативных вариантов решений;

4) оценке альтернативных вариантов решений и определении наиболее предпочтительного из них;

5) контроле хода реализации принятых решений;

6) корректировке принятых ранее управленческих решений на основании оценки хода реализации принятых решений.

Конечно, эти перечни не являются исчерпывающими. Они позволяют составить представление о том, насколько разнообразны задачи экспертных оценок и области их практического применения.

Нельзя не согласиться с мнением профессора Б.Г. Литвака, что экспертизы необходимы на всех стадиях управленческого цикла, в какой бы области деятельности ни принималось решение [10]. Без профессиональной экспертизы нет сегодня профессионально принятого решения!

Разработана масса методов получения экспертных оценок. В одних с каждым экспертом работают отдельно, он даже не знает, кто еще является экспертом, а потому высказывает свое мнение независимо от авторитетов. В других экспертов собирают вместе для подготовки материалов для ЛПР, при этом эксперты обсуждают проблему друг с другом, учатся друг у друга, и неверные мнения отбрасываются. В одних методах число экспертов фиксировано и таково, чтобы статистические методы проверки согласованности мнений и затем их усреднения позволяли принимать обоснованные решения. В других число экспертов растет в процессе проведения экспертизы, например при использовании метода «снежного кома» (о нем ниже). Не меньше существует и методов обработки ответов экспертов, в том числе весьма насыщенных математикой и компьютеризированных. В дальнейшем на основе методологии, развитой в [9, 12, 13], будет рассмотрен ряд современных методов экспертных оценок.

5.2. ЭКСПЕРТНЫЕ РАНЖИРОВКИ И МЕТОДЫ СРЕДНИХ РАНГОВ

Познакомимся с часто используемым видом экспертных оценок — методами средних рангов. Разберем метод средних арифметических рангов, метод медианных рангов, а затем и метод согласования ранжировок (упорядочений), полученных с помощью нескольких экспертных процедур.

Современная теория измерений и экспертные оценки. Как проводить анализ собранных рабочей группой ответов экспертов? Отметим сразу же, что для более углубленного рассмотрения проблем экспертных оценок понадобятся некоторые понятия *теории измерений* (гл. 6), служащей основой теории экспертных оценок, прежде всего той ее части, которая связана с анализом заключений экспертов, выраженных в качественном (а не в количественном) виде. Теория измерений интересует нас, в частности, в связи с агрегированием мнений экспертов, построением обобщенных показателей (их называют также рейтингами).

Получаемые от экспертов мнения часто выражены в *порядковой шкале*, т. е. эксперт может сказать (и обосновать), что один тип продукции будет более привлекателен для потребителей, что один показатель качества продукции более важен, чем другой, первый технологический объект более опасен, чем второй, и т. д. Но он не в состоянии сказать, во сколько раз или на сколько более важен, соответственно, более опасен. Поэтому экспертов часто просят дать ранжировку (упорядочение) объектов экспертизы, т. е. расположить их в порядке возрастания (или, точнее, неубывания) интенсивности интересующей организаторов экспертизы характеристики.

Ранжировки определяются и изучаются с помощью рангов. Ранг — это номер (объекта экспертизы) в упорядоченном ряду. Формально ранги выражаются числами 1, 2, 3, …, но весьма важно то, что с этими числами нельзя делать привычные арифметические операции. Например, хотя 1 + 2 = 3, но нельзя утверждать, что для объекта, стоящего на третьем месте в упорядочении (в другой терминологии — ранжировке), интенсивность изучаемой характеристики равна сумме интенсивностей объектов с рангами 1 и 2. Так, один из видов экспертного оценивания — оценки достижений спортсменов. Разве можно сказать, что спортсмен, занявший третье место, достиг того же, что и спортсмены, занявшие первое и второе места, вместе взятые? Поэтому очевидно, что для анализа подобного рода качественных данных необходима не обычная арифметика, а другая теория, дающая базу для разработки, изучения и применения конкретных методов расчета. Эта другая теория и есть теория измерений (ТИ). Основы ТИ рассмотрены ниже в гл. 6.

Рассмотрим в качестве примера необходимости применения результатов ТИ, касающихся средних величин в порядковой шкале, один сюжет, связанный с ранжировками и рейтингами.

Сравнение на основе средних баллов. В настоящее время распространены экспертные, маркетинговые, квалиметрические, социологические и иные опросы, в которых используются балльные оценки. В таких исследованиях опрашиваемых просят выставить баллы объектам, изделиям, технологическим процессам, предприятиям, проектам или же заявкам на выполнение научно-исследовательских работ, идеям, проблемам, программам, политикам и т. п. Затем рассчитывают средние баллы и рассматривают их как интегральные (т. е. обобщенные, итоговые) оценки, выставленные объектам экспертизы коллективом опрошенных экспертов. Упорядочение по интегральным оценкам дает итоговое мнение комиссии экспертов.

Однако какими формулами пользоваться для вычисления средних величин? Ведь средних величин существует, как известно, весьма много разных видов.

По традиции обычно применяют среднее арифметическое. Специалисты по теории измерений уже более 45 лет знают, что такой способ некорректен, поскольку баллы обычно измерены в порядковой шкале. Обоснованным является использование медиан в качестве средних баллов. Однако полностью игнорировать средние арифметические нецелесообразно из-за их привычности и распространенности. Поэтому представляется рациональным использовать одновременно оба метода — и *метод средних арифметических баллов*, и *метод медиан баллов*. Такая рекомендация находится в согласии с общенаучной концепцией устойчивости [14], рекомендующей применять различные методы для обработки одних и тех же данных с целью выделить выводы, получаемые одновременно при всех методах. Такие выводы, видимо, соответствуют реальной действительности, в то время как заключения, меняющиеся от метода к методу, зависят от субъективизма исследователя, выбирающего метод обработки исходных экспертных оценок.

Пример сравнения восьми проектов. Рассмотрим на протяжении настоящего раздела конкретный пример применения только что сформулированного подхода. В качестве баллов будем использовать ранги, присвоенные проектам в соответствии с их упорядочениями, полученными в результате работы экспертов.

В рассматриваемом далее примере по заданию руководства фирмы анализировались восемь проектов, предлагаемых для включения в план стратегического развития фирмы. Они обозначены следующим образом: Д, Л, М-К, Б, Г-Б, Сол, Стеф, К (по фамилиям менеджеров, предложивших их для рассмотрения). Все восемь проектов были направлены 12 экспертам, включенным в экспертную комиссию, организованную по решению правления фирмы. В приведенной ниже табл. 5.1 представлены ранги восьми проектов, присвоенные им каждым из 12 экспертов.

Ранги (т. е. места в упорядоченном ряду) присваивались в соответствии с представлениями экспертов о целесообразности включения проектов в стратегический план фирмы. При этом эксперт присваивает ранг 1 самому лучшему проекту, который обязательно надо реализовать. Ранг 2 получает от эксперта второй по привлекательности проект, …, наконец, ранг 8 — наиболее сомнительный проект, который реализовывать стоит лишь в последнюю очередь.

Например, первый эксперт считает, что самый лучший проект — это М-К, затем проект Б, следующий — Л, затем идут (по уменьшению привлекательности) Сол, Д, Стеф, К, Г-Б. Таким образом, его мнение выражается ранжировкой:

$$\text{М-К} < \text{Б} < \text{Л} < \text{Сол} < \text{Д} < \text{Стеф} < \text{К} < \text{Г-Б}.$$

В табл. 5.1 эта ранжировка представлена в виде строки 1, которую можно заполнять последовательно: видим, что Д стоит на 5-м месте, а потому записываем на пересечении строки 1 и столбца Д ранг 5. Проект Л стоит на 3-м месте — записываем ранг 3 и т. д. Возможен случай связанных рангов (см. примечание к табл. 5.1).

Подобная таблица может быть получена не только на основе ранжировок, но и путем выставления баллов непосредственно. Эксперты могут выставлять оценки в соответствии с определенной шкалой.

Таблица 5.1

Ранги восьми проектов по степени привлекательности для включения в план стратегического развития фирмы

№ эксперта	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
1	5	3	1	2	8	4	6	7
2	5	4	3	1	8	2	6	7
3	1	7	5	4	8	2	3	6
4	6	4	2,5	2,5	8	1	7	5
5	8	2	4	6	3	5	1	7
6	5	6	4	3	2	1	7	8
7	6	1	2	3	5	4	8	7
8	5	1	3	2	7	4	6	8
9	6	1	3	2	5	4	7	8
10	5	3	2	1	8	4	6	7
11	7	1	3	2	6	4	5	8
12	1	6	5	3	8	4	2	7

Примечание. Эксперт № 4 считает, что проекты М-К и Б равноценны, но уступают лишь одному проекту — проекту Сол. Поэтому проекты М-К и Б должны были бы стоять на втором и третьем местах и получить баллы 2 и 3. Поскольку они равноценны, то получают средний балл (2 + 3) / 2 = 5 / 2 = 2,5.

Анализируя результаты работы экспертов (т. е. упомянутую таблицу), члены аналитического подразделения рабочей группы, анализировавшие ответы экспертов по заданию правления фирмы, были вынуждены констатировать, что полного согласия между экспертами нет, а потому данные, приведенные в табл. 5.1, следует подвергнуть более тщательному математическому анализу с целью получения итогового мнения комиссии экспертов.

Метод средних арифметических рангов. Сначала для получения группового мнения экспертов был применен метод средних арифметических рангов. Для этого прежде всего была подсчитана сумма рангов, присвоенных проектам (см. табл. 5.1). Затем эта сумма была разделена на число экспертов, в результате рассчитан средний арифметический ранг (именно эта операция дала название методу). По средним рангам строится итоговая ранжировка (в другой терминологии — упорядочение), исходя из принципа «чем меньше средний ранг, тем лучше проект». Наименьший средний ранг, равный 2,625, у проекта Б, следовательно, в итоговой ранжировке он получает ранг 1. Следующая по величине сумма, равная 3,125, у проекта М-К, и он получает итоговый ранг 2. Проекты Л и Сол имеют одинаковые суммы (равные 3,25), значит, с точки зрения экспертов они равноценны (при рассматриваемом способе сведения вместе мнений экспертов), а потому они должны бы стоять на 3-м и 4-м местах и получают средний балл (3 + 4) / 2 = 3,5. Дальнейшие результаты приведены в табл. 5.2.

Итак, ранжировка по суммам рангов (или, что то же самое, по средним арифметическим рангам) имеет вид:

$$Б < М\text{-}К < \{Л, Сол\} < Д < Стеф < Г\text{-}Б < К. \qquad (5.1)$$

Здесь запись типа А < Б означает, что проект А предшествует проекту Б (т. е. проект А лучше проекта Б). Поскольку проекты Л и Сол получили одинаковую сумму баллов, то по рассматриваемому методу они эквивалентны, а потому объединены в группу (в фигурных скобках). В терминологии математической статистики ранжировка (5.1) имеет одну связь.

Таблица 5.2

Результаты расчетов по методу средних арифметических и методу медиан для данных, приведенных в табл. 5.1

Показатель	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
Сумма рангов	60	39	37,5	31.5	76	39	64	85
Среднее арифметическое рангов	5	3,25	3,125	2,625	6,333	3,25	5,333	7,083
Итоговый ранг по среднему арифметическому	5	3,5	2	1	7	3,5	6	8
Медианы рангов	5	3	3	2,25	7,5	4	6	7
Итоговый ранг по медианам	5	2,5	2,5	1	8	4	6	7

Метод медиан рангов. Значит, наука сказала свое слово, итог расчетов — ранжировка (5.1) и на ее основе предстоит принимать решение? Так был поставлен вопрос при обсуждении полученных результатов на заседании правления фирмы. Но тут наиболее знакомый с эконометрикой и организационно-экономическим моделированием член правления вспомнил то, о чем шла речь выше. Он понял, что ответы экспертов измерены в порядковой шкале, а потому для них неправомерно проводить усреднение методом средних арифметических. Надо использовать метод медиан.

Что это значит? Надо взять ответы экспертов, соответствующие одному из проектов, например проекту Д. Это ранги 5, 5, 1, 6, 8, 5, 6, 5, 6, 5, 7, 1. Затем их нужно расположить в порядке неубывания (проще было бы сказать — «в порядке возрастания», но поскольку некоторые ответы совпадают, то приходится использовать несколько непривычный термин «неубывание»). Получим последовательность: 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8. На центральных местах — шестом и седьмом — стоят 5 и 5. Следовательно, медиана (в соответствии с определением) равна их среднему арифметическому, т. е. 5.

Медианы совокупностей из 12 рангов, соответствующих определенным проектам, приведены в предпоследней строке табл. 5.2. (При этом медианы вычислены по обычным правилам статистики — как среднее арифметическое центральных членов вариационного ряда. Если бы число экспертов было нечетным, в качестве медианы надо было бы взять центральный член вариационного ряда.) Итоговое упорядочение комиссии экспертов по методу медиан приведено в последней строке табл. 5.2. Ранжировка (т. е. упорядочение — итоговое мнение комиссии экспертов) по медианам имеет вид:

$$\text{Б} < \{\text{М-К, Л}\} < \text{Сол} < \text{Д} < \text{Стеф} < \text{К} < \text{Г-Б}. \qquad (5.2)$$

Поскольку проекты Л и М-К имеют одинаковые медианы баллов, то по рассматриваемому методу ранжирования они эквивалентны, а потому объединены в группу (кластер), т. е. с точки зрения математической статистики ранжировка (5.2) имеет одну связь.

Сравнение ранжировок по методу средних арифметических и методу медиан. Сравнение ранжировок (5.1) и (5.2) показывает их близость (похожесть). С точки зрения здравого смысла можно принять, что проекты М-К, Л, Сол упорядочены как М-К < Л < Сол, но из-за погрешностей экспертных оценок в одном методе признаны равноценными проекты Л и Сол (ранжировка (5.1)), а в другом — проекты М-К и Л (ранжировка (5.2)). Существенным является только расхождение, касающееся упорядочения проектов К и Г-Б: в ранжировке (5.1) Г-Б < К, а в ранжировке (5.2), наоборот, К < Г-Б. Однако эти проекты наименее привлекательные из восьми рассматриваемых, и при выборе наиболее привлекательных проектов для дальнейшего обсуждения и использования на указанное расхождение можно не обращать внимания.

Рассмотренный пример демонстрирует сходство и различие ранжировок, полученных по методу средних арифметических рангов и по методу медиан, а также пользу от их совместного применения.

5.3. МЕТОД СОГЛАСОВАНИЯ КЛАСТЕРИЗОВАННЫХ РАНЖИРОВОК

Только что проведенное сравнение ранжировок по методу средних арифметических и методу медиан оставляет ощущение недостаточно строгого подхода. Обсудим проблему согласования кластеризованных ранжировок в общем виде и разберем математический алгоритм такого согласования.

Постановка задачи. Проблема состоит в выделении общего нестрогого порядка из набора кластеризованных ранжировок (на статистическом языке — ранжировок со связями). Этот набор может отражать мнения нескольких экспертов или быть получен при обработке мнений экспертов различными методами. Предлагается применять метод согласования кластеризованных ранжировок, позволяющий «загнать» противоречия внутрь специальным образом построенных кластеров (групп), в то время как упорядочение кластеров соответствует одновременно всем исходным упорядочениям.

В различных прикладных областях возникает необходимость анализа нескольких кластеризованных ранжировок объектов. К таким областям относятся прежде всего инженерный бизнес, менеджмент, экономика, социология, экология, прогнозирование, научные и технические исследования и т. д. Особенно те их разделы, что связаны с экспертными оценками (см., например, [1, 9, 13]). В качестве объектов могут выступать образцы продукции, технологии, математические модели, проекты, кандидаты на должность и др. Кластеризованные ранжировки могут быть получены как с помощью экспертов, так и объективным путем, например при сопоставлении математических моделей с экспериментальными данными с помощью того или иного критерия качества. Описанный ниже метод был разработан в связи с проблемами химической безопасности биосферы и экологического страхования [15].

В настоящем разделе рассматривается метод построения кластеризованной ранжировки, согласованной (в раскрытом ниже смысле) со всеми рассматриваемыми кластеризованными ранжировками. При этом противоречия между отдельными исходными ранжировками оказываются заключенными внутри кластеров согласованной ранжировки. В результате упорядоченность кластеров отражает общее мнение экспертов, точнее, то общее, что содержится в исходных ранжировках [16].

В кластеры заключены объекты, по поводу которых некоторые из исходных ранжировок противоречат друг другу. Для их упорядочения необходимо провести новые исследования. Эти исследования могут быть как формально-математическими (например, вычисление медианы Кемени (о ней — в гл. 7), упорядочения внутри группы по средним рангам или по медианам с привлечением новых экспертов и т. п.), так и требовать привлечения новой информации из соответствующей прикладной области, возможно, проведения дополнительных научных или прикладных работ.

Введем необходимые понятия, затем сформулируем алгоритм согласования кластеризованных ранжировок в общем виде и рассмотрим его свойства.

Пусть имеется конечное число объектов, которые мы для простоты изложения будем изображать натуральными числами 1, 2, 3, …, k и называть их совокупность «носителем». Под кластеризованной ранжировкой, определенной на заданном носителе, понимаем следующую математическую конструкцию. Пусть объекты разбиты на группы, которые будем называть кластерами. В кластере может быть и один элемент. Входящие в один кластер объекты будем заключать в фигурные скобки. Например, объекты 1, 2, 3, …, 10 могут быть разбиты на 7 кластеров: $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{10\}$. В этом разбиении один кластер $\{5, 6, 7\}$ содержит три элемента, другой — $\{2, 3\}$ — два, остальные пять — по одному элементу. Кластеры не имеют общих элементов, а объединение их (как множеств) есть все рассматриваемое множество объектов (весь носитель).

Вторая составляющая кластеризованной ранжировки — это строгий линейный порядок между кластерами. Задано, какой из них первый, какой второй и т. д. Будем изображать упорядоченность с помощью знака «<». При этом кластеры, состоящие из одного элемента, будем для простоты записи изображать без фигурных скобок. Тогда кластеризованную ранжировку на основе введенных выше кластеров можно изобразить так:

$$A = [1 < \{2, 3\} < 4 < \{5, 6, 7\} < 8 < 9 < 10].$$

Конкретные кластеризованные ранжировки будем заключать в квадратные скобки. Если для простоты речи термин «кластер» применять только к кластеру не менее чем из двух элементов, то можно сказать, что в кластеризованную ранжировку A входят два кластера $\{2, 3\}$ и $\{5, 6, 7\}$ и 5 отдельных элементов.

Кластеризованная ранжировка, введенная описанным образом, является бинарным отношением на носителе — множестве $\{1, 2, 3, …, 10\}$. Его структура такова. Задано отношение эквивалентности с 7-ю классами эквивалентности, а именно {2, 3}, {5, 6, 7}, а остальные 5 классов состоят из оставшихся 5 отдельных элементов. Затем введен строгий линейный порядок между классами эквивалентности.

Рассматриваемый математический объект известен в литературе как «ранжировка со связями» (М. Холлендер, Д. Вулф [17]), «упорядочение» (Дж. Кемени, Дж. Снелл [18]), «квазисерия» (Б.Г. Миркин [19]), «совершенный квазипорядок» (Ю.А. Шрейдер [20, с. 127, 130]). Учитывая разнобой в терминологии, было признано полезным ввести собственный термин ***«кластеризованная ранжировка»***, поскольку в нем явным образом названы основные элементы изучаемого математического объекта: кластеры, рассматриваемые на этапе согласования ранжировок как классы эквивалентности, и ранжировка — строгий совершенный порядок между ними (в терминологии Ю.А. Шрейдера [20, гл. IV]).

Следующее важное понятие — ***«противоречивость»***. Оно определяется для четверки: две кластеризованные ранжировки на одном и том же носителе и два различных объекта — элементы того же носителя. При этом два элемента из одного кластера будем связывать символом равенства (=) как эквивалентные.

Пусть A и B — две кластеризованные ранжировки. Пару объектов (a, b) назовем противоречивой относительно кластеризованных ранжировок A и B, если эти два элемента по-разному упорядочены в A и B, т. е. $a < b$ в A и $a > b$ в B (первый вариант противоречивости) либо $a > b$ в A и $a < b$ в B (второй вариант противоречивости). Отметим, что в соответствии с этим определением пара объектов (a, b), эквивалентная хотя бы в одной кластеризованной ранжировке, не может быть противоречивой, поскольку эквивалентность $a = b$ не образует «противоречия» ни с $a < b$, ни с $a > b$. Это свойство оказывается полезным при выделении противоречивых пар.

В качестве примера рассмотрим, кроме A, еще две кластеризованные ранжировки:

$$B = [\{1, 2\} < \{3, 4, 5\} < 6 < 7 < 9 < \{8, 10\}];$$

$$C = [3 < \{1, 4\} < 2 < 6 < \{5, 7, 8\} < \{9, 10\}].$$

Совокупность противоречивых пар объектов для двух кластеризованных ранжировок A и B назовем ***ядром противоречий*** и обозначим $S(A, B)$. Для рассмотренных выше в качестве примеров трех кластеризованных ранжировок A, B и C, определенных на одном и том же носителе {1, 2, 3, …, 10}, имеем:

$$S(A, B) = [(8, 9)];$$

$$S(A, C) = [(1, 3), (2, 4)];$$

$$S(B, C) = [(1, 3), (2, 3), (2, 4), (5, 6), (8,9)].$$

Как при ручном, так и при программном нахождении ядра можно в поисках противоречивых пар просматривать пары (1, 2), (1, 3), (1, 4), …, (1, k), затем (2, 3), (2, 4), …, (2, k), потом (3, 4), …, (3, k) и т. д., вплоть до последней пары ($k-1, k$).

Пользуясь понятиями дискретной математики, ядро противоречий можно изобразить графом с вершинами в точках носителя. При этом противоречивые пары задают ребра этого графа. Граф для $S(A, B)$ имеет только одно ребро (одна связная компонента более чем из одной точки), для $S(A, C)$ — 2 ребра (две связные компоненты более чем из одной точки), для $S(B, C)$ — 5 ребер (три связные компоненты более чем из одной точки, а именно $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 6\}$ и $\{8, 9\}$).

Каждую кластеризованную ранжировку, как и любое бинарное отношение, можно задать матрицей $\|x(a, b)\|$ из 0 и 1 порядка $k\times k$. При этом $x(a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a < b$ либо $a = b$. В первом случае $x(b, a) = 0$, а во втором $x(b, a) = 1$. При этом всегда хотя бы одно из чисел $x(a, b)$ и $x(b, a)$ равно 1. Из определения противоречивости пары (a, b) вытекает, что для нахождения всех таких пар достаточно поэлементно перемножить две матрицы $\|x(a, b)\|$ и $\|y(a, b)\|$, соответствующие двум кластеризованным ранжировкам, и отобрать те и только те пары, для которых $x(a, b)y(a, b) = x(b, a)y(b, a) = 0$.

Предлагаемый алгоритм согласования некоторого числа (двух или более) кластеризованных ранжировок состоит из трех этапов. ***На первом*** выделяются противоречивые пары объектов во всех парах кластеризованных ранжировок. ***На втором*** формируются кластеры итоговой кластеризованной ранжировки (т. е. классы эквивалентности — связные компоненты графов, соответствующих объединению попарных ядер противоречий). ***На третьем этапе*** эти кластеры (классы эквивалентности) упорядочиваются. Для установления порядка между кластерами произвольно выбирается один объект из первого кластера и второй — из второго, порядок между кластерами устанавливается такой же, какой имеется между выбранными объектами в любой из рассматриваемых кластеризованных ранжировок. (Если в одной из исходных кластеризованных ранжировок имеется равенство, а в другой — неравенство, то при построении итоговой кластеризованной ранжировки используется неравенство.)

Корректность подобного упорядочивания, т. е. его независимость от выбора той или иной пары объектов при упорядочении двух кластеров и транзитивность такого упорядочения, вытекает из соответствующих теорем, доказанных в статье [15].

Два объекта из разных кластеров согласующей кластеризованной ранжировки могут оказаться эквивалентными в одной из исходных кластеризованных ранжировок (т. е. находиться в одном кластере). В таком случае надо рассмотреть упорядоченность этих объектов в какой-либо другой из исходных кластеризованных ранжировок. Если же во всех исходных кластеризованных ранжировках два рассматриваемых объекта находились в одном кластере, то естественно считать (и это является уточнением к этапу 3 алгоритма), что они находятся в одном кластере и в согласующей кластеризованной ранжировке.

Результат согласования кластеризованных ранжировок A, B, C, … обозначим $f(A, B, C, \ldots)$. Тогда

$$f(A, B) = [1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < \{8, 9\} < 10];$$

$$f(A, C) = [\{1, 3\} < \{2, 4\} < 6 < \{5, 7\} < 8 < 9 < 10];$$

$$f(B, C) = [\{1, 2, 3, 4\} < \{5, 6\} < 7 < \{8, 9\} < 10];$$

$$f(A, B, C) = f(B, C) = [\{1, 2, 3, 4\} < \{5, 6\} < 7 < \{8, 9\} < 10].$$

Итак, в случае $f(A, B)$ дополнительного изучения с целью упорядочения требуют только объекты 8 и 9. В случае $f(A, C)$ кластер {5, 7} появился не потому, что относительно объектов 5 и 7 имеется противоречие, а потому, что в обеих исходных ранжировках эти объекты не различаются. В случае $f(B, C)$ четыре объекта 1, 2, 3, 4 объединились в один кластер, т. е. кластеризованные ранжировки оказались настолько противоречивыми, что процедура согласования не позволила провести достаточно полную декомпозицию задачи нахождения итогового мнения экспертов.

Рассмотрим некоторые свойства алгоритмов согласования:

1. Пусть $D = f(A, B, C, \ldots)$. Если $a < b$ в согласующей кластеризованной ранжировке D, то $a < b$ или $a = b$ в каждой из исходных ранжировок A, B, C, …, причем хотя бы в одной из них справедливо строгое неравенство.

2. Построение согласующих кластеризованных ранжировок может осуществляться поэтапно. В частности, $f(A, B, C) = f(f(A, B), f(A, C), f(B, C))$. Ясно, что ядро противоречий для набора кластеризованных ранжировок является объединением таких ядер для всех пар рассматриваемых ранжировок.

3. Построение согласующих кластеризованных ранжировок нацелено на выделение общего упорядочения в исходных кластеризованных ранжировках. Однако при этом некоторые общие свойства исходных кластеризованных ранжировок могут теряться. Так, при согласовании ранжировок B и C, рассмотренных выше, противоречия в упорядочении элементов 1 и 2 не было: в ранжировке B эти объекты входили в один кластер, т. е. $1 = 2$, в то время как $1 < 2$ в кластеризованной ранжировке C. Значит, при их отдельном рассмотрении можно принять упорядочение $1 < 2$.

Однако в $f(B, C)$ они попали в один кластер, т. е. возможность их упорядочения исчезла. Это связано с поведением объекта 3, который «перескочил» в C на первое место и «увлек с собой в противоречие» пару (1, 2), образовав противоречивые пары и с 1, и с 2. Другими словами, связная компонента графа, соответствующего ядру противоречий, сама по себе не всегда является полным графом. Недостающие ребра при этом соответствуют парам типа (1, 2), которые сами по себе не являются противоречивыми, но «увлекаются в противоречие» другими парами.

4. Необходимость согласования кластеризованных ранжировок возникает, в частности, при разработке методики применения экспертных оценок в задачах экологического страхования и химической безопасности биосферы. Как уже говорилось в предыдущем разделе, популярным является метод упорядочения по средним рангам, в котором итоговая ранжировка строится на основе средних арифметических рангов, выставленных отдельными экспертами [1, 32]. Однако из теории измерений известно (см. гл. 6), что более обоснованным является использование не средних арифметических, а медиан. Вместе с тем метод средних арифметических рангов весьма известен и широко применяется, так что просто отбросить его нецелесообразно.

Участвующие в исследовании и привыкшие к методу средних арифметических рангов специалисты не поймут и не примут такого решения РГ. Поэтому было принято решение об одновременном применении обоих методов. Реализация этого решения потребовала разработки приведенной выше методики согласования двух указанных кластеризованных ранжировок. Практическая апробация [21, 22] метода продемонстрировала правильность принятого решения об одновременном использовании метода средних арифметических рангов и метода медиан рангов.

5. Область применения рассматриваемого метода не ограничивается экспертными оценками. Он может быть использован, например, для сравнения качества математических моделей процесса испарения жидкости. Так, в одной из

наших научно-исследовательских работ имелись данные экспериментов и результаты расчетов по 8 математическим моделям. Сравнивать модели можно по различным критериям качества. Например, по сумме модулей относительных отклонений расчетных и экспериментальных значений.

Можно действовать и по-другому. Например, в каждой экспериментальной точке упорядочить модели по качеству, а потом получать единые оценки методами средних рангов и медиан. Использовались и иные методы. Затем применялись методы согласования полученных различными способами кластеризованных ранжировок. В результате оказалось возможным упорядочить модели по качеству и использовать это упорядочение при разработке банка математических моделей, используемого в задачах химической безопасности биосферы (ср. [1, прил. 3]).

6. Отметим, что во многих случаях кластеризованные ранжировки, полученные двумя методами, совпадали или были весьма близки, как в примере, рассмотренном в предыдущем разделе. Теоретическое объяснение этому экспериментальному факту дает теорема 6.2 вв гл. 6. Можно выдвинуть важный методологический принцип (в соответствии с общей теорией устойчивости [14]): в случае, когда объекты реально упорядочены, этот порядок выявит любой способ анализа данных. Проблема в том, что мы не знаем заранее, упорядочены ли объекты в действительности или нет. И одновременное применение двух (или более) методов позволяет найти ответ на этот вопрос. Если результаты анализа данных совпадают или почти совпадают, повышается уверенность в том, что они отражают действительность. Если результаты, полученные с помощью двух методов анализа данных, весьма различаются, значит, они не отражают реальность. Выводы, зависящие от субъективного выбора исследователем того или иного метода анализа данных, не могут использоваться для принятия объективного решения.

Итак, рассматриваемый метод согласования кластеризованных ранжировок построен в соответствии с ***методологией теории устойчивости*** [14], согласно которой результат обработки данных, инвариантный относительно метода обработки, соответствует реальности, а результат расчетов, зависящий от метода обработки, отражает субъективизм исследователя, а не объективные соотношения.

Применим метод согласования к ранжировкам (5.1) и (5.2). Имеется только одна противоречивая пара (К, Г-Б), и согласующая ранжировка имеет вид:

$$Б < М\text{-}К < Л < Сол < Д < Стеф < \{К, Г\text{-}Б\}. \tag{5.3}$$

5.4. ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ ЭКСПЕРТНОЙ КОМИССИИ

Познакомившись с примерами процедур экспертных оценок, обсудим общие вопросы организации экспертного исследования.

Основные стадии экспертного опроса. Более подробно рассмотрим отдельные этапы типового экспертного исследования. Как показывает практический опыт, с точки зрения менеджера — организатора такого исследования, целесообразно выделять следующие стадии проведения экспертного опроса:

1. *Принятие решения о необходимости проведения экспертного опроса и формулировка его цели лицом, принимающим решения (ЛПР).* Таким образом, инициатива должна исходить от руководства, что в дальнейшем обеспечит успешное решение организационных и финансовых проблем. Очевидно, что исходный толчок может быть дан докладной запиской одного из сотрудников или дискуссией на совещании, но реальное начало работы — решение ЛПР. Цель экспертного исследования ЛПР может сформулировать по-разному, и от этой формулировки зависит выбор процедуры экспертизы.

2. *Подбор и назначение ЛПР основного состава рабочей группы* (сокращенно РГ) (обычно — научного руководителя и ответственного секретаря). При этом научный руководитель отвечает за организацию и проведение экспертного исследования в целом, а также за анализ собранных материалов и подготовку заключения экспертной комиссии. Он участвует в формировании коллектива экспертов и выдаче задания каждому эксперту (вместе с ЛПР или его представителем). Он сам — высококвалифицированный эксперт и признаваемый другими экспертами формальный и неформальный руководитель экспертной комиссии. Дело ответственного секретаря — ведение документации экспертного опроса, решение организационных задач. Назначение научного руководителя и ответственного секретаря оформляется распорядительным документом (приказом, постановлением и т. п.). Остальной состав РГ обычно формируется позже, в процессе развертывания исследования, причем по предложениям научного руководителя и ответственного секретаря.

3. *Разработка РГ* (точнее, ее основным составом, прежде всего научным руководителем и ответственным секретарем) *и утверждение у ЛПР технического задания на проведение экспертного опроса.* На этой стадии решение о проведении экспертного опроса приобретает четкость во времени, финансовом, кадровом, материальном и организационном обеспечении. В частности, формируется костяк рабочей группы со своей внутренней структурой. Обычно в РГ выделяются различные группы специалистов: аналитическая, эконометри-

ческая (специалисты по методам анализа данных), компьютерная, по работе с экспертами (например, интервьюеров), организационная. (Конечно, возможно совмещение ролей: один и тот же сотрудник может и отвечать за выбор метода анализа экспертных мнений и сам же проводить этот анализ.) Очень важно для успеха, чтобы все перечисленные позиции были включены в техническое задание и утверждены ЛПР.

4. *Разработка аналитической группой РГ подробного сценария (т. е. регламента, правил) проведения сбора и анализа экспертных мнений (оценок).* Термин «сценарий» имеет примерно тот же смысл, что в театре и кинематографе. Сценарий включает в себя прежде всего анкеты и опросные листы (планы интервью), определяющие конкретный вид информации, которая будет получена от экспертов (например, слова, условные градации, числа, ранжировки, разбиения или иные виды объектов нечисловой природы). Например, довольно часто экспертов просят высказаться в свободной форме, ответив при этом на некоторое количество заранее сформулированных вопросов. Кроме того, их просят заполнить формальную карту, в каждом пункте выбрав одну из нескольких градаций (см. примеры в разд. 5.1).

Сценарий должен содержать и конкретные методы анализа собранной информации. Например, вычисление медианы Кемени, статистический анализ люсианов, применение иных методов статистики объектов нечисловой природы и других разделов прикладной статистики (о некоторых из названных методов речь пойдет ниже, см. также [1, 3]). Эта работа ложится на эконометрическую и компьютерную группу РГ.

Традиционная ошибка: сначала собрать информацию, а потом думать, что с ней делать. В результате, как показывает печальный практический опыт, информация используется не более чем на 1–2 %. Причины в том, что в большом ворохе беспорядочно собранных фактов, как правило, отсутствует необходимая упорядоченность. А именно, значения отдельных показателей собраны с пропусками, способы измерения меняются от одного эксперта к другому, от одного объекта экспертизы к другому (как говорят, определения «плывут»), сам перечень показателей не позволяет ответить на интересующие ЛПР вопросы и т. д.

Сценарий утверждается научным руководителем ЭК.

5. *Подбор экспертов в соответствии с их компетентностью.* На этой стадии РГ составляет список возможных экспертов и оценивает степень их пригодности для планируемого исследования. Итоговый перечень должен включать по крайней мере в 1,5 раза больше потенциальных экспертов, чем то количество, которое планируется реально привлечь к работе.

6. *Формирование экспертной комиссии.* На этой стадии РГ проводит переговоры с экспертами, получает их согласие на работу в экспертной комиссии (сокращенно ЭК). Возможно, часть намеченных РГ (на стадии 5) экспертов не сможет войти в экспертную комиссию (болезнь, отпуск, командировка и др.) или откажется по тем или иным причинам (занятость, условия контракта и др.). В обязательном порядке ЛПР утверждает состав экспертной комиссии, возможно, вычеркнув или добавив часть экспертов к предложениям РГ. Проводится заключение договоров с экспертами об условиях их работы и ее оплаты. На этой же стадии завершается формирование РГ.

7. *Проведение сбора экспертной информации* в соответствии с разработанным на стадии 4 сценарием. Часто перед этим проводятся набор и обучение интервьюеров — одной из групп, входящих в РГ.

8. *Компьютерный анализ экспертной информации* с помощью включенных в сценарий методов. Ему обычно предшествует компьютеризация экспертных мнений, т. е. создание и наполнение соответствующих баз данных или электронных таблиц.

9. При применении (согласно сценарию) экспертной процедуры из нескольких туров — *повторение двух предыдущих этапов.*

10. *Итоговый анализ экспертных мнений, интерпретация полученных результатов* аналитической группой РГ и *подготовка заключительного документа* ЭК для ЛПР. Форма заключения ЭК обычно задается в техническом задании. В Федеральном законе «Об экологической экспертизе» [11] требованиям к заключению ЭК посвящена обширная гл. 18.

11. Официальное *окончание деятельности ЭК и РГ*, в том числе *утверждение ЛПР заключительного документа ЭК*, подготовка и утверждение научного и финансового отчетов РГ о проведении экспертного исследования, оплата труда экспертов и сотрудников РГ, официальное прекращение деятельности (роспуск) ЭК и РГ.

Научный отчет РГ должен позволять восстанавливать все подробности деятельности ЭК на основе документов. В частности, в него должны быть включены все полученные от экспертов материалы и протоколы компьютерной обработки данных. Этот отчет может быть использован в суде и арбитражном суде в случае, если заинтересованные организации и лица сочтут нужным оспорить выводы ЭК в судебном порядке.

Подбор экспертов. Разберем подробнее отдельные стадии экспертного исследования. Начнем с подбора экспертов: кадры решают все! Каковы эксперты — таково и качество заключения экспертной комиссии.

Проблема подбора экспертов является одной из наиболее сложных в теории и практике экспертных исследований. Очевидно, в качестве экспертов необходимо использовать тех людей, чьи суждения наиболее помогут принятию адекватного решения. Но как выделить, найти, подобрать таких людей? Надо прямо сказать, что нет методов подбора экспертов, наверняка обеспечивающих успех экспертизы. Сейчас не будем обсуждать проблему существования различных «партий» среди экспертов и обратим внимание на иные стороны процедур подбора экспертов.

В проблеме подбора экспертов можно выделить две составляющие: составление списка возможных экспертов и выбор из них экспертной комиссии в соответствии с компетентностью кандидатов.

Составление списка возможных экспертов облегчается тогда, когда рассматриваемый вид экспертизы проводится многократно. В таких ситуациях обычно ведется реестр возможных экспертов, например в области государственной экологической экспертизы или судейства фигурного катания, из которого можно выбирать по различным критериям или с помощью датчика (или таблицы) псевдослучайных чисел.

Как быть, если экспертиза проводится впервые, устоявшиеся списки возможных экспертов отсутствуют? Однако и в этом случае у каждого конкретного специалиста есть некоторое представление о том, что требуется от эксперта в подобной ситуации. Для формирования списка есть полезный метод «снежного кома». Это вспомогательное экспертное исследование. Название связано с ассоциацией с известной всем процедурой, когда небольшой снежок много раз поворачивается по поверхности свежевыпавшего снега. При каждом повороте на снежок налипает новый слой, и в результате получается большой снежный ком.

Метод «снежного кома». В качестве затравки используется подобранная РГ небольшая (3–5 человек) группа потенциальных экспертов. В методе «снежного кома» от каждого специалиста, привлекаемого в качестве эксперта, получают определенное количество (обычно 5–10) фамилий тех, кто может быть экспертом по рассматриваемой тематике. Очевидно, некоторые из этих фамилий встречались ранее в деятельности РГ, а некоторые — новые. Каждого вновь появившегося опрашивают по той же схеме. Процесс расширения списка останавливается, когда новые фамилии практически перестают встречаться или когда список достигает необходимого размера. В результате получается достаточно обширный список возможных экспертов.

Рассмотрим условный пример. В качестве затравки РГ подобрала 5 потенциальных экспертов. Каждый из них назвал 10 новых фамилий. Всего РГ получила 50 фамилий. После исключения повторов и лиц, которые не смогут быть экспертами, в списке осталось 40 %, т. е. 20 новых фамилий. На следующем туре РГ получает суммарно 200 фамилий. Пусть из них только 30 % тех, которые можно добавить к списку. Это 60 человек. При их опросе получаем 600 фамилий. Если из них только 20 % реально добавляется к списку, то итог этого тура — 120 фамилий. Подведем итог. В списке уже 5 + 20 + 60 + 120 = = 205 фамилий. Можно остановиться, поскольку на основе этого списка, очевидно, можно сформировать ЭК (типовое число членов ЭК — от 10 до 30).

Метод «снежного кома» имеет и *недостатки*. Число туров до остановки процесса наращивания кома нельзя заранее предсказать. Нельзя априори надеяться, что в обозримой окрестности имеется достаточное число экспертов. Кроме того, ясно, что если на первом этапе все эксперты были из одного «клана», придерживались в чем-то близких взглядов или занимались сходной деятельностью, то и метод «снежного кома» даст, скорее всего, лиц из этого же «клана». Мнения и аргументы других «кланов» будут упущены.

Здесь речь идет о том, что сообщество специалистов реально разбито на группы, названные выше «кланами», и общение идет в основном внутри «кланов». Неформальная структура науки, к которой относятся «кланы», достаточно сложна для изучения. Отметим здесь, что «кланы» обычно образуются на основе крупных формальных центров (вузов, научных институтов), научных школ [33].

Компетентность экспертов. Вопрос об оценке компетентности экспертов не менее сложен. Ясно, что успешность участия в предыдущих экспертизах — хороший критерий для деятельности дегустатора, врача, судьи в спортивных соревнованиях, т. е. таких экспертов, которые участвуют в длинных сериях однотипных экспертиз. Однако, увы, наиболее интересны и важны уникальные экспертизы больших проектов, не имеющих аналогов. Использование формальных показателей экспертов (должность, ученые степень и звание, стаж, число публикаций), очевидно, в современных быстро меняющихся условиях может носить лишь вспомогательный характер, хотя подобные показатели проще всего применять.

Часто предлагают использовать методы самооценки и взаимооценки компетентности экспертов. Обсудим их, начав с метода *самооценки*, при котором эксперт сам дает информацию о том, в каких областях он компетентен, а в каких — нет. С одной стороны, кто лучше может знать возможности эксперта, чем он сам? С другой стороны, при самооценке компетентности скорее оценивается степень самоуверенности эксперта, чем его реальная компетентность.

Тем более что само понятие «компетентность» строго не определено. Можно его уточнять, выделяя составляющие, но при этом усложняется предварительная часть деятельности экспертной комиссии.

Достаточно часто эксперт преувеличивает свою реальную компетентность. Например, большинство людей считают, что они хорошо разбираются в политике, экономике, проблемах образования и воспитания, семьи и медицины. На самом деле экспертов (и даже знающих людей) в этих областях весьма мало.

Бывают уклонения и в другую сторону, излишне критичное отношение к своим возможностям. Нам известен доцент МГУ им. М.В. Ломоносова, написавший добротный университетский учебник по математической статистике, который заявляет, что он не является специалистом по математической статистике. Видимо, он признает себя специалистом лишь в той узкой научной области, которой посвящены его последние научные статьи. Подобный гиперкритицизм по отношению к себе представляется непродуктивным. Более естественной выглядит рекомендация профессора Е.С. Вентцель: «Если вы хотите изучить какой-либо предмет, напишите по нему книгу» (из личной беседы). Действительно, при написании книги приходится разбираться в рассматриваемом вопросе и к концу составления текста становиться высококвалифицированным специалистом — экспертом.

При использовании метода *взаимооценки*, когда оценку компетентности конкретного эксперта дают другие эксперты (или кандидаты в эксперты), помимо возможности проявления личностных и групповых симпатий и антипатий, играет роль малая осведомленность экспертов о профессиональных возможностях друг друга. В современных условиях достаточно хорошее знакомство с работами и возможностями друг друга может быть лишь у специалистов, много лет (не менее 3–4) работающих совместно, в одной комнате, над одной темой. Именно про такие пары можно сказать, что они «вместе пуд соли съели». (По примерному расчету, если каждый рабочий день обедать вместе и солить блюда из одной солонки, пуд соли будет съеден за 3,5 года.) Однако привлечение таких пар специалистов в ЭК не очень-то целесообразно, поскольку их взгляды из-за схожести жизненного пути слишком похожи друг на друга.

Если процедура экспертного опроса предполагает непосредственное общение экспертов, необходимо учитывать еще ряд обстоятельств. Большое значение имеют их личностные (социально-психологические) качества. Так, один-единственный «говорун» может парализовать деятельность всей комиссии на совместном заседании. К срыву могут привести и неприязненные отношения членов комиссии, и сильно различающийся научный и должностной статус членов комиссии. В подобных случаях важно соблюдение регламента работы, разработанного РГ.

Необходимо подчеркнуть, что подбор экспертов — одна из основных функций рабочей группы, и никакие методики подбора не снимают с нее ответственности. Другими словами, именно на РГ лежит ответственность за компетентность экспертов, за их принципиальную способность решить поставленную задачу. Важным является требование к ЛПР об утверждении списка экспертов. При этом ЛПР может как добавить в комиссию отдельных экспертов, так и вычеркнуть некоторых из них — по собственным соображениям, с которыми членам РГ и ЭК знакомиться нет необходимости.

Нормативное регулирование состава экспертов. Существует ряд нормативных документов, регулирующих деятельность экспертных комиссий в тех или иных областях. Примером является Федеральный закон от 23.11.1995 № 174-ФЗ «Об экологической экспертизе» [11], в котором регламентируется процедура экспертизы «намечаемой хозяйственной или иной деятельности» с целью выявления возможного вреда, который может нанести рассматриваемая деятельность окружающей природной среде. В этом законе указаны дополнительные требования к экспертам, призванные обеспечить их независимость от внешних влияний.

Так, в ст. 16, ч. 2, сказано: «Экспертом государственной экологической экспертизы не может быть представитель заказчика документации, подлежащей государственной экологической экспертизе, или разработчика объекта государственной экологической экспертизы, гражданин, состоящий в трудовых или иных договорных отношениях с указанным заказчиком или с разработчиком объекта государственной экологической экспертизы, а также представитель юридического лица, состоящего с указанным заказчиком или с разработчиком объекта государственной экологической экспертизы в таких договорных отношениях».

Используется и принципиально иной подход к подбору экспертов, согласно которому совокупность экспертов состоит из тех, кто сам себя объявил таковыми. Примерами являются разнообразные опросы, приводимые в Интернете и регулярно публикуемые на сайте http://rbc.ru (РБК — РИА «РосБизнесКонсалтинг») и http://voxru.net (Глас РУНЕТа — служба опросов интернет-аудитории). В отличие от метода самооценки, здесь требуется и волевой импульс от эксперта — решение об участии в опросе. В случаях, когда какие-либо материалы предлагаются к обсуждению, от самовыдвинувшихся экспертов получают ответы на открытые вопросы (а не на закрытые, как в случае опросов РБК и Рунета). Письма и обращения, поступающие самотеком в средства массовой информации и в государственные органы, также можно рассматривать в рамках теории экспертных оценок. Однако надо подчеркнуть, что распределение самовыдвинувшихся экспертов по социально-экономическим группам (например, по полу и возрасту) обычно существенно отличается от того, которое имеется в обществе. Частично от этого смещения можно избавиться с помощью методов стандартизации («ремонта») выборки, разработанных в эконометрике и прикладной статистике [1, 3].

5.5. ОСНОВАНИЯ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ЭКСПЕРТНЫХ МЕТОДОВ

В настоящее время не существует общепринятой научно обоснованной классификации методов экспертных оценок и тем более однозначных рекомендаций по их применению. Попытка силой (административным путем) утвердить одну из возможных точек зрения на классификацию методов экспертных оценок может принести лишь вред.

Однако для рассказа о многообразии экспертных технологий необходима какая-либо рабочая классификация методов. Одну из таких возможных классификаций даем ниже, перечисляя основания, по которым делим методы экспертных оценок.

Один из основных вопросов — о цели исследования. Что именно должна представить экспертная комиссия в результате своей работы: информацию для принятия решения ЛПР или проект самого решения? От ответа на этот методологический вопрос зависит организация работы экспертной комиссии, и он служит первым основанием для разбиения методов.

Цель — сбор информации для ЛПР. Тогда рабочая группа должна собрать возможно больше относящейся к делу информации, аргументов «за» и «против» определенных вариантов решений. Полезен следующий метод постепенного увеличения числа экспертов. Сначала первый эксперт приводит свои соображения по рассматриваемому вопросу. Составленный им материал передается второму эксперту, который добавляет свои аргументы. Накопленный материал поступает к следующему — третьему — эксперту, а также к первому, который имеет возможность дополнить свою аргументацию, и т. д. Процедура заканчивается, когда иссякает поток новых соображений.

Отметим, что эксперты в рассматриваемом методе только поставляют информацию, аргументы «за» и «против», но не вырабатывают согласованного проекта решения. Нет никакой необходимости стремиться к тому, чтобы экспертные мнения были согласованы между собой. Более того, наибольшую пользу приносят эксперты с мышлением, отклоняющимся от массового (среднестатистического), т. е. инакомыслящие (диссиденты). Именно от них следует ожидать наиболее оригинальных аргументов. Поэтому таких специалистов надо разыскивать и включать в состав экспертной комиссии.

Цель — подготовка проекта решения для ЛПР. Основная задача при этом — разработка (формулировка, получение) коллективного мнения ЭК. Математические методы анализа экспертных оценок применяются обычно именно для решения задач, связанных с подготовкой проекта решения. При этом зачастую некритически принимают догмы согласованности и одномерности. Эти догмы «кочуют» из одной публикации в другую, поэтому целесообразно их обсудить.

Догма согласованности. Часто без всяких обоснований считается, что решение может быть принято лишь на основе согласованных мнений экспертов. Поэтому исключают из экспертной группы тех, чье мнение отличается от мнения большинства. При этом отсеиваются как неквалифицированные лица, попавшие в состав экспертной комиссии по недоразумению или по соображениям, не имеющим отношения к их профессиональному уровню, так и наиболее оригинальные мыслители, глубже проникшие в проблему, чем большинство. Следовало бы выяснить их аргументы, предоставить им возможность для обоснования их точек зрения. Вместо этого их мнением пренебрегают.

Бывает и так, что эксперты делятся на две или более групп, имеющих единые групповые точки зрения. Так, известен пример деления специалистов (членов Ученого совета НИИ) при оценке результатов научно-исследовательских работ (НИР) на две группы: «теоретиков», явно предпочитающих НИР, в которых получены теоретические результаты, и «практиков», выбирающих те НИР, которые позволяют получать непосредственные прикладные результаты. Поэтому при голосовании с целью выявления лучшей научно-исследовательской работы за год результат зависел не от рассматриваемых работ, а от численности представителей групп «теоретиков» и «практиков», присутствующих на заседании.

Иногда заявляют, что в случае обнаружения двух или нескольких групп экспертов (вместо одной согласованной во мнениях) опрос не достиг цели. Это не так! Цель достигнута — установлено, что единого мнения нет. Это весьма важно. И ЛПР при принятии решений должен это учитывать. Стремление обеспечить согласованность мнений экспертов любой целой может приводить к сознательному одностороннему подбору экспертов, игнорированию всех точек зрения, кроме одной, наиболее полюбившейся рабочей группе (или даже «подсказанной» ЛПР).

Правильное решение было принято руководством НИИ после обнаружения отсутствия единомыслия среди членов Ученого совета: вместо одной премии стали присуждать две — отдельно за теоретические работы и отдельно за прикладные.

Часто не учитывают еще одного чисто математико-статистического обстоятельства. Поскольку число экспертов обычно не превышает 20–30, то формальная статистическая согласованность мнений экспертов (установленная с помощью тех или иных критериев проверки статистических гипотез) может сочетаться с реально имеющимся разделением экспертов на группы, что делает дальнейшие расчеты не имеющими отношения к действительности. Для примера укажем на конкретные методы расчетов с помощью коэффициентов конкордации (т. е. в переводе — согласия) на основе коэффициентов ранговой корреляции Кендалла или Спирмена (алгоритмы приведены в справочнике [23]).

Необходимо напомнить, что согласно математико-статистической теории положительный результат проверки согласованности таким способом означает ни больше ни меньше как отклонение гипотезы о независимости и равномерной распределенности мнений экспертов на множестве всех ранжировок. Таким образом, проверяется нулевая гипотеза, согласно которой ранжировки, описывающие мнения экспертов, являются независимыми случайными бинарными отношениями, равномерно распределенными на множестве всех ранжировок.

Отклонение этой нулевой гипотезы по дурной традиции толкуется как согласованность ответов экспертов. Другими словами, мы являемся жертвой заблуждений, вытекающих из своеобразного толкования слов: проверка согласованности в указанном математико-статистическом смысле вовсе не является проверкой согласованности в смысле практики экспертных оценок. (Именно ущербность рассматриваемых математико-статистических методов анализа ранжировок привела группу специалистов к разработке нового математико-статистического аппарата для проверки согласованности — непараметрических методов, основанных на так называемых *люсианах* [3, 24] и входящих в современный раздел эконометрики — *статистику нечисловых данных* [25, 26]). Невозможность получения обоснованного заключения о согласованности мнений экспертов по ограниченным данным можно сопоставить с невозможностью проверки нормальности теоретического распределения в случае, когда объем выборки менее 50 (это утверждение подробно обосновано в статье [27]).

Отметим, что группы экспертов с близкими мнениями можно выделить методами кластер-анализа [1, 3].

Мнения диссидентов. С целью искусственно добиться согласованности стараются уменьшить влияние мнений экспертов-диссидентов, т. е. инакомыслящих, по сравнению с большинством. *Жесткий способ борьбы* с диссидентами состоит в игнорировании их мнений, т. е. фактически в их исключении из состава экспертной комиссии. Отбраковка экспертов, как и отбраковка резко выделяющихся результатов наблюдений (выбросов), приводит к процедурам, имеющим плохие или неизвестные статистические свойства. Так, известна крайняя неустойчивость классических методов отбраковки выбросов по отношению к отклонениям от предпосылок модели (см., например, учебники [1, 3]).

Мягкий способ борьбы с диссидентами состоит в применении робастных (устойчивых) статистических процедур. Простейший пример: если ответ эксперта — действительное число, то резко выделяющееся мнение диссидента сильно влияет на среднее арифметическое ответов экспертов и не влияет на их медиану. Поэтому разумно в качестве согласованного мнения рассматривать медиану. Однако при этом игнорируются (не достигают ЛПР) оценки и аргументы диссидентов. Другим примером является принятие решений при судействе в фигурном катании, когда с целью повышения устойчивости выводов жюри отбрасываются минимальная и максимальная из оценок судей.

В любом из двух способов борьбы с диссидентами ЛПР лишается информации, идущей от диссидентов, а потому может принять необоснованное решение, которое впоследствии приведет к отрицательным последствиям. С другой стороны, представление ЛПР всего набора мнений снимает часть ответственности и труда по подготовке окончательного решения с комиссии экспертов и рабочей группы по проведению экспертного опроса и перекладывает эту ответственность и труд на плечи ЛПР.

Догма одномерности. В устаревшей, а иногда и в современной научно-технической, управленческой и экономической литературе распространен довольно спорный подход (обычно формулируемый в рамках так называемой «квалиметрии»), согласно которому объект экспертизы всегда можно оценить одним числом. Странная идея! Оценивать человека одним числом приходило в голову лишь на невольничьих рынках. Вряд ли даже самые рьяные квалиметристы рассматривают книгу или картину как эквивалент числа — ее «рыночной стоимости». Практически все реальные объекты достаточно сложны, а потому сколько-нибудь точно описать их можно лишь с помощью многих и многих чисел, а также математических объектов нечисловой природы. Жизнь, в том числе экономическая, многомерна, а не одномерна!

Вместе с тем нельзя полностью отрицать саму идею поиска обобщенных показателей (интегральных показателей, рейтингов [4, 5]) качества, технического уровня, конкурентоспособности и аналогичных. Так, каждый объект можно оценивать по многим показателям качества. Например, легковой автомобиль можно оценивать по таким показателям и группам показателей:

– расход бензина на 100 км пути (в среднем);

– надежность (в том числе число отказов и средняя стоимость ремонта за год);

– безопасность эксплуатации;

– экологическая безопасность, оцениваемая по содержанию вредных веществ в выхлопных газах;

– легкость в управлении;

– маневренность (в том числе радиус поворота);

– быстрота набора заданной скорости (например, 100 км/ч) после начала движения;

– максимальная достигаемая скорость;

– длительность сохранения в салоне положительной температуры при низкой наружной температуре (например, минус пятьдесят градусов по Цельсию) и выключенном двигателе;

– эстетичность (дизайн, привлекательность и «модность» внешнего вида автомобиля и отделки салона);

– вес и т. д.

Можно ли свести оценки по этим показателям вместе? Ясно, что определяющей является конкретная ситуация, для которой выбирается автомашина. Максимально достигаемая скорость важна для гонщика, но, как нам представляется, не имеет большого практического значения для водителя рядовой частной машины, особенно в городе с суровым ограничением на максимальную скорость. Для такого водителя важнее расход бензина, маневренность и надежность. Для машин различных служб спасения и государственного управления, видимо, надежность важнее, чем для частника, а расход бензина — наоборот. Для районов Крайнего Севера важна теплоизоляция салона, а для центральных районов — нет и т. д.

Таким образом, важна конкретная (узкая) постановка задачи перед экспертами. Но такой постановки зачастую нет. А тогда «игры» по разработке обобщенного показателя качества, например в виде линейной функции от перечисленных переменных, не могут дать объективных выводов. Альтернативой единственному обобщенному показателю является математический аппарат типа *многокритериальной оптимизации* — множества Парето и т. д. Варианты построения обобщенного (интегрального) показателя обсуждались в первом разделе настоящей главы при рассмотрении процедур экспертного выбора. Углубленное рассмотрение проводится в теории принятия решений [9, 13].

В некоторых случаях все-таки можно глобально сравнить объекты, например с помощью тех же экспертов получить упорядочение рассматриваемых объектов — изделий или проектов. Тогда можно подобрать коэффициенты при отдельных показателях так, чтобы упорядочение с помощью линейной функции возможно точнее соответствовало глобальному упорядочению (например, найти эти коэффициенты методом наименьших квадратов). В подобных случаях не следует оценивать указанные коэффициенты с помощью экспертов. Эта простая идея до сих пор не стала очевидной для отдельных составителей методик по проведению экспертных опросов и анализу их результатов. Они упорно стараются заставить экспертов делать то, что они качественно выполнить не в состоянии: указывать веса, с которыми отдельные показатели качества должны входить в итоговый обобщенный показатель.

Эксперты обычно могут сравнить объекты или проекты в целом, но не могут вычленить вклад отдельных факторов. Раз организаторы опроса спрашивают, эксперты отвечают, но эти ответы не несут в себе надежной информации о реальности…

Перечень оснований для классификации экспертных методов. Первое основание — ***цели экспертизы*** — мы уже обсудили. Экспертные методы делятся на два класса в соответствии с ответом на вопрос: «Что именно должна представить экспертная комиссия в результате своей работы: информацию для принятия решения ЛПР или проект самого решения?»

Рассмотрим еще четыре основания.

Число туров. Второе основание классификации экспертных процедур — число туров. Экспертизы могут включать один тур, некоторое фиксированное число туров (два, три и т. д.) или неопределенное число туров.

Экспертиза в один тур предполагает, что эксперты не обмениваются информацией, поскольку не общаются друг с другом. Технология такой экспертизы напоминает технологии маркетинговых и социологических выборочных обследований. Это наиболее быстрая и дешевая технология, но и в наименьшей степени использующая творческие способности экспертов, а потому дающая наименьшие полезные результаты.

Наличие нескольких туров предполагает, что эксперты получают информацию друг от друга, обрабатывают ее, получают новое знание и в соответствии с ним корректируют свои выводы. Чем больше туров, тем более тщательным является анализ ситуации, поскольку эксперты при этом обычно много раз возвращаются к рассмотрению предмета экспертизы. Но одновременно увеличивается общее время на экспертизу и возрастает ее стоимость.

Наибольшие сложности вызывают процедуры с неопределенным заранее числом туров, например «снежный ком». Часто задают максимально возможное число туров, и тогда неопределенность сводится к тому, придется ли проводить это максимальное число туров или удастся ограничиться меньшим числом.

Порядок вовлечения экспертов. Можно уменьшить расходы, вводя в экспертизу не всех экспертов сразу, а постепенно. Так, например, если цель состоит в сборе аргументов «за» и «против», то первоначальный перечень аргументов может быть составлен одним экспертом. Второй добавит к нему свои аргументы. Суммарный материал поступит к первому и третьему, которые внесут свои аргументы и контраргументы. И так далее — добавляется по одному эксперту на каждый новый тур.

Итак, экспертные процедуры можно классифицировать на основании того, как эксперты вовлекаются в работу: одновременно или последовательно. Первый вариант — более быстрый, но и более затратный (дорогой), второй — дешевле, но дольше.

Организация общения экспертов. Четвертое основание классификации экспертных процедур — способ организации общения экспертов. Рассмотрим достоинства и недостатки каждого из элементов шкалы: отсутствие общения — заочное анонимное общение — заочное общение без анонимности — очное общение с ограничениями — очное общение без ограничений.

При отсутствии общения эксперт высказывает свое мнение, ничего не зная о других экспертах и об их мнениях. Он полностью независим, что и хорошо, и плохо. Обычно такая ситуация соответствует однотуровой экспертизе.

Заочное анонимное общение, например, как в методе Дельфи, означает, что эксперт знакомится с мнениями и аргументами других экспертов, но не знает, кто именно высказал то или иное положение. Следовательно, в экспертизе должно быть предусмотрено хотя бы два тура.

Заочное общение без анонимности соответствует, например, общению по Интернету. Все варианты заочной экспертизы хороши тем, что нет необходимости собирать экспертов вместе, следовательно, находить для этого удобное время и место. В будущем с распространением телеконференций грань между очным и заочным общением экспертов начнет стираться.

Оно соответствует также многим реальным процедурам принятия управленческих решений. Координация действий организаций и менеджеров с помощью заочного общения без анонимности происходит и при подготовке документов: планов, приказов, предложений, направляемых в другие организации, ответов на распоряжения и запросы властей и др. Управленческие решения обычно оформляются в виде подобных документов.

Обычно один из сотрудников — назовем его Исполнителем — готовит первоначальный вариант документа. Он размножается и рассылается на отзыв заинтересованным в нем менеджерам, а иногда и в другие организации. Исполнитель составляет сводку отзывов, с одними из замечаний соглашается, против других высказывает возражения. Затем собирают так называемое «согласительное совещание», на которое приглашают всех тех, с чьим мнением Исполнитель не согласен. В результате дискуссии по ряду позиций достигается компромисс, и возражения снимаются. Окончательное решение по проекту документа с учетом оставшихся возражений принимает ЛПР, например генеральный директор или совет директоров, т. е. высшая инстанция в данной организации. Именно такова процедура подготовки законов РФ, государственных стандартов и иных ответственных документов.

Во многих случаях эта процедура упрощается и отзывы заменяются *визированием*, при котором свое согласие менеджеры выражают, накладывая на документ визу, т. е. расписываясь (иногда добавляя несколько слов по затрагиваемой проблеме). Например, подготовленное для отправки в другую организацию письмо или приказ по организации визируют руководители нескольких отделов, и генеральный директор его подписывает от имени фирмы, не вникая в суть (поскольку каждый день он подписывает десятки писем и приказов, то вникать некогда). Адресату уходит письмо, на обратной стороне которого указаны фамилия и телефон Исполнителя (поскольку адресат тоже хорошо знаком с процедурой подготовки документов, он понимает, что по конкретным вопросам надо обращаться к Исполнителю, а не к генеральному директору). В архиве фирмы остается письмо с визами, так что в случае необходимости легко выяснить, кто составил и одобрил документ.

Как ясно из сказанного выше, заочные экспертизы часто используются совместно с очными.

При очных экспертизах эксперты говорят, а не пишут, как при заочных, и потому успевают за то же потраченное время сообщить существенно больше. *Очная экспертиза с ограничениями* весьма распространена. Это собрание, идущее по фиксированному регламенту. Примером является военный совет в императорской русской армии, когда эксперты (офицеры и генералы) высказывались в фиксированном порядке от младшего (по чину и должности) к старшему.

Другой пример — разработка и принятие решений в Государственной Думе РФ в соответствии с регламентом, определяющим последовательность и продолжительность выступлений на заседаниях комиссий, комитетов, других структур, на пленарных заседаниях. Вспомним также технологию «мозгового штурма».

Наконец, *очная экспертиза без ограничений* — это свободная дискуссия.

Все очные экспертизы имеют недостатки, связанные с возможностями отрицательного влияния на их проведение социально-психологических свойств и клановых (партийных) пристрастий участников, а также неравенства их профессионального, должностного, научного статусов. Представьте себе, что соберутся вместе 5 лейтенантов и 3 генерала. Независимо от того, какая информация имеется у того или иного участника встречи, ход ее предсказать нетрудно: генералы будут беседовать, а лейтенанты — помалкивать. При этом вполне очевидно, что лейтенанты получили образование позже генералов, а потому обладают полезной информацией, которой нет у генералов.

Веса экспертов. Пятое основание классификации экспертных процедур — по способам введения весов для мнений экспертов. Простейший способ: все эксперты равноправны, при голосованиях по отдельным положениям разрабатываемого решения имеют по одному голосу.

Часто вводят понятия решающего голоса и совещательного голоса. Например, при защите дипломного проекта члены Государственной аттестационной комиссии (ГАК) имеют решающие голоса, а все остальные участники заседания — совещательные. В Федеральном законе «Об экологической экспертизе» [11] подробно расписано, представители каких организаций и структур управления могут присутствовать на заседании экспертной комиссии государственной экологической экспертизы с правом совещательного голоса.

В регламент принятия решений иногда включают положение, согласно которому при делении голосов ровно пополам принимается мнение той половины, к которой относится председатель ЭК. Это означает, что вес голоса председателя на бесконечно малую величину больше веса рядового эксперта. Впрочем, иногда председателю дают два голоса.

При голосованиях на собраниях акционеров вес каждого эксперта (участника заседания) определяется числом акций, которыми он распоряжается.

Комбинации различных видов экспертизы. Реальные экспертизы часто представляют собой комбинации различных описанных выше типов экспертиз. В качестве примера рассмотрим защиту студентом дипломного проекта. Сначала идет многотуровая очная экспертиза, проводимая научным руководителем и консультантами, в результате студент подготавливает проект к защите. Затем два эксперта работают заочно — это автор отзыва сторонней организации и заведующий кафедрой, допускающий работу к защите. Обратите внимание на различие задач этих экспертов и объемов выполняемой ими работы: один пишет подробный отзыв, второй росписью на титульном листе проекта разрешает его защиту.

Наконец, очная экспертиза без ограничений (для членов ГАК — государственной аттестационной комиссии). Дипломный проект оценивается коллегиально, по большинству голосов, при этом один из экспертов (научный руководитель) знает работу подробно, а остальные — в основном лишь по докладу. Отметим, что мнения экспертов учитываются с весами, а именно мнения членов ГАК — с весом 1, мнения всех остальных — с весом 0 (совещательный голос). Таким образом, имеем сочетание многотуровой и однотуровой, заочных и очных экспертиз. Подобные сочетания характерны для многих реально проводящихся экспертиз.

5.6. ИНТУИЦИЯ ЭКСПЕРТА И КОМПЬЮТЕР

Обсудим две, казалось бы, далекие друг от друга, но на самом деле тесно связанные между собой темы: роль интуиции эксперта в экспертизе и применение вычислительной техники в технологиях экспертных исследований.

Интуиция эксперта. Примером хорошего эксперта служит врач, чьи диагнозы чаще, чем у его коллег, оправдываются при вскрытии. Дело в том, что только посмертное вскрытие позволяет патологоанатому дать достоверное заключение о том, чем болел пациент, и правильно ли его лечили. Хотя это достоверное заключение уже не может принести пользы пациенту, его можно применить для оценки профессиональных возможностей врача и корректировки лечебных технологий. Причем чем лучше врач, тем дольше придется ждать подтверждения его высокого профессионализма.

С целью создания систем компьютерной диагностики математики пытались выяснить, как работают выдающиеся врачи [28]. Для этого их просили описать используемые ими в лечебной работе методы умозаключений. Практикующие врачи приводили примерно те же формулировки, что и авторы медицинских учебников. И это вполне естественно. Однако при попытках применить сформулированные таким путем правила для диагностики вновь поступающих пациентов качество принимаемых врачебных решений резко ухудшалось: вплоть до уровня рядового выпускника мединститута. Таким образом, оказалось, что выдающиеся врачи не в состоянии описать, как именно они работают. При попытке вербализации процесса диагностики интуиция исчезала, а вместе с ней — и отличие высококвалифицированного эксперта от рядового специалиста.

Важную роль интуиции в работе эксперта трудно, а точнее, практически невозможно промоделировать математически. Как следствие, нельзя и мечтать о замене экспертных оценок компьютерными расчетами. Экспертиза — это творчество.

Роль интуиции весьма велика в различных творческих профессиях. Например, математическое творчество, по свидетельству выдающегося французского математика Ж. Адамара, основано на интуиции [29].

Экспертные оценки и экспертные системы. Хотя названия этих двух научно-практических дисциплин похожи, различие между ними колоссально. **Теория экспертных оценок** — это наука о методах сбора и анализа мнений людей (экспертов), опирающихся на свою интуицию. **Экспертная система** — это программа для компьютера, которая оперирует со знаниями в определенной предметной области с целью выработки практических рекомендаций для решения возникших проблем [30]. Значит, в экспертных системах не участвуют живые люди, есть только ранее полученные знания — результат прошлой деятельности специалистов. При формализации знаний невозможно учесть интуицию экспертов. Однако компьютерной обработке может быть подвергнут огромный объем знаний, что человек сделать не в состоянии.

Сравнительные возможности живых экспертов и экспертных систем видны при сопоставлении шахматистов и шахматных программ. Люди опираются на интуицию, а компьютеры — на расчеты. Результат известен: за пятьдесят лет компьютеры достигли уровня гроссмейстеров и превзошли его.

Однако речь идет об анализе довольно простой игры: шахматные правила изложены на нескольких страницах, и они строго выполняются. Реальные ситуации гораздо сложнее, и самое интересное — правила игры могут меняться.

В настоящее время экспертные системы, как и другие достижения научного движения под названием «искусственный интеллект», — помощники человека. Например, на рыболовном судне или в отдаленном поселении целесообразно иметь экспертную систему неотложной медицинской помощи. Она позволит сохранить жизнь пострадавшему, пока не появится врач. Врачу она тоже поможет — для различных справок. Но лечить будет именно врач.

В обозримом будущем та или иная рутинная работа будет передаваться (или уже передана) компьютерным системам. Например, составление бухгалтерского баланса. Но за человеком всегда останется целеполагание. Компьютер, в отличие от человека, не может знать, чего он хочет.

Эксперт и компьютер. Обсудим разные варианты взаимодействия живых экспертов и компьютерных систем:

1. Эксперту нужна различная справочная информация, и наиболее быстро он может ее получить с помощью компьютера. Так, всемирная сеть «Интернет» — хороший помощник эксперта. К сожалению, в сети циркулирует масса ошибочных сведений. Но ведь и информация, полученная из книг или от людей, не всегда достоверна.

2. Быстрая электронная связь с организаторами экспертизы, с другими экспертами, возможность удаленного общения (чаты, телеконференции и другие формы) резко повышают эффективность экспертной работы.

3. Автоматизированное рабочее место эксперта (например, АРМ МАТЭК (математика в экспертизе) [31]) обеспечивает как сбор экспертной информации, так и ее анализ с помощью разнообразных математических методов.

4. Экспертные процедуры могут многократно использоваться на различных этапах процесса принятия решений, например для оценки значений признаков, описывающих объекты, или для оценки коэффициентов важности (весомости) самих признаков. При этом процесс принятия решений опирается на ту или иную форму компьютерной поддержки.

5. Интегрированные системы принятия решений включают в себя разнообразные базы данных и знаний, автоматизированные места лиц, принимающих решения, экспертов и сотрудников группы сопровождения, блоки имитационных, экономико-математических и иных компьютерных моделей (в том числе блоки соответствующих экспертных систем). Такие системы действуют в составе аналитических центров крупных организационных структур, например в Администрации Президента РФ, Центре управления полетами космических аппаратов, в штабах высокого уровня Вооруженных Сил РФ или в руководящих структурах транснациональных корпораций.

В качестве примера рассмотрим подробнее АРМ МАТЭК (математика в экспертизе) [31]).

Автоматизированное рабочее место МАТЭК (МАТематические методы в ЭКспертных оценках). Разработано и применяется весьма большое число методов (и особенно их разновидностей) организации и проведения экспертных исследований. Для решения конкретной задачи можно использовать, как правило, не один, а много методов, и выбор наиболее подходящего из них лежит на организаторах экспертизы. (Попытки стандартизовать правила принятия подобных решений в настоящее время рассматриваются как нецелесообразные — таков один из результатов развития стандартизации в нашей стране и в мире в последние десятилетия начиная с 1970-х гг.) Автоматизированное рабочее место МАТЭК предоставляет организаторам экспертизы большие возможности для выбора тех или иных методов планирования, организации, проведения экспертизы, анализа экспертных оценок, обеспечивает необходимую компьютерную поддержку в проведении экспертного исследования.

АРМ МАТЭК предназначен для подготовки и проведения экспертизы по определенной теме. С помощью АРМ МАТЭК можно автоматизировать процесс подбора экспертов, работу комиссии экспертов и анализ экспертных мнений, а также подготовку опросных листов, бланков и всей отчетной документации.

Работа на АРМ в соответствии с методологией работы [10] состоит из двух частей:

А. Подготовка экспертизы.

В. Проведение экспертизы.

Этап *А* подготовки экспертизы включает в себя ввод всей информации, необходимой для проведения экспертизы. Итогом этого этапа являются два документа: «Техническое задание» (ТЗ) и «Сценарий».

Рассмотрим этап А подробнее. Сначала ЛПР должен сформулировать цель экспертизы, сформировать руководство РГ.

Далее к работе приступает РГ. Ее руководитель должен ввести данные для формирования документа ТЗ. Затем собираются данные для компоновки документа «Сценарий».

РГ может включать в себя руководителя, группу обработки, группу связи и интервьюеров.

Данные для документа ТЗ следующие: основание для проведения экспертизы, задачи экспертных опросов, сформулированные в соответствии с целью экспертизы, требования к ЭК, опросному листу, сроки выполнения экспертизы и порядок контроля за ними, финансовое обеспечение проекта.

В зависимости от того, введены или нет те или иные данные для ТЗ, они соответственно будут или не будут включены в документ ТЗ. Последний можно просмотреть на экране и распечатать.

Данные для документа «Сценарий» следующие: вводный текст (в этом тексте должна содержаться собственно последовательность действий при проведении экспертизы), календарный план (КП), список используемых методов анализа экспертных мнений (ЭМ). Как и при формировании ТЗ, «Сценарий» может иметь разную структуру, в зависимости от того, какие пункты будут в него включены. Как приложение к «Сценарию» могут быть использованы примеры бланков опросных листов, анкеты «Согласие» (для выявления согласия экспертов участвовать в экспертизе), анкеты «Снежный ком», «Взаимооценка» (если соответствующие этапы включены в КП). Для этих бланков также требуется ввести оповещение (либо выбрать стандартное). Документ «Сценарий» можно просмотреть на экране и распечатать.

При формировании «Сценария» будет сформирован опросный лист экспертизы. Опросный лист состоит из оповещения (стандартного или оригинального — по выбору РГ) и собственно вопросов. Вопросы группируются по задачам из ТЗ. При формулировке вопросов учитывается список методов обработки ответов. Точнее, пользователь, сформулировав вопрос, должен точно знать формат ответа. Для каждого формата ответа в АРМ предусмотрен список методов обработки ответов (краткое описание каждого из них можно будет просмотреть при выборе метода). Если пользователя не устраивает ни один из этих методов, он должен будет переформулировать вопрос (т. е. изменить формат ответа) так, чтобы в списке соответствующих методов оказался подходящий ему. Тем самым при формировании опросного листа будет одновременно сформулирован список используемых методов анализа экспертных мнений (ЭМ).

Этап В проведения экспертизы недоступен до тех пор, пока не будет завершен этап подготовки экспертизы. После того как подготовка создана, можно запустить или открыть проведение экспертизы. Тем самым возможно проведение нескольких экспертиз с одной и той же подготовкой (для каждой экспертизы выделяется собственная, идентифицируемая по названию экспертизы база данных).

На этапе проведения экспертизы формируется ЭК, проводятся сбор и анализ ЭМ, формируются отчет и заключение для ЛПР.

Формирование ЭК — многоступенчатый процесс. Сначала член РГ (руководитель) в соответствии с информацией об экспертах из БДЭ (базы данных об экспертах) может отобрать подходящих кандидатов в ЭК. Далее с помощью анкеты «Согласие» из этого списка отбираются согласившиеся быть членами ЭК. Два последних шага могут проводиться или нет, в зависимости от того, включены ли они в КП. Это этапы «Снежный ком» и «Взаимооценка».

После того как сформирован ЭК, можно проводить сбор экспертных мнений (ЭМ). Это осуществляется с помощью бланка вопросника. ЭМ будут храниться так, чтобы доступ к ним был удобен (т. е. по любому эксперту и любому вопросу можно было получить ответ и т. д.). Анализ ЭМ по каждому вопросу проводится методом, выбранным пользователем АРМ (руководителем РГ) на этапе подготовки экспертизы для этого вопроса.

По всем предыдущим этапам формируются отчеты, из которых в результате получается общий отчет о проведении экспертизы. В соответствии с задачами из ТЗ формируется заключение для ЛПР.

В соответствии с КП ведется контроль за сроками проведения экспертизы.

Ведется протокол экспертизы, т. е. при выходе из системы фиксируется текущее состояние этапа проведения экспертизы, и при открытии данной экспертизы происходит возврат именно на тот этап экспертизы, на котором произошел выход из системы. (На этапе подготовки экспертизы протокол не ведется.)

Разграничены права доступа к БДЭ (база данных экспертов), ЭМ и результатам обработки ЭМ.

Методы активации интуиции. Технологии принятия решений, использующие экспертные оценки, основаны на использовании интуиции экспертов [34]. Полезен ряд методов развития (активации) интуиции для принятия управленческих решений [35]. Разработаны методы сравнения технологий активации интуиции [36]. Посвященная развитию интуиции область научных исследований активно развивается в настоящее время.

На этом закончим вводную «гуманитарную» часть обсуждения теории и практики экспертных оценок. Судя по данным Российского индекса научных цитирований (РИНЦ), наиболее известным учебником по экспертным оценкам является книга [37], переизданная в 2022 г. [38]. Основные идеи даны в учебном пособии [39]. Развитие теории экспертных оценок в нашей стране рассмотрено в работе [40].

Рассказ о конкретных методах сбора и анализа экспертной информации продолжается в дальнейших главах учебника с привлечением современного математического аппарата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Саратов : ИНТУИТ : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 676 с.

2. *Сидельников, Ю.В.* Технология экспертного сценарного прогнозирования / Ю.В. Сидельников, Э.С. Минаев. — Москва : Изд-во МАИ, 2017. — 232 с.

3. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

4. *Орлов, А.И.* Определение приоритетности реализации НИОКР на предприятиях ракетно-космической отрасли / А.И. Орлов, А.Д. Цисарский // Контроллинг. — 2020. — № 2(76). — С. 58–65.

5. *Лындина, М.И.* Математическая теория рейтингов / М.И. Лындина, А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 114. — С. 1–26.

6. *Винер, Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном и машине / Н. Винер. — Москва : Наука, 1983. — 326 с.

7. *Винер, Н.* Кибернетика и общество / Н. Винер. — Москва : АСТ, 2019. — 288 с.

8. *Моисеев, Н.Н.* Люди и кибернетика / Н.Н. Моисеев. — Москва : Молодая гвардия, 1984. — 224 с.

9. *Орлов, А.И.* Теория принятия решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 826 с.

10. *Литвак, Б.Г.* Экспертиза в России / Б.Г. Литвак // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2000. — Т. 66. — № 7. — С. 61–66.

11. Федеральный закон от 23 ноября 1995 г. № 174-ФЗ «Об экологической экспертизе». — URL: https://base.garant.ru/10108595/ (дата обращения: 17.11.2023).

12. *Орлов, А.И.* Экспертные оценки / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. — 1996. — Т. 62. — № 1. — С. 54–60.

13. *Орлов, А.И.* Методы принятия управленческих решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : КНОРУС, 2018. — 286 с.

14. *Орлов, А.И.* Устойчивые экономико-математические методы и модели : монография / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 337 с.

15. *Горский, В.Г.* Метод согласования кластеризованных ранжировок / В.Г. Горский, А.А. Гриценко, А.И. Орлов // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 3. — С. 159–167.

16. *Орлов, А.И.* Анализ экспертных упорядочений / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 112. — С. 21–51.

17. *Холлендер, М.* Непараметрические методы статистики / М. Холлендер, Д. Вулф. — Москва : Финансы и статистика, 1983. — 518 с.

18. *Кемени, Дж.* Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения / Дж. Кемени, Дж. Снелл. — Москва : Советское радио, 1972. — 192 с.

19. *Миркин, Б.Г.* Проблема группового выбора / Б.Г. Миркин. — Москва : Наука, 1974. — 256 с.

20. *Шрейдер, Ю.А.* Равенство, сходство, порядок / Ю.А. Шрейдер. — Москва : Наука, 1971. — 256 с.

21. *Орлов, А.И.* Менеджмент в техносфере : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / А.И. Орлов, В.Н. Федосеев. — Москва : Академия, 2003. — 384 с.

22. Управление промышленной и экологической безопасностью : учебное пособие / В.Н. Федосеев, А.И. Орлов, В.Г. Ларионов, А.Ф. Козьяков. — Москва : Изд-во УРАО, 2002. — 220 с.

23. *Большев, Л.Н.* Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. — Москва : Наука, 1983. — 416 с.

24. *Орлов, А.И.* Теория люсианов / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 101. — С. 275–304.

25. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: нечисловая статистика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 446 с.

26. *Орлов, А.И.* Статистика нечисловых данных — центральная часть современной прикладной статистики / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2020. — № 156. — С. 111–142.

27. *Селезнев, В.Д.* Исследование свойств критериев согласия функции распределения данных с гауссовой методом Монте-Карло для малых выборок / В.Д. Селезнев, К.С. Денисов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2005. — Т. 71. — № 1. — С. 68–73.

28. *Гельфанд, И.М.* Очерки о совместной работе математиков и врачей / И.М. Гельфанд, Б.И. Розенфельд, М.А. Шифрин. — 3-е изд., стер. — Москва : URSS, 2011. — 320 с.

29. *Адамар, Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж. Адамар. — Москва : URSS, 2001. — 128 с.

30. Статические и динамические экспертные системы : учебное пособие / Э.В. Попов, И.Б. Фоминых, Е.Б. Кисель, М.Д. Шапот. — Москва : Финансы и статистика, 1996. — 320 с.

31. Экспертные оценки: современное состояние и перспективы использования в задачах экологического страхования / В.Г. Горский, А.И. Орлов, В.Н. Жихарев [и др.] // Труды Второй Всероссийской конференции «Теория и практика экологического страхования». — Москва : Изд-во Института проблем рынка РАН, 1996. — С. 20–23.

32. *Орлов, А.И.* Менеджмент: организационно-экономическое моделирование : учебное пособие для вузов / А.И. Орлов. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2009. — 475 с.

33. Социально-психологические проблемы науки: ученый и научный коллектив / под редакцией М.Г. Ярошевского. — Москва : Наука, 1973. — 252 с.

34. *Орлов, А.И.* О методах принятия решений, основанных на использовании интуиции / А.И. Орлов, А.А. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2022. — № 179. — С. 178–196.

35. *Орлов, А.А.* Методы развития интуиции для принятия управленческих решений / А.А. Орлов, А.И. Орлов // Инновации в менеджменте. — 2022. — № 2(32). — С. 40–47.

36. *Орлов, А.А.* Методы сравнения технологий активации интуиции в принятии управленческих решений / А.А. Орлов // Инновации в менеджменте. — 2023. — № 1(35). — С. 22–30.

37. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование : учебник. В 3 частях. Ч. 2. Экспертные оценки / А.И. Орлов. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 486 с.

38. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: экспертные оценки : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 436 с.

39. *Орлов, А.И.* Экспертные оценки : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 57 с.

40. *Орлов, А.И.* Теория экспертных оценок в нашей стране / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2013. — № 93. — С. 1652–1683.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Приведите примеры индивидуальных экспертных оценок.

2. Почему необходима формализованная карта оценки объекта экспертизы?

3. Приведите примеры коллективных экспертных оценок.

4. Расскажите о задачах выбора вариантов с помощью экспертов.

5. Почему большое внимание уделяют регламенту проведения экспертных исследований?

6. Опишите метод Дельфи экспертного прогнозирования.

7. Расскажите о методе сценариев.

7. Что такое «мозговой штурм»?

8. В каких конкретных областях используют методы экспертных оценок?

9. Чем метод средних арифметических рангов отличается от метода медиан рангов?

10. Дайте определение понятию «кластеризованная ранжировка».

11. Почему необходимо согласование кластеризованных ранжировок и как оно проводится?

12. В таблице приведены упорядочения 7 инвестиционных проектов, представленные 7 экспертами.

Упорядочения проектов экспертами

Эксперты	Упорядочения
1	1 < {2, 3} < 4 < 5 < {6, 7}
2	{1, 3} < 4 < 2 < 5 < 7 < 6
3	1 < 4 < 2 < 3 < 6 < 5 < 7
4	1 < {2, 4} < 3 < 5 < 7 < 6
5	2 < 3 < 4 < 5 < 1 < 6 < 7
6	1 < 3 < 2 < 5 < 6 < 7 < 4
7	1 < 5 < 3 < 4 < 2 < 6 < 7

Постройте таблицу рангов. Найдите:

а) итоговое упорядочение по средним арифметическим рангам;

б) итоговое упорядочение по медианам рангов;

в) кластеризованную ранжировку, согласующую эти два упорядочения.

13. В таблице приведены упорядочения 7 кандидатур в совет директоров корпорации, представленные 7 экспертами.

Упорядочения проектов экспертами

Эксперты	Упорядочения
1	4 < 6 < 1 < 2 < {3, 5} < 7
2	1 < {4, 6} < 2 < 3 < {5, 7}
3	{4, 6} < {1, 2} < 5 < 3 < 7
4	4 < {1, 6} < 3 < 5 < 7 < 2
5	6 < {1, 2} < 4 < 5 < 1 < 7 < 3
6	2 < 1 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7
7	6 < 1 < 4 < 3 < 2 < 5 < 7

Постройте таблицу рангов. Найдите:

а) итоговое упорядочение по средним арифметическим рангам;

б) итоговое упорядочение по медианам рангов;

в) кластеризованную ранжировку, согласующую эти два упорядочения.

14. Расскажите об основных стадиях экспертного опроса.

15. Почему сценарий проведения сбора и анализа экспертных мнений необходимо разрабатывать до подбора экспертов?

16. Что такое метод «снежного кома»?

17. Как выбор цели экспертизы влияет на экспертные технологии?

18. Какова роль диссидентов в комиссии экспертов в зависимости от регламента сбора и анализа экспертных мнений?

19. По каким основаниям классифицируют экспертные методы?

20. Чем отличаются экспертные оценки и экспертные системы?

21. Какова роль компьютеров в экспертных технологиях?

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ, РЕФЕРАТОВ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Индивидуальное экспертное оценивание (на примере работы преподавателя).

2. Варианты коллективного экспертного оценивания в медицине.

3. Робастное оценивание в экспертизе.

4. Экспертные технологии распределения финансирования.

5. Технологии экспертного прогнозирования.

6. Метод сценариев и экспертная оценка рисков в инвестиционном менеджменте.

7. Экспертные технологии в технико-экономическом анализе.

8. Статистика нечисловых данных в оценочных экспертизах.

9. Управленческие экспертизы в контроллинге.

10. Почему метод средних арифметических рангов неприемлем с точки зрения теории измерений?

11. Сравните с помощью экспертного опроса субъективное ощущение тяжести (сложности, трудности) дней недели. Для этого получите от экспертов упорядочения (кластеризованные ранжировки) дней недели по этому показателю. Обработайте экспертные мнения с помощью метода средних арифметических рангов и метода медиан рангов. При необходимости проведите согласование двух полученных кластеризованных ранжировок. Можно ли утверждать, что опрошенные вами эксперты имеют единое мнение по поводу субъективной тяжести дней недели? Или же мнения экспертов настолько различны, что никаких общих для всей групп экспертов выводов сделать нельзя?

Примечание. Желательно опросить от 5 до 15 экспертов.

12 Перекодируйте ответы экспертов, полученные при выполнении задания 11, исключив сведения о выходных днях (субботе и воскресенье). Проведите предусмотренную заданием 11 обработку данных.

Что изменилось в расчетах и выводах и что сохранилось по сравнению с заданием 11?

13. Проведите обработку мнений экспертов, собранных в процессе выполнения задания 11, предварительно сделав допустимое преобразование в порядковой шкале и перейдя от рангов к баллам. А именно, используя вместо рангов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (по числу дней недели) неравномерную шкалу баллов, например, –10, –3, –1, 0, 1, 3, 10 (т. е. –10 — балл самого плохого дня, –3 — второго по тяжести, …, 10 — балл самого хорошего дня недели). В случае связанных рангов берите среднее арифметическое соответствующих соседних значений баллов.

Что изменилось в расчетах и выводах и что сохранилось по сравнению с заданием 11?

14. Проведите подробное математическое обоснование корректности алгоритма согласования кластеризованных ранжировок (на основе статьи [15] и прил. 3 в учебном пособии [1]).

15. Разработайте метод сбора и анализа мнений экспертов с использованием средних по Колмогорову, рассмотренных в гл. 6 (в соответствующем варианте метода средних рангов).

16. Проведите сравнительный анализ различных методов усреднения мнений экспертов с целью выявления итогового мнения комиссии экспертов. В частности, сравните методы средних рангов с расчетом медианы Кемени (введенной в гл. 7 на основе расстояния Кемени между кластеризованными ранжировками).

17. Роль ЛПР в организации экспертного исследования.

18. Внутренняя структура рабочей группы экспертного исследования.

19. Типовые сценарии проведения сбора и анализа экспертных мнений.

20. Требования к экспертам, зафиксированные в действующем законодательстве.

21. Уголовная, административная, материальная и гражданско-правовая ответственность экспертов.

22. Сравнительный анализ методов самооценки и взаимооценки.

23. Догма согласованности.

24. Догма одномерности.

25. Подходы к выбору способа организации общения экспертов.

26. Роль интуиции в экспертизе.

27. Проектирование автоматизированных рабочих мест экспертов и членов РГ (группы сопровождения).

ГЛАВА 6. ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ И СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Теория измерений (в дальнейшем сокращенно ТИ) необходима, в частности, для разработки технологий экспертного оценивания. За последние десятилетия она прошла путь от малоизвестного раздела математической психологии до общенаучной концепции, знакомство с которой признается обязательным для исследователей и студентов самых разных специальностей (в качестве примеров укажем книги [1–3]). Теория измерений является одной из составных частей наук, посвященных анализу данных, — прикладной статистики и эконометрики. Принято считать, что ТИ входит в состав статистики объектов нечисловой природы [3, 5–7].

В настоящей главе рассмотрены основные идеи теории измерений. Описаны шкалы наименований, порядка, интервалов, отношений и др. Обосновано требование инвариантности статистических выводов относительно группы допустимых преобразований шкалы измерения. Рассказано о многообразии видов средних величин. Установлены правила выбора вида средних величин в соответствии с типом шкалы измерения (для данных, измеренных в шкалах порядка, интервалов и отношений).

6.1. ОСНОВНЫЕ ШКАЛЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Почему необходима теория измерений? Эта теория исходит из того, что арифметические действия с используемыми в практической работе числами не всегда имеют смысл. Действительно, использование чисел в жизни и хозяйственной деятельности людей отнюдь не всегда предполагает, что эти числа можно складывать и умножать, производить иные арифметические действия. Что бы вы сказали о человеке, который занимается сложением или умножением телефонных номеров? Далее, не всегда выполнены привычные арифметические соотношения. Например, сумма знаний двух двоечников не равна знаниям «хорошиста», т. е. для оценок знаний 2 + 2 не равно 4. Если вы вечером поместите в клетку двух животных, а потом еще двух, то отнюдь не всегда можно утром найти в этой клетке четырех животных. Их может быть и много больше: если вечером вы загнали в клетку овцематок или беременных кошек. Их может быть и меньше: если к двум волкам вы поместили двух ягнят. Итак, отнюдь не всегда 2 + 2 = 4. Числа используются гораздо шире, чем арифметика.

Приведенные примеры показывают, что практика использования чисел для описания результатов наблюдений (измерений, испытаний, анализов, опытов) заслуживает методологического анализа.

При применении тех или иных экспертных технологий прежде всего необходимо разобраться с проблемами измерения различных величин, используемых в процессе сбора и анализа экспертных мнений. Они могут быть измерены в тех или иных количественных или качественных шкалах. Поскольку в выборе конкретной шкалы имеется некоторый произвол (например, расстояние можно измерять в аршинах, саженях, верстах, метрах или парсеках), то естественно потребовать, чтобы принимаемое решение не зависело от этого произвола (например, от того, в каких единицах измерено расстояние).

Так, например, мнения экспертов часто выражены в порядковой шкале (подробнее о шкалах говорится ниже), т. е. эксперт может сказать (и обосновать), что один показатель качества продукции более важен, чем другой, первый технологический объект более опасен, чем второй, и т. д. Но он не в состоянии сказать, во сколько раз или на сколько он более важен, соответственно, более опасен. Экспертов часто просят дать ранжировку (упорядочение) объектов экспертизы, т. е. расположить их в порядке возрастания (или убывания) интенсивности интересующей организаторов экспертизы характеристики. Ранг — это номер (объекта экспертизы) в упорядоченном ряду значений характеристики у различных объектов. Такой ряд в статистике называется вариационным.

Формально ранги выражаются числами 1, 2, 3, …, но с этими числами нельзя делать привычные арифметические операции. Например, хотя в арифметике 1 + 2 = 3, но нельзя утверждать, что для объекта, стоящего на третьем месте в упорядочении, интенсивность изучаемой характеристики равна сумме интенсивностей объектов с рангами 1 и 2. Так, один из видов экспертного оценивания — оценки учащихся. Вряд ли кто-либо будет утверждать, что знания отличника равны сумме знаний двоечника и троечника (хотя 5 = 2 + 3), хорошист соответствует двум двоечникам (2 + 2 = 4), а между отличником и троечником такая же разница, как между хорошистом и двоечником (5 – 3 = 4 – 2). Поэтому очевидно, что для анализа подобного рода качественных данных необходима не всем известная арифметика, а другая теория, дающая базу для разработки, изучения и применения конкретных методов расчета. Это и есть ТИ.

При чтении литературы надо иметь в виду, что в настоящее время термин «теория измерений» применяется для обозначения целого ряда научных дисциплин. А именно классической метрологии (науки об измерениях физических величин), рассматриваемой здесь ТИ, некоторых других направлений, например алгоритмической теории измерений. Обычно из контекста понятно, о какой конкретно теории идет речь.

Краткая история теории измерений. Сначала ТИ развивалась как теория психофизических измерений. В послевоенных публикациях американский психолог С.С. Стивенс основное внимание уделял шкалам измерения. Во второй половине XX в. сфера применения ТИ стремительно расширяется. Посмотрим, как это происходило.

Один из томов выпущенной в США в 1950-х гг. «Энциклопедии психологических наук» назывался «Психологические измерения». Значит, составители этого тома расширили сферу применения ТИ с психофизики на психологию в целом. А в основной статье в этом сборнике под названием, обратите внимание, «Основы теории измерений» изложение шло на абстрактно-математическом уровне, без привязки к какой-либо конкретной области применения. В этой статье [8] упор был сделан на «гомоморфизмы эмпирических систем с отношениями в числовые» (в эти математические термины здесь вдаваться нет необходимости), и математическая сложность изложения заметно возросла по сравнению с работами С.С. Стивенса.

Уже в одной из первых отечественных статей по ТИ (конец 1960-х гг.) было установлено, что баллы, присваиваемые экспертами при оценке объектов экспертизы, как правило, измерены в порядковой шкале. Отечественные работы, появившиеся в начале 1970-х гг., привели к существенному расширению области использования ТИ. Ее применяли в педагогической квалиметрии (посвящена измерению качества знаний учащихся), в системных исследованиях, в различных задачах теории экспертных оценок, для агрегирования показателей качества продукции, при планировании и обработке данных социологических опросов и др.

Итоги этого этапа были подведены в монографии [9]. В качестве двух основных проблем ТИ наряду с установлением типа шкалы измерения конкретных данных был выдвинут поиск алгоритмов анализа данных, результат работы которых не меняется при любом допустимом преобразовании шкалы (т. е. является инвариантным относительно этого преобразования).

Метрологи вначале (в 1970-х гг.) резко возражали против использования термина «измерение» для качественных признаков (т. е. измеренных в номинальных и порядковых шкалах). Однако постепенно возражения сошли на нет, и к концу XX в. ТИ стала рассматриваться как общенаучная теория.

Необходимость и практическую полезность использования ТИ в организационно-экономическом моделировании рассмотрим, в частности, в связи с теорией и практикой экспертного оценивания, а именно с агрегированием мнений экспертов, построением обобщенных показателей и рейтингов.

Рассмотрим основные идеи теории измерений.

Шесть основных типов шкал. В соответствии с ТИ при математическом моделировании реального явления или процесса следует прежде всего установить типы шкал, в которых измерены те или иные переменные. Тип шкалы задает группу допустимых преобразований шкалы. Допустимые преобразования не меняют объективно существующих соотношений между объектами измерения.

Например, при измерении длины переход от аршин к метрам (допустимое преобразование шкалы) не меняются соотношения между длинами рассматриваемых объектов: если первый объект длиннее второго, то это будет установлено и при измерении в аршинах, и при измерении в метрах. Если первый длиннее второго в 5 раз при измерении в дюймах, то и при измерении в саженях первый длиннее второго ровно в 5 раз. Обратите внимание, что при этом численное значение длины в аршинах отличается от численных значений длины в метрах, дюймах и саженях: не меняется лишь результат сравнения длин двух объектов и отношение длин.

Укажем основные виды шкал измерения и соответствующие группы допустимых преобразований.

В ***шкале наименований*** (другое название этой шкалы — номинальная; это термин на основе латыни; иногда называют также классификационной шкалой) допустимыми являются все взаимно однозначные преобразования. В этой шкале числа используются лишь как метки. Примерно так же, как при сдаче белья в прачечную, т. е. лишь для различения объектов. В шкале наименований измерены, например, номера телефонов, автомашин, паспортов, студенческих билетов. Номера страховых свидетельств государственного пенсионного страхования, медицинского страхования, штрихкоды товаров, ИНН (индивидуальные номера налогоплательщиков) измерены в шкале наименований. В этой шкале измерены и многие иные величины, с формальной точки зрения выраженные числами.

Пол людей тоже измерен в шкале наименований, результат измерения принимает два значения — мужской, женский. Раса, национальность, цвет глаз, волос — номинальные признаки. Номера букв в алфавите — тоже измерения в шкале наименований. Никому в здравом уме не придет в голову складывать или умножать ИНН или номера паспортов, такие операции не имеют смысла. Сравнивать буквы и говорить, например, что буква «П» лучше буквы «С», также никто не будет. Единственное, для чего годятся измерения в шкале наименований, — это различать объекты. Во многих случаях только это от них и требуется. Например, шкафчики в раздевалках для взрослых различают по номерам, т. е. числам, а в детских садах используют рисунки, поскольку дети еще не знают чисел.

Итак, наиболее простой способ использования чисел — применять их для различения объектов. Например, телефонные номера нужны для того, чтобы отличать одного абонента от другого. При таком способе измерения используется только одно отношение между числами — равенство (два объекта описываются либо равными числами, либо различными). С прикладной точки зрения шкала измерения — это способ приписывания чисел рассматриваемым объектам, соответствующий имеющимся между объектами отношениям. Шкалы наименований соответствуют эмпирическим системам, в которых есть только одно отношение — равенства (эквивалентности) элементов этих систем.

Отметим, что числа могут быть приписаны объектам разными способами. Переход от одного способа к другому наблюдаем при замене паспортов или телефонных номеров. Каковы свойства допустимых преобразований? Для шкалы наименований естественно потребовать только взаимной однозначности. Другими словами, применив к результатам измерений взаимно однозначное преобразование, получаем новую шкалу, столь же хорошо описывающую систему исходных объектов, как и прежняя шкала.

Допустимые преобразования проводятся время от времени в реальной жизни, например при замене телефонных номеров или паспортов. При этом каждому прежнему телефонному номеру соответствует один и только один новый. Не допускается, чтобы два прежних номера «слились» в одном новом или чтобы из одного прежнего получилось два новых. Это и означает, что преобразование является взаимно однозначным.

В ***порядковой шкале*** числа используются не только для различения объектов, но и для установления порядка между объектами. Простейшим примером являются оценки знаний учащихся. Символично, что в средней школе применяются оценки 2, 3, 4, 5, а в высшей школе ровно тот же смысл выражается словесно: известными всем терминами «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично». Этим подчеркивается «нечисловой» характер оценок знаний учащихся. Ведь фактически преподаватель относит учащихся к одной из четырех упорядоченных категорий, а обозначения этих категорий используются лишь для удобства управления образовательным процессом.

Порядковые шкалы соответствуют эмпирическим системам, в которых, кроме отношения равенства (эквивалентности) элементов, есть отношение (нестрогого) порядка между элементами этих систем. Известно, что в таком случае элементы эмпирической системы можно разбить на классы эквивалентности, между которыми имеется отношение строгого линейного порядка [9].

В порядковой шкале допустимыми являются все строго возрастающие преобразования. Так, автор настоящего учебника при участии в российско-французском образовательном проекте пользовался наряду с российской и традиционной французской шкалой оценок, в которой знания учащихся оцениваются числами от 1 до 20. Приходилось постоянно осуществлять преобразования, в которых оценка «неудовлетворительно» переходила, например, в 8, «удовлетворительно» — в 12, «хорошо» — в 15, «отлично» — в 18. (Французская шкала оценок позволяла дать численное выражение и дополнительным вариантам оценок, например «четыре с плюсом» — это 16, а «три с двумя минусами» — это 10.)

Установление типа шкалы, т. е. задания группы допустимых преобразований шкалы измерения, — дело специалистов соответствующей прикладной области. Так, оценки привлекательности профессий мы в монографии [9], выступая в качестве социологов, считали измеренными в порядковой шкале. Однако отдельные социологи не соглашались с нами, полагая, что выпускники школ пользуются шкалой с более узкой группой допустимых преобразований, например интервальной шкалой. Очевидно, эта проблема относится не к математике, а к наукам о человеке. Для ее решения может быть поставлен достаточно трудоемкий эксперимент. Например, можно предложить каждому опрашиваемому ставить оценки одновременно по двум шкалам, а затем изучить соотношения между выставленными оценками и выявить вид реально используемых преобразований. Пока же подобный эксперимент не поставлен, целесообразно принимать порядковую шкалу, так как такое решение гарантирует защиту от возможных ошибок при анализе данных и получении выводов.

Оценки экспертов, как уже отмечалось, часто следует считать измеренными в порядковой шкале. Типичным примером являются задачи ранжирования и классификации промышленных объектов, подлежащих экологическому страхованию.

Почему мнения экспертов естественно выражать именно в порядковой шкале? Как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного, например сравнительного, характера, чем количественного. Так, ему легче сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах.

В различных областях человеческой деятельности применяется много других видов порядковых шкал. Так, например, в минералогии используется шкала Мооса, по которой минералы классифицируются согласно критерию твердости. А именно: тальк имеет балл 1, гипс — 2, кальций — 3, флюорит — 4, апатит — 5, ортоклаз — 6, кварц — 7, топаз — 8, корунд — 9, алмаз — 10. Минерал с большим номером является более твердым, чем минерал с меньшим номером, при нажатии царапает его.

Порядковыми шкалами в географии являются бофортова шкала ветров («штиль», «слабый ветер», «умеренный ветер» и т. д.), шкала силы землетрясений. Очевидно, нельзя утверждать, что землетрясение в 2 балла (лампа, висящая на шнуре, качнулась под потолком — такое бывает и в Москве) ровно в 5 раз слабее, чем землетрясение в 10 баллов (полное разрушение всего на поверхности земли).

В медицине порядковыми шкалами являются шкала стадий гипертонической болезни (по Мясникову), шкала степеней сердечной недостаточности (по Стражеско — Василенко — Лангу), шкала степени выраженности коронарной недостаточности (по Фогельсону) и т. д. Все эти шкалы построены по схеме: заболевание не обнаружено; первая стадия заболевания; вторая стадия; третья стадия. Иногда выделяют стадии 1а, 1б и др. Каждая стадия имеет свойственную только ей медицинскую характеристику. При описании групп инвалидности числа иногда используются в противоположном порядке: самая тяжелая — первая группа инвалидности, затем — вторая, самая легкая — третья.

Номера домов также измерены в порядковой шкале: они показывают, в каком порядке стоят дома вдоль улицы. Номера томов в собрании сочинений писателя или номера дел в архиве предприятия обычно связаны с хронологическим порядком их создания.

При оценке качества продукции и услуг в так называемой квалиметрии (буквальный перевод — измерение качества) популярны порядковые шкалы. А именно, единица продукции оценивается как годная или негодная. При более тщательном анализе используется шкала с тремя градациями: есть значительные дефекты — присутствуют только незначительные дефекты — нет дефектов. Иногда применяют четыре градации: имеются критические дефекты (делающие невозможным использование контролируемой единицы продукции) — есть значительные дефекты — присутствуют только незначительные дефекты — нет дефектов. Аналогичный смысл имеет сортность продукции: высший сорт, первый сорт, второй сорт и т. д.

При оценке экологических воздействий первая, наиболее обобщенная оценка обычно порядковая, например: природная среда стабильна — природная среда угнетена (деградирует). Аналогично в эколого-медицинской шкале: нет выраженного воздействия на здоровье людей — отмечается отрицательное воздействие на здоровье.

Все шкалы измерения делят на две группы: шкалы качественных признаков и шкалы количественных признаков.

Порядковая шкала и шкала наименований — основные шкалы *качественных признаков*. Поэтому во многих конкретных областях результаты качест-венного анализа можно рассматривать как измерения по этим шкалам.

Шкалы *количественных признаков* — это шкалы интервалов, отношений, разностей, абсолютная. В них к отношениям равенства и порядка добавляются отношения, связанные с наличием единицы измерения и начала отсчета.

По ***шкале интервалов*** измеряют величину потенциальной энергии, координату точки на прямой (а также координаты точки на плоскости или в пространстве), географическую долготу (отсчитываемую в настоящее время от произвольно выбранного меридиана Гринвичской обсерватории в Великобритании), температуру по Цельсию, Фаренгейту или Реомюру. Во всех этих случаях на шкале нельзя отметить ни естественное начало отсчета, ни естественную единицу измерения. Исследователь должен сам задать точку отсчета и сам выбрать единицу измерения. Часто путем соглашения договариваются о выборе определенной единицы измерения, фиксируют начало отсчета, но произвольность подобного договора очевидна (например, в случае географической долготы).

Допустимыми преобразованиями в шкале интервалов являются линейные возрастающие преобразования, т. е. линейные функции. Температурные шкалы Цельсия и Фаренгейта связаны именно такой зависимостью:

$$°C = 5/9(°F - 32), \tag{6.1}$$

где °C — температура (в градусах) по шкале Цельсия, а °F — температура по шкале Фаренгейта.

При допустимых преобразованиях в шкале интервалов сохраняется отношение длин интервалов:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{\varphi(x_3) - \varphi(x_4)} \tag{6.2}$$

для любых чисел x_1, x_2, x_3, x_4 (результатов измерений) и любого допустимого преобразования $\varphi(x) = ax + b$, $a > 0$. Верно и обратное: если равенство (6.2) справедливо для любых чисел x_1, x_2, x_3, x_4, то $\varphi(x) = ax + b$, $a > 0$ при некоторых значениях коэффициентов a и b.

Из количественных шкал наиболее распространенными в науке и практике являются ***шкалы отношений***. В них есть естественное начало отсчета — нуль, т. е. отсутствие величины, но нет естественной единицы измерения. По шкале отношений измерены большинство физических единиц: масса тела, длина, работа, мощность, заряд, напряжение, а также цены в экономике. Допустимыми преобразованиями в шкале отношений являются подобные (изменяющие только масштаб). Другими словами, линейные возрастающие преобразования без свободного члена. Примером является пересчет цен из одной валюты в другую по фиксированному курсу.

При допустимых преобразованиях в шкале отношений сохраняется отношение измеряемых величин:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \tag{6.3}$$

для любых чисел x_1 и x_2 (результатов измерений) и любого допустимого преобразования $\varphi(x) = ax$, $a > 0$. Верно и обратное: если равенство (6.3) справедливо для любых чисел x_1 и x_2, то $\varphi(x) = ax$, $a > 0$ при некотором значении коэффициента a.

Предположим, мы сравниваем экономическую эффективность двух инвестиционных проектов, используя цены в рублях. Пусть первый проект оказался лучше второго. Теперь перейдем на валюту самой экономически мощной державы мира — юани, используя фиксированный курс пересчета. (В эконометрике [3] с помощью расчетов на основе паритета покупательной способности установлено, что в настоящее время валовой внутренний продукт Китая больше, чем у какой-либо иной страны, в частности больше, чем у Европейского союза (второе место) и США (третье место) — см. гл. 4 выше.) Очевидно, первый проект должен опять оказаться более выгодным, чем второй. Это ясно из общих экономических соображений. Однако алгоритмы расчета не обеспечивают автоматически выполнения этого очевидного условия. Надо проверять, что оно выполнено. Результаты подобной проверки для средних величин описаны ниже. Оказалось, что нельзя произвольно выбирать вид средних величин, необходимо согласовывать вид средней со шкалами измерения.

В ***шкале разностей*** есть естественная единица измерения, но нет естественного начала отсчета. Допустимыми преобразованиями в шкале разностей являются сдвиги. Время измеряется по шкале разностей, если год (или сутки — от полудня до полудня) принимаем естественной единицей измерения, и по шкале интервалов в общем случае. На современном уровне знаний естественное начало отсчета времени указать нельзя. Дату сотворения мира различные авторы рассчитывают по-разному, равно как и момент рождества Христова. Так, согласно новой статистической хронологии [10], разработанной группой известного историка, академика РАН А.Т. Фоменко, Господь Иисус Христос родился примерно в 1054 г. по принятому ныне летоисчислению в Стамбуле (он же — Царьград, Византия, Троя, Иерусалим, Рим). Позже те же исследователи обосновали несколько иную дату — 1152 год н.э. [11].

При допустимых преобразованиях в шкале разностей сохраняется разность измеряемых величин:

$$x_1 - x_2 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \qquad (6.4)$$

для любых чисел x_1 и x_2 (результатов измерений) и любого допустимого преобразования $\varphi(x) = x + b$. Верно и обратное: если равенство (6.4) справедливо для любых чисел x_1 и x_2, то $\varphi(x) = x + b$ при некотором значении коэффициента сдвига b.

Только для ***абсолютной шкалы*** результаты измерений — числа в обычном смысле слова. Примером является число людей в комнате. Начало отсчета фиксировано — никого нет в комнате. Единица измерения — один человек. Для абсолютной шкалы допустимым является только тождественное преобразование.

Шесть рассмотренных нами основных типов шкал измерения описаны в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Основные шкалы измерения

Тип шкалы	**Определение шкалы**	**Примеры**	**Группа допустимых преобразований $\Phi = \{\varphi\}$**
Шкалы качественных признаков			
Наименований	Числа используют для различения объектов	Номера телефонов, паспортов, ИНН, штрихкоды	Все взаимно однозначные преобразования
Порядковая	Числа используют для упорядочения объектов	Оценки экспертов, баллы ветров, отметки в школе, полезность, номера домов	Все строго возрастающие преобразования
Шкалы количественных признаков (описываются началом отсчета и единицей измерения)			
Интервалов	Начало отсчета и единица измерения произвольны	Потенциальная энергия, положение точки, температура по шкалам Цельсия и Фаренгейта	Все линейные преобразования $\varphi(x) = ax + b$, a и b произвольны, $a > 0$ (см. (6.1))

Тип шкалы	Определение шкалы	Примеры	Группа допустимых преобразований $\Phi = \{\varphi\}$
Отно-шений	Начало отсчета задано, единица измерения произвольна	Масса, длина, мощность, напряжение, сопротивление, температура по Кельвину, цены	Все подобные преобразования $\varphi(x) = ax$, a произвольно, $a > 0$
Разно-стей	Начало отсчета произвольно, единица измерения задана	Время	Все преобразования сдвига $\varphi(x) = x + b$, b произвольно
Абсо-лютная	Начало отсчета и единица измерения заданы	Число людей в данном помещении	Только тождественное преобразование $\varphi(x) = x$

Кроме перечисленных в табл. 6.1, используют и иные типы шкал [4, 12]. Отметим, что в табл. 6.1 выражение «единица измерения произвольна» означает, что она может быть выбрана по соглашению специалистов, но не вытекает из каких-либо фундаментальных соотношений. При измерении времени естественная единица измерения задается периодами обращения небесных тел, поэтому считаем, что время измерено в шкале разностей. Начало отсчета при измерении длины задается длиной отрезка, у которого начало и конец совпадают, и т. д.

В настоящее время считается необходимым перед применением тех или иных алгоритмов анализа данных установить, в шкалах каких типов измерены рассматриваемые величины. Отметим, что в процессе развития соответствующей области знания тип шкалы измерения конкретной величины может меняться. Так, сначала температура измерялась по *порядковой шкале* (холоднее — теплее), затем — по *интервальной* (использовались шкалы Цельсия, Фаренгейта, Реомюра). Так, температура °C по шкале Цельсия выражается через температуру °F по шкале Фаренгейта с помощью линейного преобразования (6.1). Наконец, после открытия абсолютного нуля температуру можно считать измеренной по *шкале отношений* (шкала Кельвина). Надо отметить, что среди специалистов иногда имеются разногласия по поводу того, по каким шкалам следует считать измеренными те или иные реальные величины. Другими словами, процесс измерения включает в себя как необходимый этап и определение типа шкалы (вместе с обоснованием выбора определенного типа шкалы).

6.2. ИНВАРИАНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ И СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Основное требование к алгоритмам анализа данных формулируется в ТИ так: выводы, сделанные на основе данных, измеренных в шкале определенного типа, не должны меняться при допустимом преобразовании шкалы измерения этих данных. Другими словами, выводы должны быть инвариантны по отношению к допустимым преобразованиям шкалы.

Требование инвариантности (адекватности) выводов. Выяснение типов используемых шкал необходимо для адекватного выбора методов анализа данных. Основополагающим требованием является независимость выводов от того, какой именно шкалой измерения воспользовался исследователь (среди всех шкал, переходящих друг в друга при допустимых преобразованиях). Например, если речь о длинах, то выводы не должны зависеть от того, измерены ли длины в метрах, аршинах, саженях, футах или дюймах.

Таким образом, одна из основных целей теории измерений — борьба с субъективизмом исследователя при приписывании численных значений реальным объектам. Так, расстояния можно измерять в аршинах, метрах, микронах, милях, парсеках и других единицах измерения. Массу (вес) — в пудах, килограммах, фунтах и др. Цены на товары и услуги можно указывать в юанях, рублях, тенге, гривнах, латах, кронах, марках, долларах США и других валютах (при условии заданных фиксированных курсов пересчета). Подчеркнем очень важное, хотя и вполне очевидное обстоятельство: выбор единиц измерения зависит от исследователя, т. е. субъективен. Выводы могут быть адекватны реальности только тогда, когда они не зависят от того, какую единицу измерения предпочтет исследователь, т. е. когда они инвариантны относительно допустимого преобразования шкалы. Очевидно, что при разработке управленческих решений можно опираться только на инвариантные выводы.

Другими словами, выводы должны быть инвариантны относительно группы допустимых преобразований шкалы измерения. Только тогда их можно назвать адекватными, т. е. избавленными от субъективизма исследователя, выбирающего определенную шкалу из множества шкал заданного типа, связанных допустимыми преобразованиями. Иногда используют несколько иную терминологию. В статье [12] требование инвариантности (адекватности) выводов формулируется как условие «содержательности» («состоятельности») высказывания.

Требование инвариантности выводов накладывает ограничения на множество возможных алгоритмов анализа данных. В качестве примера рассмотрим порядковую шкалу. Одни алгоритмы анализа данных позволяют получать адекватные выводы, другие — нет. Например, в задаче проверки однородности двух независимых выборок алгоритмы ранговой статистики (т. е. использующие только ранги результатов измерений) дают адекватные выводы, а статистики Крамера — Уэлча и Стьюдента — нет. Значит, для обработки данных, измеренных в порядковой шкале, критерии Смирнова, Лемана — Розенблатта и Вилкоксона можно использовать, а критерии Крамера — Уэлча и Стьюдента — нет [3].

Оказывается, требование инвариантности является достаточно сильным. Из многих алгоритмов анализа статистических данных ему удовлетворяют лишь некоторые. Покажем это на примере сравнения средних величин.

Средние величины. Среди всех методов анализа данных важное место занимают алгоритмы усреднения. Еще в 1970-х гг. удалось полностью выяснить, какими видами средних можно пользоваться при анализе данных, измеренных в тех или иных шкалах.

Пусть X_1, X_2, …, X_n — выборка объема n. Часто используют *среднее арифметическое*:

$$\overline{X} = X_{ñð} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}.$$

Применение среднего арифметического настолько привычно, что второе слово в термине часто опускают и говорят о средней зарплате, среднем доходе и других средних для конкретных экономических данных, подразумевая под «средним» среднее арифметическое. Такая традиция может приводить к ошибочным выводам. Покажем это на примере расчета средней заработной платы (среднего дохода) работников условного предприятия (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Численность работников различных категорий, их заработная плата и доходы (в условных единицах)

№ п/п	Категория работников	Число работников	Заработная плата	Суммарные доходы
1	Низкоквалифицированные рабочие	40	100	4 000
2	Высококвалифицированные рабочие	30	200	6 000
3	Инженеры и служащие	25	300	7 500
4	Менеджеры	4	1 000	4 000
5	Генеральный директор (владелец)	1	18 500	18 500
6	Всего	100	–	40 000

Первые три строки в табл. 6.2 вряд ли требуют пояснений. В четвертой строке менеджеры — это директора по направлениям, а именно по производству (главный инженер или технический директор), по финансам (главный бухгалтер или финансовый директор), по маркетингу и сбыту, по персоналу (по кадрам). Владелец сам руководит предприятием в качестве генерального директора. В столбце «заработная плата» указаны доходы одного работника соответствующей категории, а в столбце «суммарные доходы» — доходы всех работников соответствующей категории.

Фонд оплаты труда составляет 40 000 единиц, работников всего 100, следовательно, средняя заработная плата составляет 40 000 / 100 = 400 единиц. Однако эта средняя арифметическая величина явно не соответствует интуитивному представлению о «средней зарплате». Из 100 работников лишь 5 имеют заработную плату, ее превышающую, а зарплата остальных 95 существенно меньше средней арифметической. Причина очевидна: заработная плата одного человека — генерального директора — превышает заработную плату 95 работников — низкоквалифицированных и высококвалифицированных рабочих, инженеров и служащих, вместе взятых.

Ситуация напоминает описанную в известном рассказе о больнице, в которой 10 больных, из них у 9 температура 40 °С, а один уже отмучился, лежит в морге с температурой 0 °С. Между тем средняя температура по больнице равна 36 °С — лучше не бывает!

Из сказанного ясно, что не всегда целесообразно использовать среднее арифметическое. Его можно порекомендовать лишь для достаточно однородных совокупностей (без больших выбросов в ту или иную сторону).

А какие средние стоит применять для описания заработной платы? Вполне естественно использовать *медиану*. Для данных табл. 6.2 медиана — среднее арифметическое 50-го и 51-го работника, если их заработные платы расположены в порядке неубывания. Сначала идут зарплаты 40 низкоквалифицированных рабочих, а затем — с 41-го до 70-го работника — заработные платы высококвалифицированных рабочих. Следовательно, медиана попадает именно на них и равна 200. У 50 работников заработная плата не превосходит 200 и у 50 — не менее 200, поэтому медиана показывает «центр», около которого группируется основная масса исследуемых величин.

Еще одна средняя величина — *мода*, наиболее часто встречающееся значение. В рассматриваемом случае это заработная плата низкоквалифицированных рабочих, т. е. 100. Таким образом, для описания зарплаты имеем три средние величины: моду (100 единиц), медиану (200 единиц) и среднее арифметическое (400 единиц). Для наблюдающихся в реальной экономике распределений доходов и заработной платы справедлива та же закономерность: мода меньше медианы, а медиана меньше среднего арифметического.

Для чего при разработке управленческих решений [13, 14] используются средние величины? Обычно для того, чтобы заменить совокупность чисел одним числом, чтобы сравнивать совокупности с помощью средних.

Пусть, например, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — совокупность оценок n экспертов, «выставленных» одному объекту экспертизы (например, одному из вариантов стратегического развития фирмы), $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ — второму (другому варианту такого развития). Как сравнивать эти совокупности? Очевидно, самый простой способ — по средним значениям.

А как вычислять средние? Известны различные виды средних величин: среднее арифметическое, медиана, мода, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратическое. Общее понятие средней величины введено французским математиком первой половины XIX в. академиком Огюстеном Луи Коши (1789–1857). Оно таково: **средней величиной** является любая функция $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, такая, что при всех возможных значениях аргументов значение этой функции не меньше, чем минимальное из чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$, и не больше, чем максимальное из этих чисел. Все перечисленные выше виды средних величин являются *средними по Коши*.

При допустимом преобразовании шкалы значение средней величины, очевидно, меняется. Но выводы о том, для какой совокупности среднее больше, а для какой — меньше, не должны меняться (в соответствии с условием инвариантности выводов, принятым как основное требование в ТИ). Сформулируем соответствующую математическую задачу поиска вида средних величин, результат сравнения которых устойчив относительно допустимых преобразований шкалы.

Пусть $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — среднее по Коши. Пусть среднее по первой совокупности меньше среднего по второй совокупности:

$$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) < f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n).$$

Тогда согласно ТИ для устойчивости результата сравнения средних необходимо, чтобы для любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований в соответствующей шкале было справедливо также неравенство:

$$f(g(Y_1), g(Y_2), \ldots, g(Y_n)) < f(g(Z_1), g(Z_2), \ldots, g(Z_n)),$$

т. е. среднее преобразованных значений из первой совокупности также было меньше среднего преобразованных значений для второй совокупности. Причем сформулированное условие должно быть выполнено для любых двух совокупностей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ и $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ и, напомним, любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований, задающей шкалу.

Средние величины, удовлетворяющие сформулированному условию, назовем *допустимыми* (в соответствующей шкале). Согласно ТИ только допустимыми средними величинами можно пользоваться при анализе мнений экспертов и иных данных, измеренных в рассматриваемой шкале.

С помощью математической теории, развитой в монографии [9] и статье [15], удается описать вид допустимых средних величин в основных шкалах. Сразу ясно, что для данных, измеренных в шкале наименований, допустимых средних нет, поскольку допустимые в этой шкале преобразования — а ими являются все взаимно однозначные преобразования — могут как угодно перемешать значения усредняемых величин.

6.3. СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ В ПОРЯДКОВОЙ ШКАЛЕ

Рассмотрим сначала обработку мнений экспертов, измеренных в порядковой шкале. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. Из всех непрерывных средних по Коши допустимыми средними в порядковой шкале являются только члены вариационного ряда (порядковые статистики).

Теорема 6.1, впервые полученная в статье [16], справедлива при условии, что средняя величина $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ является непрерывной (по совокупности переменных) и симметрической функцией. Последнее означает, что при перестановке аргументов значение функции $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ не меняется. Это условие является вполне естественным, ибо среднюю величину находим для совокупности (набора, множества) чисел, а не для последовательности. Множество не меняется в зависимости от того, в какой последовательности мы перечисляем его элементы. Если не требовать непрерывности функции $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, то множество допустимых средних в порядковой шкале расширяется: в него, например, входит мода.

Согласно теореме 6.1 в качестве среднего для данных, измеренных в порядковой шкале, можно использовать, в частности, медиану (при нечетном объеме выборки). При четном же объеме целесообразно применять один из двух центральных членов вариационного ряда — как их иногда называют, левую медиану или правую медиану (ясно, что при достаточно большом объеме выборки эти величины различаются мало). Моду тоже можно использовать: она всегда является членом вариационного ряда. Можно применять выборочные квартили, минимум и максимум, децили и т. п. Но теорема 6.1 запрещает использовать при анализе порядковых данных (т. е. измеренных в порядковой шкале) среднее арифметическое, среднее геометрическое и т. д. Таким образом, не рекомендуется разрабатывать управленческое решение на основе среднего арифметического или среднего геометрического мнений экспертов, поскольку такие мнения, как разъяснено выше, обычно измерены в порядковой шкале.

Приведем численный пример, показывающий некорректность использования среднего арифметического $f(X_1, X_2) = (X_1 + X_2) / 2$ в порядковой шкале. Пусть $Y_1 = 1$, $Y_2 = 11$, $Z_1 = 6$, $Z_2 = 8$. Тогда $f(Y_1, Y_2) = 6$, что меньше, чем $f(Z_1, Z_2) = 7$. Пусть строго возрастающее преобразование g таково, что $g(1) = 1$, $g(6) = 6$, $g(8) = 8$, $g(11) = 99$. Таких преобразований много. Например, можно положить $g(x) = x$ для x, не превосходящих 8, и $g(x) = 99(x - 8) / 3 + 8$ для x, больших 8. Тогда $f(g(Y_1), g(Y_2)) = 50$, что больше, чем $f(g(Z_1), g(Z_2)) = 7$. Как видим, в результате допустимого, т. е. строго возрастающего, преобразования шкалы упорядоченность средних величин изменилась. Таков же результат применения допустимого преобразования $g(x) = x^2$. Тогда $g(1) = 1$, $g(6) = 36$, $g(8) = 64$, $g(11) = 121$, а потому $f(g(Y_1), g(Y_2)) = 61$, что больше, чем $f(g(Z_1), g(Z_2)) = 50$.

Таким образом, теория измерений выносит жесткий приговор среднему арифметическому: использовать его в порядковой шкале нельзя. Однако же те, кто не знает теории измерений, используют его. Всегда ли они ошибаются? Оказывается, можно в какой-то мере (но отнюдь не полностью!) реабилитировать среднее арифметическое, если перейти к вероятностной постановке и к тому же удовлетвориться результатами для больших объемов выборок. В монографии [9], кроме теоремы 6.1, доказано также следующее утверждение.

Теорема 6.2. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, а $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $H(x)$, причем выборки $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ и $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ независимы между собой и $MY_1 > MZ_1$. Для того чтобы вероятность события

$$\left\{\omega : \frac{g(Y_1) + g(Y_2) + \ldots + g(Y_m)}{m} > \frac{g(Z_1) + g(Z_2) + \ldots + g(Z_n)}{n}\right\}$$

стремилась к 1 при $\min(m, n) \to \infty$ для любой строго возрастающей непрерывной функции g, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\left|\frac{g(x)}{x}\right| < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех x выполнялось неравенство $F(x) \le H(x)$, причем существовало число x_0, для которого $F(x_0) < H(x_0)$.

Примечание. Условие с верхним пределом носит чисто внутриматематический характер. Фактически функция g — произвольное допустимое преобразование в порядковой шкале.

Согласно теореме 6.2 средним арифметическим допустимо пользоваться и в порядковой шкале, если сравниваются выборки из двух распределений, удовлетворяющих приведенному в теореме неравенству. Проще говоря, одна из функций распределения должна всегда лежать над другой. Функции распределения не могут пересекаться, им разрешается только касаться друг друга. Это условие выполнено, например, если функции распределения отличаются только сдвигом, т. е.

$$F(x) = H(x + b)$$

при некотором b. Последнее условие выполняется, если два значения некоторой величины измеряются с помощью одного и того же средства измерения, у которого распределение погрешностей не меняется при переходе от измерения одного значения рассматриваемой величины к измерению другого.

6.4. СРЕДНИЕ ПО КОЛМОГОРОВУ

Естественная система аксиом (требований к средним величинам) приводит к так называемым ассоциативным средним. Их общий вид нашел в 1930 г. А.Н. Колмогоров [17]. Теперь их называют средними по Колмогорову (иногда средними Колмогорова).

Для чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$ средним по Колмогорову является

$$G\{(F(X_1) + F(X_2) + \ldots + F(X_n)) / n\},$$

где F — строго монотонная функция (т. е. строго возрастающая или строго убывающая); G — функция, обратная к F.

Среди средних по Колмогорову много хорошо известных персонажей. Так, если $F(x) = x$, то среднее по Колмогорову — это среднее арифметическое, если $F(x) = \ln x$, то среднее геометрическое, если $F(x) = 1 / x$, то среднее гармоническое, если $F(x) = x^2$, то среднее квадратическое и т. д. (в последних трех случаях усредняются положительные величины).

Средние по Колмогорову — частный случай средних по Коши. С другой стороны, такие популярные средние, как медиана и мода, нельзя представить в виде средних по Колмогорову.

В статье [18] впервые доказаны следующие утверждения.

Теорема 6.3. В шкале интервалов из всех средних по Колмогорову допустимым является только среднее арифметическое (при справедливости некоторых слабых внутриматематических условий регулярности).

Таким образом, среднее геометрическое или среднее квадратическое температур (в шкале Цельсия), потенциальных энергий или координат точек не имеют смысла. В качестве среднего надо применять среднее арифметическое. А также можно использовать медиану или моду: они не входят в число средних по Колмогорову.

Теорема 6.4. В шкале отношений из всех средних по Колмогорову допустимыми являются только степенные средние с $F(x) = x^c$, $c \neq 0$, и среднее геометрическое (при справедливости некоторых слабых внутриматематических условий регулярности).

Есть ли средние по Колмогорову, которыми нельзя пользоваться в шкале отношений? Конечно, есть. Например, с $F(x) = e^x$.

Замечание 1. Среднее геометрическое является пределом степенных средних при $c \to 0$.

Замечание 2. Подробное описание «внутриматематических условий регулярности», упомянутых в формулировках теорем 6.3 и 6.4, можно найти в [9, 19]. Доказательства теорем 6.1–6.4 приведены в монографии [9]. Их обобщение на случай взвешенных средних дано в статье [19] (заключения теорем при этом не меняются). Полные доказательства опубликованы в [15].

Аналогично средним величинам могут быть изучены и другие статистические характеристики: показатели разброса, связи, расстояния и др. (см., например, [4, 9]). Нетрудно показать, например, что коэффициент корреляции не меняется при любом допустимом преобразовании в шкале интервалов, как и отношение дисперсий. Дисперсия не меняется в шкале разностей, коэффициент вариации — в шкале отношений и т. д. Ранговые статистики не меняются при допустимых преобразованиях в порядковой шкале (например, статистики Вилкоксона, Лемана — Розенблатта, рассмотренные в гл. 2).

Приведенные выше результаты о средних величинах широко применяются, причем не только в экспертных исследованиях, но и в теории принятия решений, экономике, менеджменте, социологии, медицине, инженерном деле. Например, для анализа методов агрегирования датчиков в АСУ ТП (автоматизированных системах управления технологическими процессами) доменных печей. Велико прикладное значение теории измерений в задачах стандартизации и управления качеством, в частности в квалиметрии [16, 20]. Обзор [12] посвящен анализу многочисленных работ последних десятилетий о связи теории измерений и теории средних величин.

При подготовке и принятии управленческих, инженерных, технико-экономических и иных решений необходимо использовать только инвариантные алгоритмы обработки данных. В настоящей главе показано, что требование инвариантности выделяет из многих алгоритмов усреднения лишь некоторые, соответствующие используемым шкалам измерения. Инвариантные алгоритмы в общем случае рассматриваются в математической теории измерений [21]. Нацеленное на прикладные исследования изложение ряда вопросов теории измерений дается в монографиях [3, 4, 9, 22, 23].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков, Д.А.* Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи) / Д.А. Новиков. — Москва : МЗ-Пресс, 2004. — 67 с.

2. *Новиков, Д.А.* Статистические методы в медико-биологическом эксперименте (типовые случаи) / Д.А. Новиков, В.В. Новочадов. — Волгоград : Изд-во ВолГМУ, 2005. — 87 с.

3. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Саратов : ИНТУИТ : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 676 с.

4. *Толстова, Ю.Н.* Измерение в социологии / Ю.Н. Толстова. — Москва : Инфра-М, 1998. — 352 с.

5. *Орлов, А.И.* Статистика нечисловых данных за сорок лет (обзор) / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2019. — Т. 85. — № 11. — С. 69–84.

6. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: нечисловая статистика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 446 с.

7. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

8. *Суппес, П.* Основы теории измерений / П. Суппес, Дж. Зинес // Психологические измерения. — Москва : Мир, 1967. — С. 9–110.

9. *Орлов, А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях / А.И. Орлов. — Москва : Наука, 1979. — 296 с.

10. *Носовский, Г.В.* Империя. Русь, Турция, Китай, Европа, Египет. Новая математическая хронология древности / Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко. — Москва : Факториал, 1996. — 752 с.

11. *Носовский, Г.В.* Царь славян / Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко. — Санкт-Петербург : Нева, 2004. — 564 с.

12. *Барский, Б.В.* Средние величины, инвариантные относительно допустимых преобразований шкалы измерения / Б.В. Барский, М.В. Соколов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2006. — Т. 72. — № 1. — С. 59–66.

13. *Орлов, А.И.* Методы принятия управленческих решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : КНОРУС, 2018. — 286 с.

14. *Орлов, А.И.* Теория принятия решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 826 с.

15. *Орлов, А.И.* Характеризация средних величин шкалами измерения / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2017. — № 134. — С. 877–907.

16. *Орлов, А.И.* Допустимые средние в некоторых задачах экспертных оценок и агрегирования показателей качества / А.И. Орлов // Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. — Москва : Наука, 1974. — С. 388–393.

17. *Колмогоров, А.Н.* Об определении среднего / А.Н. Колмогоров // Избранные труды: Математика и механика. — Москва : Наука, 1985. — С. 136–138.

18. *Орлов, А.И.* Допустимые преобразования в задаче сравнения средних. Пси-постоянные статистики / А.И. Орлов // Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. — Москва : ЦЭМИ АН СССР, 1975. — С. 121–127.

19. *Орлов, А.И.* Связь между средними величинами и допустимыми преобразованиями шкалы / А.И. Орлов // Математические заметки. — 1981. — Т. 30. — № 4. — С. 561–568.

20. *Кривцов, В.С.* Современные статистические методы в стандартизации и управлении качеством продукции / В.С. Кривцов, А.И. Орлов, В.Н. Фомин // Стандарты и качество. — 1988. — № 3. — С. 32–36.

21. *Пфанцагль, И.* Теория измерений / И. Пфанцагль. — Москва : Мир, 1976. — 165 с.

22. *Орлов, А.И.* Менеджмент в техносфере : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / А.И. Орлов, В.Н. Федосеев. — Москва : Академия, 2003. — 384 с.

23. Управление промышленной и экологической безопасностью : учебное пособие / В.Н. Федосеев, А.И. Орлов, В.Г. Ларионов, А.Ф. Козьяков. — 2-е изд. — Москва : Изд-во УРАО, 2003. — 220 с.

24. *Подиновский, В.В.* Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В.В. Подиновский. — Москва : Наука, 2019. — 103 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Всегда ли имеет смысл складывать числа, используемые в той или иной области человеческой деятельности?

2. Приведите примеры величин, измеренных в шкале наименований.

3. Приведите примеры величин, измеренных в порядковой шкале.

4. Приведите примеры величин, измеренных в шкале интервалов.

5. Приведите примеры величин, измеренных в шкале отношений.

6. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего арифметического $f(X_1, X_2) = (X_1 + X_2) / 2$ в порядковой шкале, используя допустимое преобразование $g(x) = x^4$ (при положительных усредняемых величинах x).

7. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего геометрического в порядковой шкале. Другими словами, приведите пример чисел x_1, x_2, y_1, y_2 и строго возрастающего преобразования f: $R^1 \to R^1$, таких, что

$$(x_1x_2)^{1/2} < (y_1y_2)^{1/2};$$

$$[f(x_1)f(x_2)]^{1/2} > [f(y_1)f(y_2)]^{1/2}.$$

8. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего квадратического в порядковой шкале. Другими словами, приведите пример чисел x_1, x_2, y_1, y_2 и строго возрастающего преобразования f: $R^1 \to R^1$, таких, что

$$[(x_1)^2 + (x_2)^2]^{1/2} < [(y_1)^2 + (y_2)^2]^{1/2};$$

$$[(f(x_1))^2 + (f(x_2))^2]^{1/2} > [(f(y_1))^2 + (f(y_2))^2]^{1/2}.$$

9. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего гармонического в порядковой шкале.

10. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего геометрического в шкале интервалов.

11. Какие средние величины целесообразно использовать при расчете средней заработной платы (или среднего дохода)?

12. Как соотносятся средние по Коши и средние по Колмогорову?

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ, РЕФЕРАТОВ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Теория измерений как научная дисциплина, посвященная гомоморфизмам эмпирических систем с отношениями в числовые системы с отношениями.

2. Показатели разброса, связи, показатели различия (в том числе метрики) в порядковой шкале.

3. Ранговые методы математической статистики как инвариантные методы анализа порядковых данных.

4. Показатели разброса, связи, показатели различия (в том числе метрики) в шкале интервалов.

5. Показатели разброса, связи, показатели различия (в том числе метрики) в шкале отношений.

6. Теорема профессора В.В. Подиновского [24]: любое изменение коэффициентов весомости единичных показателей качества продукции приводит к изменению упорядочения некоторых пар изделий по средневзвешенному показателю (доказательство и прикладное значение).

ГЛАВА 7. СТАТИСТИКА НЕЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ

Статистика нечисловых данных, или статистика объектов нечисловой природы, нечисловая статистика [1], выделена как самостоятельная область прикладной статистики в 1979 г. [2, 3].

7.1. ВИДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

В организационно-экономическом моделировании большое место занимают статистические методы, другими словами, методы анализа данных, причем обычно достаточно большого количества данных. Статистические данные могут иметь различную природу. Исторически самыми ранними были два вида данных: сведения о числе объектов, удовлетворяющих тем или иным условиям, и числовые результаты измерений.

Первый из этих видов данных до сих пор главенствует в статистических сборниках Росстата. Такого рода данные часто называют ***категоризованными***, поскольку о каждом из рассматриваемых объектов известно, в какую из нескольких заранее заданных категорий он попадает. Примером является информация Росстата о населении страны с разделением по возрастным категориям и полу. Часто при составлении таблиц жертвуют информацией, заменяя точное значение измеряемой величины на указание интервала группировки, в которую это значение попадает. Например, вместо точного возраста человека используют лишь один из указанных в таблице возрастных интервалов.

Второй наиболее распространенный вид данных — ***количественные данные***, рассматриваемые как действительные числа. Таковы результаты измерений, наблюдений, испытаний, опытов, анализов. Количественные данные обыч-но описываются набором чисел (выборкой), а не таблицей.

Нельзя утверждать, что категоризованные данные соответствуют первому этапу исследования, а числовые — следующему, на котором используются более совершенные методы измерения. Дело в том, что человеку свойственно давать качественные ответы на возникающие в его практической деятельности вопросы. Примером является таблица [4, разл. 1.1, табл. 1], посвященная анализу сильных и слабых сторон конкретной компании. Она составлена одним из руководителей этой компании и предназначена для использования при управлении компанией. В этой таблице показатели, описывающие различные стороны работы компании, оценены в терминах «Очень высокий», «Высокий», «Средний», «Низкий», «Очень низкий» по отношению к предприятиям отрасли.

Ясно, что вполне можно превратить в числа эти оценки, однако этот переход будет зависеть от исследователя, носить неизбежный налет субъективизма (ср. гл. 6). Отметим, что в таблице [4, разд. 1.1, табл. 1] важность (вес) показателей также оценивается качественно, а не количественно: в терминах «Высокая», «Средняя» или «Низкая».

Иногда нецелесообразно однозначно относить данные к категоризованным или количественным. Например, в Ветхом Завете, в Четвертой книге Моисеевой «Числа» указано количество воинов в различных коленах. С одной стороны, это типичные категоризованные данные, градациями служат названия колен. С другой стороны, эти данные можно рассматривать как количественные, как выборку, их вполне естественно складывать, вычислять среднее арифметическое и т. п.

Описанная ситуация типична. Существует весьма много различных видов статистических данных. Это связано, в частности, со способами их получения. Например, если испытания некоторых технических устройств продолжаются до определенного момента, то получаем так называемые ***цензурированные данные***, состоящие из набора чисел — продолжительностей работы ряда устройств до отказа и информации о том, что остальные устройства продолжали работать в момент окончания испытания. Такого рода данные часто используются при оценке и контроле надежности технических устройств.

Описание вида данных и при необходимости механизма их порождения — начало любого статистического исследования.

В простейшем случае статистические данные — это значения некоторого признака, свойственного изучаемым объектам. Значения могут быть количественными или представлять собой указание на категорию, к которой можно отнести объект. Во втором случае говорят о качественном признаке. Используют и более сложные признаки, перечень которых будет расширяться по мере развертывания изложения в настоящем учебнике.

При измерении по нескольким количественным или качественным признакам в качестве статистических данных об объекте получаем вектор. Его можно рассматривать как новый вид данных. В таком случае выборка состоит из набора векторов. Если часть координат — числа, а часть — качественные (категоризованные) данные, то говорим о векторе разнотипных данных.

Одним элементом выборки, т. е. одним измерением, может быть и функция в целом. Например, электрокардиограмма больного, или амплитуда биений вала двигателя, или временной ряд, описывающий динамику показателей определенной фирмы. Тогда выборка состоит из набора функций.

Элементами выборки могут быть и бинарные отношения. Например, при опросах экспертов часто используют упорядочения (ранжировки) объектов экспертизы: образцов продукции, инвестиционных проектов, вариантов управленческих решений. В зависимости от регламента экспертного исследования элементами выборки могут быть различные виды бинарных отношений (упорядочения, разбиения, толерантности), множества, нечеткие множества и т. д.

Итак, математическая природа элементов выборки в различных задачах прикладной статистики может быть самой разной. Однако можно выделить два класса статистических данных: числовые и нечисловые. Соответственно прикладная статистика разбивается на две части: числовую статистику и нечисловую статистику (ее называют также статистикой нечисловых данных или статистикой объектов нечисловой природы).

Числовые статистические данные — это числа, векторы, функции. Их можно складывать, умножать на коэффициенты. Поэтому в числовой статистике большое значение имеют разнообразные суммы. Математический аппарат анализа сумм случайных элементов выборки — это (классические) законы больших чисел и центральные предельные теоремы (см. прил. 1 к настоящему учебнику).

Нечисловые статистические данные — это категоризованные данные, векторы разнотипных признаков, бинарные отношения, множества, нечеткие множества и др. Их нельзя складывать и умножать на коэффициенты. Поэтому не имеет смысла говорить о суммах нечисловых статистических данных. Они являются элементами нечисловых математических пространств (множеств). Математический аппарат анализа нечисловых статистических данных основан на использовании расстояний между элементами (а также мер близости, показателей различия) в таких пространствах. С помощью расстояний решаются основные статистические задачи: определяются эмпирические и теоретические средние, доказываются законы больших чисел, строятся непараметрические оценки плотности распределения вероятностей, а также задачи диагностики и кластерного анализа и т. д. [1, 4, 5].

Сведем информацию об основных областях прикладной статистики в табл. 7.1. Отметим, что классификацию можно проводить и по другим основаниям. Так, непараметрические и параметрические методы, а также методы, основанные на тех или иных моделях порождения цензурированных данных, входят в состав каждой из рассматриваемых областей.

Подведем итоги раздела. **Статистика нечисловых данных** — это направление в прикладной математической статистике, в котором в качестве исходных статистических данных (результатов наблюдений) рассматриваются объекты нечисловой природы. Так принято называть объекты, которые нецелесообразно описывать числами, в частности элементы различных нелинейных пространств.

Таблица 7.1

Области прикладной статистики

№ п/п	Вид статистических данных	Область прикладной статистики
1	Числа	Статистика (случайных) величин
2	Конечномерные векторы	Многомерный статистический анализ
3	Функции	Статистика случайных процессов и временных рядов
4	Объекты нечисловой природы	Нечисловая статистика

Примерами являются бинарные отношения (ранжировки, разбиения, толерантности и др.), результаты парных и множественных сравнений, множества, нечеткие множества, измерения в шкалах, отличных от абсолютных. Этот перечень примеров не претендует на законченность. Он складывался постепенно, по мере того как развивались теоретические исследования в области нечисловой статистики (статистики нечисловых данных) и расширялся опыт применений этого направления прикладной математической статистики.

7.2. ОБЪЕКТЫ НЕЧИСЛОВОЙ ПРИРОДЫ

Объекты нечисловой природы широко используются в теоретических и прикладных исследованиях по экономике, менеджменту и другим проблемам управления, в частности управления качеством продукции, в технических науках, социологии, психологии, медицине и т. д., а также практически во всех отраслях народного хозяйства.

Начнем с первоначального знакомства с основными видами объектов нечисловой природы.

Результаты измерений в шкалах, отличных от абсолютной. Рассмотрим конкретное исследование в области маркетинга образовательных услуг, послужившее поводом к развитию одного из направлений отечественных исследований по теории измерений. При изучении привлекательности различных профессий для выпускников новосибирских школ был составлен список из 30 профессий. Опрашиваемых просили оценить каждую из этих профессий одним из баллов 1, 2, …, 10 по правилу: чем больше нравится, тем выше балл. Для получения социологических выводов необходимо было дать единую оценку привлекательности определенной профессии для совокупности выпускников школ. В качестве такой оценки в работе [6] использовалось среднее арифметическое баллов, выставленных профессии опрошенными школьниками. В частности, физика получила средний балл 7,69, а математика — 7,50. Поскольку 7,69 больше, чем 7,50, был сделан вывод, что физика более предпочтительна для школьников, чем математика.

Однако этот вывод противоречит данным работы [7], согласно которым ленинградские школьники средних классов больше любят математику, чем физику. Как объяснить это противоречие? Есть много подходов к выяснению причин различия выводов новосибирских и ленинградских исследователей. Здесь обсудим одно из возможных объяснений этого противоречия, основанное на идеях нечисловой статистики. Оно сводится к указанию на неадекватность (с точки зрения теории измерений (см. гл. 6)) методики обработки статистических данных о предпочтениях выпускников школ, примененной в работе [6].

Дело в том, что баллы 1, 2, …, 10 введены конкретными исследователями, т. е. субъективно. Если одна профессия оценена в 10 баллов, а вторая — в 2, то из этого нельзя заключить, что первая ровно в 5 раз привлекательней второй. Другой коллектив социологов мог бы принять иную систему баллов, например 1, 4, 9, 16, …, 100. Естественно предположить, что упорядочивание профессий по привлекательности, присущее школьникам, не зависит от того, какой системой баллов им предложит пользоваться социолог. Раз так, то распределение профессий по градациям десятибалльной системы не изменится, если перейти к другой системе баллов с помощью любого допустимого преобразования в порядковой шкале, т. е. с помощью строго возрастающей функции $g: R^1 \to R^1$. Если $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — ответы n выпускников школ, касающиеся математики, а $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ — физики, то после перехода к новой системе баллов ответы относительно математики будут иметь вид $g(Y_1), g(Y_2), \ldots, g(Y_n)$, а относительно физики — $g(Z_1), g(Z_2), \ldots, g(Z_n)$.

Пусть единая оценка привлекательности профессии вычисляется с помощью функции $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Какие требования естественно наложить на функцию $f: R^n \to R^1$, чтобы полученные с ее помощью выводы не зависели от того, какой именно системой баллов пользовался социолог (в рассматриваемом исследовании он выступал как специалист по маркетингу образовательных услуг)?

Замечание. Обсуждение можно вести в терминах экспертных оценок. Тогда вместо сравнения математики и физики n экспертов (а не выпускников школ) оценивают по конкурентоспособности на мировом рынке, например, две марки стали. Однако в настоящее время маркетинговые и социологические исследования более привычны, чем экспертные.

Единая оценка вычислялась для того, чтобы сравнивать профессии по привлекательности. Пусть $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — среднее по Коши (см. гл. 6). Пусть среднее по первой совокупности меньше среднего по второй совокупности:

$$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) < f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n).$$

Тогда согласно теории измерений необходимо потребовать, чтобы для любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований в порядковой шкале было справедливо также неравенство:

$$f(g(Y_1), g(Y_2), \ldots, g(Y_n)) < f(g(Z_1), g(Z_2), \ldots, g(Z_n)),$$

т. е. среднее преобразованных значений из первой совокупности также было меньше среднего преобразованных значений для второй совокупности. Более того, два рассматриваемых неравенства должны быть равносильны. Причем сформулированное условие должно быть верно для любых двух совокупностей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ и $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ и, напомним, любого допустимого преобразования. Средние величины, удовлетворяющие сформулированному условию, называют допустимыми (в порядковой шкале). Согласно теории измерений только такими средними можно пользоваться при анализе мнений выпускников школ или экспертов, обработке иных данных, измеренных в порядковой шкале.

Какие единые оценки привлекательности профессий $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ устойчивы относительно сравнения? Ответ на этот вопрос дан выше в гл. 6. В частности, оказалось, что средним арифметическим, как в работе [6] новосибирских социологов (специалистов по маркетингу образовательных услуг), пользоваться нельзя. А порядковыми статистиками, т. е. членами вариационного ряда (и только ими), — можно.

Методы анализа конкретных статистических данных, измеренных в шкалах, отличных от абсолютной, являются предметом изучения в статистике нечисловых данных. Как описано выше в гл. 6, основные шкалы измерения делятся на качественные (шкалы наименований и порядка) и количественные (шкалы интервалов, отношений, разностей, абсолютная). Методы анализа статистических данных в количественных шкалах сравнительно мало отличаются от таковых в абсолютной шкале. Добавляется только требование инвариантности относительно преобразований сдвига и/или масштаба. Методы анализа качественных данных принципиально иные.

Напомним, что исходным понятием теории измерений является совокупность $\Phi = \{\varphi\}$ допустимых преобразований шкалы (обычно Φ — группа в математическом смысле этого термина), φ: $R^1 \to R^1$. Алгоритм обработки данных W, т. е. функция W: $R^n \to A$ (здесь A — множество возможных результатов работы алгоритма) называется адекватным в шкале с совокупностью допустимых преобразований Φ, если

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = W(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) \tag{7.1}$$

для всех $x_i \in R^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и всех $\varphi \in \Phi$. Таким образом, теорию измерений рассматриваем как теорию инвариантов относительно различных совокупностей допустимых преобразований Φ. ***Интерес вызывают две задачи:***

1) дана группа допустимых преобразований Φ (т. е. задана шкала измерения). Какие алгоритмы анализа данных W из определенного класса являются адекватными (т. е. удовлетворяют тождеству (7.1))?

2) дан алгоритм анализа данных W. Для каких шкал (т. е. групп допустимых преобразований Φ) он является адекватным?

В гл. 6 первая задача рассматривается для алгоритмов расчета средних величин. Информацию о других результатах решения задач указанных типов можно найти в работах [2, 8].

Бинарные отношения. Пусть W: $R^n \to A$ — адекватный алгоритм в шкале наименований. Можно показать, что этот алгоритм задается некоторой функцией от матрицы $B = \|b_{ij}\| = B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ порядка $n\times n$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i = x_j, i, j = 1,2,\ldots,n, \\ 0, & x_i \neq x_j, i, j = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Если W: $R^n \to A$ — адекватный алгоритм в шкале порядка, то этот алгоритм задается некоторой функцией от матрицы $C = \|C_{ij}\| = B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ порядка $n\times n$, где

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \le x_j, i, j = 1,2,\ldots,n, \\ 0, & x_i > x_j, i, j = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Матрицы B и C можно проинтерпретировать в терминах бинарных отношений. Как известно, бинарное отношение A на конечном множестве $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ — это подмножество *декартова квадрата* $Q^2 = \{(q_m, q_n), m, n = 1, 2, \ldots, k\}$. При этом пара (q_m, q_n) входит в A тогда и только тогда, когда между q_m и q_n имеется рассматриваемое отношение.

Пусть некоторая характеристика измеряется у n объектов $q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем x_i — результат ее измерения у объекта q_i. Тогда матрицы B и C задают бинарные отношения на множестве объектов $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Поскольку бинарное отношение можно рассматривать как подмножество декартова квадрата $Q \times Q$, то любой матрице $D = ||d_{ij}||$ порядка $n \times n$ из 0 и 1 соответствует бинарное отношение $R(D)$, определяемое следующим образом: $(q_i, q_j) \in R(D)$ тогда и только тогда, когда $d_{ij} = 1$.

Бинарное отношение $R(B)$ — отношение эквивалентности, т. е. симметричное рефлексивное транзитивное отношение. Оно задает разбиение Q на классы эквивалентности. Два объекта q_i и q_j входят в один класс эквивалентности тогда и только тогда, когда $x_i = x_j$, $b_{ij} = 1$.

Выше показано, как разбиения возникают в результате измерений в шкале наименований. Разбиения могут появляться и непосредственно. Так, при оценке качества промышленной продукции эксперты дают разбиение показателей качества на группы. Для изучения психологического состояния людей их просят разбить предъявленные рисунки на группы сходных между собой. Аналогичная методика применяется и в иных экспериментальных психологических исследованиях, необходимых для оптимизации управления персоналом.

Во многих задачах организационно-экономического моделирования разбиения получаются «на выходе» (например, в кластерном анализе) или же используются на промежуточных этапах анализа данных (например, сначала проводят классификацию с целью выделения однородных групп, а затем в каждой группе строят регрессионную зависимость).

Бинарное отношение $R(C)$ задает разбиение Q на классы эквивалентности, между которыми введено отношение строгого порядка. Два объекта q_i и q_j входят в один класс тогда и только тогда, когда $c_{ij} = 1$ и $c_{ji} = 1$, т. е. $x_i = x_j$. Класс эквивалентности Q_1 предшествует классу эквивалентности Q_2 тогда и только тогда, когда для любых $q_i \in Q1$, $q_j \in Q_2$ имеем $c_{ij} = 1$, $c_{ji} = 0$, т. е. $x_i < x_j$. Такое бинарное отношение в статистике часто называют ранжировкой со связями; связанными считаются объекты, входящие в один класс эквивалентности. В литературе встречаются и другие названия: линейный квазипорядок, упорядочение, квазисерия, ранжирование. Мы предпочитаем термин «кластеризованная ранжировка» (см. гл. 5). Если каждый из классов эквивалентности состоит только из одного элемента, то имеем обычную ранжировку (другими словами, строгий линейный порядок).

Как известно, ранжировки возникают в результате измерений в порядковой шкале. Так, при описанном выше опросе ответ выпускника школы — это ранжировка (со связями) профессий по привлекательности. Ранжировки часто возникают и непосредственно, без промежуточного этапа: приписывания объектам квазичисловых оценок — баллов. Многочисленные примеры тому даны английским статистиком М. Кендэлом [9]. При оценке качества промышленной продукции широко применяемые нормативные и методические документы предусматривают использование ранжировок.

Для прикладных областей, кроме ранжировок и разбиений, представляют интерес толерантности, т. е. рефлексивные симметричные бинарные отношения. **Толерантность** — математическая модель для выражения представлений о сходстве (похожести, близости). Разбиения — частный вид толерантностей. Толерантность, обладающая свойством транзитивности, — это **разбиение**. Однако в общем случае толерантность не обязана быть транзитивной. Толерантности появляются во многих постановках теории экспертных оценок, например, как результат парных сравнений (см. ниже).

Напомним, что любое бинарное отношение на конечном множестве может быть описано матрицей из 0 и 1.

Дихотомические (бинарные) данные. Это данные, которые могут принимать одно из двух значений (0 или 1), т. е. результаты измерений значений альтернативного признака. Как уже было показано, измерения в шкале наименований и порядковой шкале приводят к бинарным отношениям, а те могут быть выражены как результаты измерений по нескольким альтернативным признакам, соответствующим элементам матриц, описывающих отношения. Дихотомические данные возникают в прикладных исследованиях и многими иными путями.

В настоящее время в большинстве технических регламентов, стандартов, технических условий, договоров на поставку конкретной продукции предусмотрен контроль по альтернативному признаку. Это означает, что единица продукции относится к одной из двух категорий: «годных» или «дефектных», т. е. соответствующих или не соответствующих требованиям стандарта. Отечественными специалистами проведены обширные теоретические исследования проблем статистического приемочного контроля по альтернативному признаку. Основополагающими в этой области являются работы академика А.Н. Колмогорова. Подход советской вероятностно-статистической школы к проблемам контроля качества продукции отражен в монографиях [10, 1] (см. также гл. 13 учебника [5]).

Дихотомические данные — давний объект математической статистики. Особенно большое применение они имеют в управленческих, экономических и социологических исследованиях, в которых большинство переменных, интересующих специалистов, измеряется по качественным шкалам. При этом дихотомические данные зачастую являются более адекватными, чем результаты измерений по методикам, использующим большее число градаций. В частности, психологические тесты типа MMPI (расшифровывается как Миннесотское многофакторное личностное исследование) используют только дихотомические данные. На них опираются и популярные в организационно-экономическом моделировании методы парных сравнений [5].

Элементарным актом в методе парных сравнений является предъявление эксперту для сравнения двух объектов (сравнение может проводиться также прибором). В одних постановках эксперт должен выбрать из двух объектов лучший по качеству, в других — ответить, похожи объекты или нет. В обоих случаях ответ эксперта можно выразить одной из двух цифр (меток): 0 или 1. В первой постановке: 0, если лучшим объявлен первый объект; 1 — если второй. Во второй постановке: 0, если объекты похожи, схожи, близки; 1 — в противном случае.

Подводя итоги, можно сказать, что рассмотренные выше виды данных могут быть представлены в виде векторов из 0 и 1 (при обосновании этого утверждения используется тот очевидный факт, что матрицы могут быть записаны в виде векторов, строка за строкой). Более того, поскольку все мыслимые результаты наблюдений имеют лишь несколько значащих цифр, то, используя двоичную систему счисления, любые виды анализируемых статистическими методами данных можно записать в виде векторов конечной длины (размерности) из 0 и 1. Представляется, однако, что эта возможность в большинстве случаев имеет лишь академический интерес. Но во всяком случае можно констатировать, что анализ дихотомических данных необходим во многих прикладных постановках.

Множества. Совокупность X^n векторов $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из 0 и 1 размерности n находится во взаимно однозначном соответствии с совокупностью 2^n всех подмножеств множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$. При этом вектору $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответствует подмножество $N(X) \subseteq N$, состоящее из тех и только из тех i, для которых $x_i = 1$. Это объясняет, почему изложение вероятностных и статистических результатов, относящихся к анализу данных, являющихся объектами нечисловой природы перечисленных выше видов, можно вести на языке конечных случайных множеств, как это было сделано в монографии [2].

Множества как исходные данные появляются и в иных постановках. Из геологических задач исходил Ж. Матерон, из электротехнических — Н.Н. Ляшенко и др. Случайные множества применялись для описания процесса случайного распространения, например распространения информации, слухов, эпидемии или пожара, а также в математической экономике. В монографии [2] рассмотрены приложения случайных множеств в теории экспертных оценок и в теории управления запасами и ресурсами (логистике).

Отметим, что с точки зрения математики реальные объекты можно моделировать случайными множествами как из конечного числа элементов, так и из бесконечного, однако при расчетах на ЭВМ неизбежна дискретизация, т. е. переход к первой из названных возможностей.

Объекты нечисловой природы как статистические данные. В теории и практике статистических методов наиболее распространенный объект изучения и применения — выборка x_1, x_2, …, x_n, т. е. совокупность результатов n наблюдений (измерений, испытаний, анализов, опытов). В различных областях статистики результат наблюдения — это или число, или конечномерный вектор, или функция и т. д. Соответственно проводится, как уже отмечалось, деление прикладной статистики: одномерная статистика, многомерный статистический анализ, статистика временных рядов и случайных процессов и т. д.

В нечисловой статистике (статистике нечисловых данных) в качестве результатов наблюдений рассматриваются объекты нечисловой природы. В частности, математические объекты перечисленных выше видов — измерения в шкалах, отличных от абсолютной, бинарные отношения, векторы из 0 и 1, множества, а также нечеткие множества, о которых речь пойдет ниже. Выборка может состоять из n ранжировок, или n толерантностей, или n множеств, или n нечетких множеств и т. д.

Отметим необходимость развития методов статистической обработки «разнотипных данных», обусловленную большой ролью в прикладных исследованиях «признаков смешанной природы». Речь идет о том, что результат наблюдения состояния объекта зачастую представляет собой вектор, у которого часть координат измерена по шкале наименований, часть — по порядковой шкале, часть — по шкале интервалов и т. д. Есть и более сложные модели разнотипных данных, например, когда некоторые координаты вектора наблюдений описываются нечеткими множествами. Классические статистические методы ориентированы обычно либо на абсолютную шкалу, либо на шкалу наименований (анализ таблиц сопряженности), а потому зачастую непригодны для обработки разнотипных данных. Поэтому в статистике нечисловых данных разработаны новые методы анализа разнотипных данных, о некоторых из которых рассказывается ниже.

Для обозначения перечисленных и им подобных неклассических результатов наблюдений в 1979 г. в монографии [2] предложен собирательный термин — *объекты нечисловой природы*. Термин «нечисловой» означает, что структура пространства, в котором лежат результаты наблюдений, не является структурой действительных чисел, векторов или функций, она вообще не является структурой линейного (векторного) пространства. В памяти компьютеров и при расчетах объекты нечисловой природы, разумеется, изображаются с помощью чисел, но эти числа нельзя складывать и умножать.

С целью «стандартизации математических орудий» (выражение группы французских математиков, действовавшей в середине XX в. под псевдонимом Н. Бурбаки) целесообразно разрабатывать методы статистического анализа данных, пригодные одновременно для всех перечисленных выше видов результатов наблюдений. Кроме того, в процессе развития теоретических и прикладных исследований выявляется необходимость использования новых видов объектов нечисловой природы, отличных от рассмотренных выше, например в связи с развитием статистических методов обработки текстовой информации.

Поэтому целесообразно ввести еще один вид объектов нечисловой природы — *объекты произвольной природы*, т. е. элементы множеств, на которые не наложено никаких условий (кроме «условий регулярности», необходимых для справедливости доказываемых теорем). Другими словами, в этом случае предполагается, что результаты наблюдений (элементы выборки) лежат в произвольном пространстве X. Для получения теорем необходимо потребовать, чтобы X удовлетворяло некоторым внутриматематическим условиям, например было так называемым топологическим пространством. Как известно, ряд результатов классической математической статистики получен именно в такой постановке. Так, при изучении оценок максимального правдоподобия элементы выборки могут лежать в пространстве произвольной природы. Это не влияет на рассуждения, поскольку в них рассматривается лишь зависимость плотности вероятности от параметра.

Методы классификации, использующие лишь расстояние между классифицируемыми объектами, могут применяться к совокупностям объектов произвольной природы, лишь бы в пространстве, где они лежат, была задана метрика (или мера близости, показатель различия). Цель нечисловой статистики (в некоторых литературных источниках используются термины «статистика нечисловых данных» и «статистика объектов нечисловой природы») состоит в том, чтобы систематически рассматривать методы статистической обработки данных как произвольной природы, так и относящихся к указанным выше конкретным видам объектов нечисловой природы, т. е. методы описания данных, оценивания и проверки гипотез. Взгляд с общей точки зрения позволяет получить новые результаты и в других областях прикладной статистики.

Объекты нечисловой природы при формировании организационно-экономической (статистической или математической) модели реального явления. Использование объектов нечисловой природы часто порождено желанием обрабатывать более объективную, более освобожденную от погрешностей информацию. Как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного, например сравнительного, характера, чем количественного. Так, ему легче сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах. Другими словами, использование объектов нечисловой природы — средство повысить устойчивость эконометрических и экономико-математических моделей реальных явлений по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей.

Сначала конкретные области статистики объектов нечисловой природы (а именно прикладная теория измерений, нечеткие и случайные множества) были рассмотрены в монографии [2] при анализе частных постановок проблемы устойчивости математических моделей социально-экономических явлений и процессов к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. А затем была понята необходимость проведения работ по развитию статистики объектов нечисловой природы как самостоятельного научного направления.

Обсуждение начнем со шкал измерения. Науку о единстве мер и точности измерений называют метрологией. Таким образом, репрезентативная теория измерений — часть метрологии. Методы обработки данных должны быть адекватны относительно допустимых преобразований шкал измерения в смысле репрезентативной теории измерений. Однако установление типа шкалы, т. е. задание группы преобразований Ф — дело специалиста соответствующей прикладной области. Так, оценки привлекательности профессий мы считали измеренными в порядковой шкале [2]. Однако отдельные социологи не соглашались с этим, считая, что выпускники школ пользуются шкалой с более узкой группой допустимых преобразований, например интервальной шкалой. Очевидно, эта проблема относится не к математике, а к наукам о человеке. Для ее решения может быть поставлен достаточно трудоемкий эксперимент. Пока же он не поставлен, целесообразно принимать порядковую шкалу, так как это гарантирует от возможных ошибок.

Необходимость использования в математических моделях реальных явлений таких объектов нечисловой природы, как бинарные отношения, множества, нечеткие множества, кратко была показана выше. Здесь же обратим внимание, что анализируемые в классической статистике результаты наблюдений также «не совсем числа». А именно, любая величина X измеряется всегда с некоторой погрешностью ΔX и результатом наблюдения является

$$Y = X + \Delta X.$$

Как уже отмечалось, погрешностями измерений занимается метрология. ***Отметим справедливость следующих фактов*** (в соответствующей вероятностно-статистической модели процесса измерения):

а) для большинства реальных измерений невозможно полностью исключить систематическую ошибку, т. е. $M(\Delta X) \neq 0$;

б) распределение ΔX в подавляющем большинстве случаев не является нормальным (см. [5, 13] и гл. 2 выше);

в) измеряемую величину X и погрешность ее измерения ΔX обычно нельзя считать независимыми случайными величинами;

г) распределение погрешностей оценивается по результатам специально проведенных измерений, следовательно, полностью известным считать его нельзя. Зачастую исследователь располагает лишь границами для систематической погрешности и оценками таких характеристик случайной погрешности, как дисперсия или размах.

Приведенные факты показывают ограниченность области применимости распространенной модели погрешностей, в которой X и ΔX рассматриваются как независимые случайные величины, причем ΔX имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием.

Строго говоря, результаты наблюдения всегда имеют дискретное распределение, поскольку описываются числами, у которых немного значащих цифр (обычно от 1 до 5). Возникает дилемма: либо признать, что непрерывные распределения — внутриматематическая фикция, и прекратить ими пользоваться, либо считать, что непрерывные распределения имеют «реальные» величины X, которые наблюдаются с принципиально неустранимой погрешностью ΔX. Первый выход в настоящее время нецелесообразен, так как он требует отказа от большей части разработанного математического аппарата. Из второго следует необходимость изучения влияния неустранимых погрешностей на статистические выводы.

Погрешности ΔX можно учитывать либо с помощью вероятностной модели (ΔX — случайная величина, имеющая функцию распределения, вообще говоря, зависящую от X), либо с помощью нечетких множеств. Во втором случае приходим к теории нечетких чисел и к ее частному случаю — статистике интервальных данных [1, 4].

Другой источник появления погрешности ΔX связан с принятой в конструкторской и технологической документации системой допусков на контролируемые параметры изделий и деталей, с использованием шаблонов при проверке контроля качества продукции [14]. В этих случаях характеристики ΔX определяются не свойствами средств измерения, а применяемой технологией проектирования и производства. В терминах прикладной статистики сказанному соответствует группировка данных, при которой мы знаем, какому из заданных интервалов принадлежит наблюдение, но не знаем точного значения результата наблюдения. Применение группировки может дать экономический эффект, поскольку зачастую легче (в среднем) установить, к какому интервалу относится результат наблюдения, чем точно измерить его.

Объекты нечисловой природы как результат статистической обработки данных. Объекты нечисловой природы появляются не только на «входе» статистической процедуры, но и в процессе обработки данных и на «выходе» в качестве итога статистического анализа.

Рассмотрим простейшую прикладную постановку задачи регрессии (см. гл. 3). Исходные данные имеют вид $(x_i, y_i) \in R^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Цель состоит в том, чтобы с достаточной точностью описать y как многочлен (полином) от x, т. е. модель имеет вид

$$y_i = \sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.2}$$

где m — неизвестная степень полинома; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ — неизвестные коэффициенты многочлена; ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — погрешности, которые для простоты примем независимыми и имеющими одно и то же нормальное распределение.

Здесь наглядно проявляется одна из причин живучести статистических моделей на основе нормального распределения. Такие модели, хотя и, как правило, не адекватны реальной ситуации [5], но с математической точки зрения позволяют проникнуть глубже в суть изучаемого явления. Поэтому они пригодны для первоначального анализа ситуации, как и в рассматриваемом случае. Дальнейшие научные исследования должны быть направлены на снятие нереалистического предположения нормальности и переход к непараметрическим моделям погрешности.

Распространенная процедура восстановления зависимости с помощью многочлена такова: сначала пытаются применить модель (7.2) для линейной функции ($m = 1$), при неудаче (неадекватности модели) переходят к многочлену второго порядка ($m = 2$), если снова неудача, то берут модель (7.2) с $m = 3$ и т. д. (адекватность модели проверяют по F-критерию Фишера).

Обсудим свойства этой процедуры в терминах прикладной статистики. Если степень полинома задана ($m = m_0$), то его коэффициенты оценивают методом наименьших квадратов, свойства этих оценок хорошо известны (см., например, гл. 3 или монографию [15, гл. 26]). Однако в описанной выше реальной постановке m тоже является неизвестным параметром и подлежит оценке. Таким образом, требуется оценить объект $(m, a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)$, множество значений которого можно описать как $R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$. Это объект нечисловой природы, обычные методы оценивания для него неприменимы, так как m — дискретный параметр.

В рассматриваемой постановке разработанные к настоящему времени методы оценивания степени полинома носят в основном эвристический характер (см., например, гл. 12 монографии [16]). Свойства описанной выше распространенной процедуры рассмотрены выше в гл. 3. Показано, что обычно используемыми методами степень полинома m оценивается несостоятельно, и найдено предельное распределение оценок этого параметра, оказавшееся геометрическим. Отметим, что для степени многочлена давно предложены состоятельные оценки [17].

В более общем случае линейной регрессии данные имеют вид (y_i, X_i), $i = 1, 2, \dots, n$, где $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}) \in R^N$ — вектор предикторов (факторов, объясняющих переменные), а модель такова:

$$y_i = \sum_{j \in K} a_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,\dots,n \tag{7.3}$$

здесь K — некоторое подмножество множества $\{1, 2, \dots, n\}$; ε_i — те же, что и в модели (7.2); a_j — неизвестные коэффициенты при предикторах с номерами из K.

Модель (7.2) сводится к модели (7.3), если

$$x_{i1}=1,\ x_{i2}=x_i,\ x_{i3}=x_i^2,\ x_{i4}=x_i^3,\ldots,x_{ij}=x_i^{j-1},\ldots$$

В модели (7.2) есть естественный порядок ввода предикторов в рассмотрение: в соответствии с возрастанием степени, а в модели (7.3) естественного порядка нет, поэтому здесь стоит произвольное подмножество множества предикторов. Есть только частичный порядок: чем мощность подмножества меньше, тем лучше. Модель (7.3) особенно актуальна в организационно-экономических и технических исследованиях (см. многочисленные примеры в журнале «Заводская лаборатория. Диагностика материалов»). Она применяется в задачах управления качеством продукции и других технико-экономических исследованиях, в медицине, экономике, маркетинге и социологии, когда из большого числа факторов, предположительно влияющих на изучаемую переменную, надо отобрать по возможности наименьшее число значимых факторов и с их помощью сконструировать прогнозирующую формулу (7.3).

Задача оценивания модели (7.3) разбивается на две последовательные задачи: оценивание множества K — подмножества множества всех предикторов, а затем — неизвестных параметров a_j. Методы решения второй задачи хорошо известны и подробно изучены (обычно используют метод наименьших квадратов). Гораздо хуже обстоит дело с оцениванием объекта нечисловой природы K. Как уже отмечалось, существующие методы в основном эвристические, они зачастую не являются даже состоятельными. Даже само понятие состоятельности в данном случае требует специального определения. Пусть K_0 — истинное подмножество предикторов, т. е. подмножество, для которого справедлива модель (7.3), а подмножество предикторов K_n — его оценка. Оценка K_n называется состоятельной, если

$$\lim_{n\to\infty} Card(K_n \Delta K_0) = 0\,,$$

где Δ — символ симметрической разности множеств; $Card(K)$ означает число элементов множества K, а предел понимается в смысле сходимости по вероятности.

Итак, задача оценивания в моделях регрессии, таким образом, разбивается на две: оценивание структуры модели и оценивание параметров при заданной структуре. В модели (7.2) структура описывается неотрицательным целым числом m, в модели (7.3) — множеством K. Структура — объект нечисловой природы. Задача ее оценивания сложна, в то время как задача оценивания численных параметров при заданной структуре хорошо изучена, разработаны эффективные (в смысле прикладной математической статистики) методы.

Такова же ситуация и в других методах многомерного статистического анализа: в факторном анализе (включая метод главных компонент) и в многомерном шкалировании, в иных оптимизационных постановках проблем прикладного многомерного статистического анализа.

Продолжим рассмотрение объектов нечисловой природы на «выходе» статистической процедуры. Примеры многочисленны. Разбиения — итог работы многих алгоритмов классификации, в частности алгоритмов кластер-анализа. Ранжировки — результат упорядочения профессий по привлекательности или автоматизированной обработки мнений экспертов — членов комиссии по подведению итогов конкурса научных работ. (В последнем случае используются кластеризованные ранжировки; так, в одну группу, наиболее многочисленную, попадают работы, не получившие наград.) Из всех объектов нечисловой природы, видимо, наиболее часты на «выходе» дихотомические данные: принять или не принять гипотезу, в частности принять или забраковать партию продукции. Результатом статистической обработки данных может быть множество, например зона наибольшего поражения при аварии, или последовательность множеств, например «среднемерное» описание распространения пожара (см. гл. 4 в монографии [2]).

Неопределенность реальных явлений и процессов описывают с помощью математического аппарата теории нечеткости [18]. Нечетким множеством французский математик Э. Борель еще в начале XX в. предлагал описывать представление людей о числе зерен, образующем «кучу» [19]. С помощью нечетких множеств формализуются значения лингвистических переменных, выступающих как итоговая оценка качества систем автоматизированного проектирования, сельскохозяйственных машин, бытовых газовых плит, надежности программного обеспечения или систем управления и др.

Можно констатировать, что все виды объектов нечисловой природы могут появляться как «на входе», так и «на выходе» организационно-экономического исследования.

7.3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ПОРОЖДЕНИЯ НЕЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим основные вероятностные модели порождения нечисловых данных. А именно, дихотомических данных, результатов парных сравнений, бинарных отношений, рангов, объектов общей природы. Обсудим различные варианты вероятностных моделей и их практическое использование (см. также обзор [20]).

Дихотомические данные. Рассмотрим базовую вероятностную модель дихотомических данных — *бернуллиевский вектор* (в терминологии энциклопедии [21] — *люсиан*), т. е. конечную последовательность $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ независимых испытаний Бернулли X_i, для которых $P(X_i = 1) = p_i$ и $P(X_i = 0) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, причем вероятности p_i могут быть различны.

Бернуллиевские векторы часто применяются при практическом использовании эконометрических методов. Так, они использованы в монографии [2] для описания равномерно распределенных случайных толерантностей. Как известно, толерантность на множестве из m элементов можно задать симметричной матрицей $||\delta_{ij}||$ из 0 и 1, на главной диагонали которой стоят 1. Тогда случайная толерантность описывается распределением $m(m-1) / 2$ дихотомических случайных величин δ_{ij}, $1 \leq i < j \leq m$, а для равномерно распределенной (на множестве всех толерантностей) толерантности эти случайные величины, как можно доказать, являются независимыми и принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями 1/2. Записав элементы δ_{ij} задающей такую толерантность матрицы в строку, получим бернуллиевский вектор с $k = m(m-1) / 2$ и $p_i = 1/2$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

В связи с оцениванием по статистическим данным функции принадлежности нечеткой толерантности в 1970-е гг. была построена теория случайных толерантностей с такими независимыми δ_{ij}, что вероятности $P(\delta_{ij} = 1) = p_{ij}$ произвольны [2]. Случайные множества с независимыми элементами использовались как общий язык для описания парных сравнений и случайных толерантностей. В некоторых публикациях термин «люсиан» применялся как сокращение для выражения «случайные множества с независимыми элементами».

Был выявлен ряд областей, в которых полезен математический аппарат решения различных статистических задач, связанных с бернуллиевскими векторами. ***Перечислим эти области, включая ранее названные:***

– анализ случайных толерантностей;

– случайные множества с независимыми элементами;

– обработка результатов независимых парных сравнений;

– статистические методы анализа точности и стабильности технологического процесса;

– анализ и синтез планов статистического приемочного контроля (по альтернативным, т. е. дихотомическим, признакам);

– обработка маркетинговых и социологических анкет (с закрытыми вопросами типа «да — нет»);

– обработка социально-психологических и медицинских данных, в частности ответов на психологические тесты типа MMPI (используемых в задачах управления персоналом);

– анализ топографических карт (применяемых для анализа и прогноза зон поражения при технологических авариях, распространении коррозии, заболеваниях (таких как инфаркт миокарда), распространении экологически вредных загрязнений и в других ситуациях) и т. д.

Теорию бернуллиевских векторов можно выразить в терминах любой из этих теоретических и прикладных областей. Однако терминология одной из этих областей «режет слух» и приводит к недоразумениям в другой из них. Поэтому целесообразно использовать термин «бернуллиевский вектор» в указанном выше значении, не связанном ни с какой из перечисленных областей приложения этой теории (в ряде публикаций в том же значении использовался термин «люсиан»).

Распределение бернуллиевского вектора X полностью описывается векторным параметром $P = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, т. е. нечетким подмножеством множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. Действительно, для любого детерминированного вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из 0 и 1 имеем:

$$P(X = x) = \prod_{1 \le j \le k} h(x_j, p_j),$$

где $h(x, p) = p$ при $x = 1$ и $h(x, p) = 1 - p$ при $x = 0$.

Теперь можно уточнить способы использования люсианов в прикладной статистике. ***Бернуллиевскими векторами можно моделировать:***

– результаты статистического контроля (0 — годное изделие, 1 — дефектное);

– результаты маркетинговых и социологических опросов (0 — опрашиваемый выбрал первую из двух подсказок, 1 — вторую);

– распределение посторонних включений в материале (0 — нет включения в определенном объеме материала, 1 — есть);

– результаты испытаний и анализов (0 — нет нарушений требований нормативно-технической документации, 1 — есть такие нарушения);

– результаты аудита [22] (0 — нет нарушений нормативных требований в конкретном документе бухгалтерского учета, 1 — обнаружено хотя бы одно нарушение);

– процессы распространения, например, пожаров (0 — нет загорания, 1 — есть; подробнее см. [2, с. 215–223]);

– состояние технологического процесса (0 — процесс находится в границах допуска, 1 — вышел из них);

– ответы экспертов (опрашиваемых) о сходстве объектов (проектов, образцов) и т. д.

Парные сравнения. Общую модель парных сравнений опишем согласно монографии Г. Дэвида [12, с. 9]. Предположим, что t объектов A_1, A_2, …, A_t сравниваются попарно каждым из n экспертов. Всего возможных пар для сравнения имеется $s = t(t - 1) / 2$. Эксперт с номером γ делает r_γ повторных сравнений для каждой из s возможностей. Пусть $X(i, j, \gamma, \delta)$, $i, j = 1, 2, \ldots, t$, $i \neq j$, $\gamma = 1, 2, \ldots, n$; $\delta = 1, 2, \ldots, r_\gamma$, — случайная величина, принимающая значение 1 или 0 в зависимости от того, предпочитает ли эксперт с номером γ объект A_i или объект A_j в δ-м сравнении двух объектов. Предполагается, что все сравнения проводятся независимо друг от друга, так что случайные величины $X(i, j, \gamma, \delta)$ независимы в совокупности, если не считать того, что $X(i, j, \gamma, \delta) + X(i, j, \gamma, \delta) = 1$. Положим

$$P(X(i,j,\gamma,\delta)=1)=\pi(i,j,\gamma,\delta).$$

Ясно, что описанная модель парных сравнений представляет собой частный случай бернуллиевского вектора. В этой модели число наблюдений равно числу неизвестных параметров, поэтому для получения статистических выводов необходимо наложить априорные условия на вероятности $\pi(i, j, \gamma, \delta)$, например, как в [12, с. 9]:

– $\pi(i, j, \gamma, \delta) = \pi(i, j, \gamma)$ (нет эффекта от повторений);

– $\pi(i, j, \gamma, \delta) = \pi(i, j)$ (нет эффекта от повторений и от экспертов).

Теорию независимых парных сравнений целесообразно разделить на две части: непараметрическую, в которой статистические задачи ставятся непосредственно в терминах $\pi(i, j, \gamma, \delta)$, и параметрическую, в которой вероятности $\pi(i, j, \gamma, \delta)$ выражаются через меньшее число иных параметров. Ряд результатов непараметрической теории парных сравнений (см., например, [1], [4, гл. 11]) непосредственно вытекает из теории бернуллиевских векторов.

В параметрической теории парных сравнений наиболее популярна так называемая линейная модель [12, с. 11], в которой предполагается, что каждому объекту A_i можно сопоставить некоторую «ценность» V_i так, что вероятность предпочтения $\pi(i, j)$ $\pi(i,j)$ (т. е. предполагается дополнительно, что эффект от повторений и от экспертов отсутствует) выражается следующим образом:

$$\pi(i,j)=H(V_i-V_j), \tag{7.4}$$

где $H(x)$ — функция распределения, симметричная относительно 0, т. е.

$$H(-x) = 1 - H(x) \tag{7.5}$$

при всех x.

Широко применяются модели Терстоуна — Мостеллера и Брэдли — Терри, в которых $H(x)$ — соответственно функции нормального и логистического распределений. Поскольку функция $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1 и функция

$$\Psi(x) = e^x (1 + e^x)^{-1}$$

стандартного логистического распределения удовлетворяют (см., например, [23]) соотношению:

$$\sup_{x \in R^1} |\Phi(x) - \Psi(1{,}7x)| < 0{,}01,$$

то, как можно показать [5, гл. 4], для обоснованного выбора по статистическим данным между моделями Терстоуна — Мостеллера и Брэдли — Терри необходимо не менее тысячи наблюдений.

Соотношение (7.4) вытекает из следующей модели поведения эксперта: он измеряет «ценность» V_i и V_j объектов A_i и A_j, но с ошибками ε_i и ε_j соответственно, а затем сравнивает свои оценки ценности объектов $y_i = V_i + \varepsilon_i$ и $y_j = V_j + \varepsilon_j$. Если $y_i > y_j$, то он предпочитает A_i, в противном случае — A_j. Тогда

$$\pi(i, j) = P(\varepsilon_i - \varepsilon_j < V_i - V_j) = H(V_i - V_j). \tag{7.6}$$

Обычно предполагают, что субъективные ошибки эксперта ε_i и ε_j независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Тогда функция распределения $H(x)$ из соотношения (7.6) непрерывна и удовлетворяет функциональному уравнению (7.5).

Существует много разновидностей моделей парных сравнений, постоянно предполагаются новые. В качестве примера опишем модель парных сравнений, основанную не на процедуре упорядочения, а на определении сходства объектов. Пусть каждому объекту A_i соответствует точка a_i в r-мерном евклидовом пространстве R^r. Эксперт «измеряет» a_i и a_j с ошибками ε_i и ε_j соответственно и в случае, если евклидово расстояние между $a_i + \varepsilon_i$ и $a_j + \varepsilon_j$ меньше 1, заявляет о сходстве объектов A_i и A_j, в противном случае — об их различии. Предполагается, что ошибки ε_i и ε_j независимы и имеют одно и то же распределение, например круговое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией координат σ^2. Целью статистической обработки являются определение по результатам парных сравнений оценок параметров $a_1, a_2, \ldots, a_r$ и σ^2, а также проверка согласия опытных данных с моделью.

Множественные сравнения. Рассмотренные модели парных сравнений могут быть обобщены в различных направлениях. Так, можно ввести понятие «ничья» — ситуации, когда эксперт оценивает объекты одинаково. Модели с учетом «ничьих» предполагают, что эксперт может отказаться от выбора одного из объектов и заявить об их эквивалентности, т. е. число возможных ответов увеличивается с 2 до 3. В моделях множественных сравнений эксперту представляется не два объекта, а три или большее число.

Модели, учитывающие «ничьи», строятся обычно с помощью используемых в психофизике «порогов чувствительности»: если $|y_i - y_j| \le r$ (где r — порог чувствительности), то объекты A_i и A_j эксперт объявляет неразличимыми. Приведем пример модели с «ничьими», основанной на другом принципе. Пусть каждому объекту A_i соответствует точка a_i в r-мерном линейном пространстве. Как и прежде, эксперт «измеряет» «объектные точки» a_i и a_j с ошибками ε_i и ε_j соответственно, т. е. принимает решение на основе $y_i = a_i + \varepsilon_i$ и $y_j = a_j + \varepsilon_j$. Если все координаты y_i больше соответствующих координат y_j, то A_i предпочитается A_j. Соответственно, если каждая координата y_i меньше координаты y_j с тем же номером, то эксперт считает наилучшим объект A_j. Во всех остальных случаях эксперт объявляет о ничейной ситуации. Эта модель при $r = 1$ переходит в описанную выше линейную модель. Она связана с принципом Парето в теории группового выбора и предусматривает выбор оптимального по Парето объекта, если он существует (роль согласуемых критериев играют процедуры сравнения значений отдельных координат), и отказ от выбора, если такого объекта нет.

Можно строить модели, учитывающие порядок предъявления объектов при сравнении, зависимость результата сравнения от результатов предшествующих сравнений. Опишем одну из подобных моделей.

Пусть эксперт сравнивает три объекта: A, B, C, причем сначала сравниваются A и B, потом — B и C и, наконец, A и C. Для определенности пусть $A > B$ будет означать, что A более предпочтителен, чем B. Пусть при предъявлении двух объектов

$$P(A > B) = \pi_{AB}, P(B > C) = \pi_{BC}, P(A > C) = \pi_{AC}.$$

Теперь пусть пара B, C предъявляется после пары A, B. Естественно предположить, что высокая оценка B в первом сравнении повышает вероятность предпочтения B и во втором и, наоборот, отрицательное мнение о B в первом сравнении сохраняется и при проведении второго сравнения. Это предположение проще всего учесть в модели следующим образом:

$$P(B > C \mid B > A) = \pi_{BC} + \delta, \quad P(B > C \mid A > B) = \pi_{BC} - \delta,$$

где δ — некоторое положительное число, показывающее степень влияния первого сравнения на второе. По аналогичным причинам вероятности исхода третьего сравнения в зависимости от результатов первых двух можно описать так:

$$P(A > C \mid A > B, B > C) = \pi_{AC} + 2\delta, \quad P(A > C \mid A > B, B < C) = \pi_{AC},$$
$$P(A > C \mid A < B, B > C) = \pi_{AC}, \quad P(A > C \mid A < B, B < C) = \pi_{AC} - 2\delta.$$

Статистическая задача состоит в определении параметров π_{AB}, π_{BC}, π_{AC} и δ по результатам сравнений, проведенных n экспертами, и в проверке адекватности модели.

Ясно, что можно рассматривать и другие модели, в частности учитывающие тягу экспертов к транзитивности ответов. Очевидно, что проблемы построения моделей парных и множественных сравнений относятся не к нечисловой статистике, а к тем прикладным областям эконометрики (организационно-экономического моделирования), для решения задач которых развиваются методы парных сравнений, например к эконометрическому обеспечению организации машиностроительного производства, экономики предприятия, стратегического менеджмента, производственной психологии, изучения поведения потребителей (маркетингу), экспертных исследований и т. д.

Вероятностно-статистические методы и модели парных сравнений. Метод парных сравнений был введен в 1860 г. Г.Т. Фехнером для решения задач психофизики. Расскажем об этом несколько подробнее. Как известно, основателем психофизики по праву считается Густав Теодор Фехнер (1801–1887), а год выхода в свет его фундаментальной работы «Элементы психофизики» (1860) — датой рождения новой науки. В этой работе широко применялся предложенный Г.Т. Фехнером метод парных сравнений (обсуждение событий тех лет с современных позиций дано в монографии [12, с. 14–16]).

С точки зрения математической статистики приведенные выше модели не представляют большого теоретического интереса: оценки параметров находятся обычно методом максимального правдоподобия или асимптотически эквивалентным ему методом одношаговых оценок (см. [4, гл. 6], [24]), а проверка согласия проводится по критерию отношения правдоподобия или асимптотически эквивалентными ему критериями типа хи-квадрат [12]. При этом вычислительные процедуры обычно достаточно сложны и плохо исследованы.

Отметим некоторые сложности при обосновании возможности использования линейных моделей типа (7.4)–(7.6). Вероятностно-статистическая теория достаточно проста, когда предполагается, что каждому отдельному сравнению двух объектов соответствуют свои собственные ошибки экспертов, причем все ошибки независимы в совокупности. Однако это предположение отнюдь не очевидно с содержательной точки зрения. В качестве примера рассмотрим три объекта A, B и C, которые сравнивают попарно: A и B, B и C, A и C. В соответствии со сказанным в рассмотрение вводят 6 ошибок одного и того же эксперта: ε_A и ε_B в первом сравнении, ε'_B и ε_C — во втором, ε'_A и ε'_C — в третьем, причем все эти 6 случайных величин независимы в совокупности.

Между тем естественно думать, что мнения эксперта об одном и том же объекте связаны между собой. То есть ε_A и ε'_A зависимы, равно как ε_B и ε'_B, а также ε_C и ε'_C. Более того, если принять, что точка зрения эксперта полностью определена для него самого, то следует положить $\varepsilon_A = \varepsilon'_A$ и соответственно $\varepsilon_B = \varepsilon'_B$ и $\varepsilon_C = \varepsilon'_C$. При этом, напомним, случайные величины ε_A, ε_B и др. интерпретируются как отклонения мнений отдельных экспертов от истины. Видимо, ошибку эксперта целесообразно считать состоящей из двух слагаемых, а именно: отклонения от истины, вызванного внутренними особенностями эксперта (систематическая погрешность), и колебания мнения эксперта в связи с очередным парным сравнением (случайная погрешность). Игнорирование систематической погрешности облегчает развитие математико-статистической теории, а ее учет приводит к необходимости изучения зависимых парных сравнений.

При обработке результатов парных сравнений первый этап — проверка согласованности. Понятие согласованности уточняется различными способами, но все они имеют один и тот же смысл проверки однородности обрабатываемого материала, т. е. того, что целесообразно агрегировать мнения отдельных экспертов, объединить данные и совместно их обрабатывать. При отсутствии однородности данные разбиваются на группы (классы, кластеры, таксоны) с целью обеспечения однородности внутри отдельных групп. Естественно, согласованность целесообразно проверять, вводя возможно меньше гипотез о структуре данных. Следовательно, целесообразно пользоваться для этого непараметрической теорией парных сравнений, основанной на теории бернуллиевских векторов.

Хорошо известно, что модели парных сравнений с успехом применяются в экспертных и экспериментальных процедурах упорядочивания и выбора. В частности, для анализа голосований, турниров, выбора наилучшего объекта (проекта, образца, кандидатуры); в планировании и анализе сравнительных экспериментов и испытаний; в органолептической экспертизе (в частности, дегустации); при изучении поведения потребителей; визуальной колоритмии (принятии решений на основе цвета), определении индивидуальных рейтингов и вообще изучении предпочтений при выборе и т. д. (подробнее см. [2, 12]).

Бинарные отношения. Еще в начале XX в. был развит один из первых разделов непараметрической статистики — теория ранговой корреляции. Ее можно рассматривать как теорию статистического анализа случайных ранжировок, равномерно распределенных на множестве всех ранжировок. Так, при обработке данных классического психофизического эксперимента по упорядочению кубиков соответственно их весу, подробно описанного в работе [25], оказалась адекватной следующая так называемая T-модель ранжирования.

Пусть имеется t объектов $A_1, A_2, \ldots, A_t$, причем каждому объекту A_i соответствует число a_i, описывающее его положение на шкале изучаемого признака. Испытуемый упорядочивает объекты так, как если бы оценивал соответствующие им значения с ошибками, т. е. находил $y_i = a_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где ε_i — ошибка при рассмотрении i-го объекта, а затем располагал бы объекты в том порядке, в каком располагаются $y_1, y_2, \ldots, y_t$. В этом случае вероятность появления упорядочения $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{it}$ есть $P(y_{i1} < y_{i2} < \ldots < y_{it})$, а ранги $R_1, R_2, \ldots, R_t$ объектов являются рангами случайных величин $y_1, y_2, \ldots, y_t$, полученными при их упорядочении в порядке возрастания. Кроме того, для простоты расчетов в модели предполагается, что ошибки испытуемого $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$ независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2.

Как уже отмечалось, бинарное отношение на множестве из t элементов полностью описывается матрицей из 0 и 1 порядка $t \times t$. Поэтому задать распределение случайного бинарного отношения — это то же самое, что задать распределение вероятностей на множестве всех матриц описанного вида, состоящем из $2^{(t^2)}$ элементов. Пространства ранжировок, разбиений, толерантностей зачастую удобно считать подпространствами пространства всех бинарных отношений, тогда распределения вероятностей на них — частные случаи описанного выше распределения, выделенные тем, что вероятности принадлежности случайного бинарного отношения соответствующим подпространствам равны 1. Распределение произвольного бинарного отношения описывается $2^{(t^2)} - 1$

параметрами, распределение случайной ранжировки (без связей) — ($t! - 1$) параметрами, а описанная выше T-модель ранжирования задается ($t + 1$) параметром. При $t = 4$ эти числа равны соответственно 65 535, 23 и 5.

Первое из этих чисел показывает сложность, а иногда и невозможность использования произвольных бинарных отношений в предназначенных для практического использования вероятностно-статистических моделях, поскольку по имеющимся данным невозможно оценить столь большое число параметров. Приходится ограничиваться теми или иными семействами бинарных отношений — ранжировками, разбиениями, толерантностями и др. Модель произвольной случайной ранжировки при $t = 5$ описывается 119 параметрами, при $t = 6$ — уже 719 параметрами, при $t = 7$ число параметров достигает 5 049, что уже явно за пределами возможности оценивания. В то же время T-модель ранжирования при $t = 7$ описывается всего 8 параметрами, а потому может быть кандидатом для практического использования.

Что естественно предположить относительно распределения случайного элемента со значениями в том или ином пространстве бинарных отношений? Зачастую целесообразно считать, что распределение имеет некий центр, попадание в который наиболее вероятно, а по мере удаления от центра вероятности убывают. Это соответствует естественной модели измерения с ошибкой. В классическом одномерном случае результат подобного измерения обычно описывается унимодальной симметричной плотностью, монотонно возрастающей слева от модального значения, в котором плотность максимальна, и монотонно убывающей справа от него. Чтобы ввести понятие монотонного распределения в пространстве бинарных отношений, будем исходить из метрики в этом пространстве. Воспользовавшись тем, что бинарные отношения C и D однозначно описываются матрицами $\|c_{ij}\|$ и $\|d_{ij}\|$ порядка $t \times t$, рассмотрим расстояние (в несколько другой терминологии — метрику) в пространстве бинарных отношений:

$$d(C,D) = \sum_{1 \le i,j \le t} | c_{ij} - d_{ij} |. \tag{7.7}$$

Метрика (7.7) в различных пространствах бинарных отношений — ранжировок, разбиений, толерантностей — может быть введена с помощью соответствующих систем аксиом (см. ниже). В настоящее время метрику (7.7) обычно называют расстоянием Кемени в честь американского исследователя Джона Кемени, впервые получившего эту метрику исходя из предложенной им системы аксиом для расстояния между упорядочениями (ранжировками).

В статистике нечисловых данных применяются и иные метрики, отличающиеся от расстояния Кемени. Более того, для использования понятия монотонного распределения, о котором сейчас идет речь, нет необходимости требовать выполнения неравенства треугольника, а достаточно, чтобы $d(C, D)$ можно было рассматривать как показатель различия. Под показателем различия понимаем такую функцию $d(C, D)$ двух бинарных отношений C и D, что $d(C, D) = 0$ при $C = D$ и увеличение $d(C, D)$ интерпретируется как возрастание различия между C и D.

Определение 1. Распределение бинарного отношения X называется монотонным с центром в C_0 относительно расстояния (показателя различия) d, если из $d(C, C_0) < d(D, C_0)$ следует, что $P(X = C) > P(X = D)$.

Это определение впервые введено в монографии [2, с. 196]. Оно может использоваться в любых пространствах бинарных отношений и, более того, в любых пространствах из конечного числа элементов, лишь бы в них была введена функция $d(C, D)$ — показатель различия элементов C и D этого пространства. Монотонное распределение унимодально, мода находится в C_0.

Определение 2. Распределение бинарного отношения X называется симметричным относительно расстояния d с центром в C_0, если существует такая функция f: $R_+^1 \to [0, 1]$, что

$$P(X = C) = f(d(C, C_0)). \tag{7.8}$$

Если распределение X монотонно и таково, что из $d(C, C_0) = d(D, C_0)$ следует $P(X = C) = P(X = D)$, то оно симметрично. Если функция f в формуле (7.8) монотонно строго убывает, то соответствующее распределение монотонно в смысле определения 1.

Поскольку толерантность на множестве из t элементов задается $0{,}5t(t-1)$ элементами матрицы из 0 и 1 порядка $t\times t$, лежащими выше главной диагонали, то всего толерантностей имеется $2^{0{,}5t(t-1)}$, а потому распределение на множестве толерантностей задается в общем случае $2^{0{,}5t(t-1)} - 1$ параметрами. Естественно выделить семейство распределений, соответствующее независимым элементам матрицы. Оно задается бернуллиевским вектором (люсианом) с $0{,}5t(t-1)$ параметрами (выше бернуллиевские векторы рассмотрены подробнее). Математическая техника, необходимая для изучения толерантностей с независимыми элементами, существенно проще, чем в случае ранжировок и разбиений. Здесь легко отказаться от условия равномерности распределения. Этому условию соответствует $p_{ij} \equiv 1/2$, в то время как статистические методы анализа люсианов, развитые в статистике нечисловых данных (см., например, работы [2, 26–28]), не налагают никаких существенных ограничений на p_{ij}.

Как уже отмечалось, при обработке мнений экспертов сначала проверяют согласованность. В частности, если мнения экспертов описываются монотонными распределениями, то для согласованности необходимо совпадение центров этих распределений. К сожалению, рассмотренные выше классические методы проверки согласованности для ранжировок, основанные на коэффициентах ранговой корреляции и конкордации, позволяют лишь отвергнуть гипотезу о равнораспределенности, но не установить, можно ли считать, что центры соответствующих экспертам распределений совпадают, или же, например, существует две группы экспертов, каждая со своим центром. Теория случайных толерантностей лишена этого недостатка. Отсюда вытекают следующие практические рекомендации.

Пусть цель обработки экспертных данных состоит в получении ранжировки, отражающей групповое мнение. Однако согласно рекомендуемой процедуре экспертного опроса пусть эксперты не упорядочивают объекты, а проводят парные сравнения, сравнивая каждый из рассматриваемых объектов со всеми остальными, причем ровно один раз. Тогда ответ эксперта — толерантность, но, вообще говоря, не ранжировка, поскольку в ответах эксперта может нарушаться транзитивность.

Возможны ***два пути обработки данных***. *Первый* — превратить ответ эксперта в ранжировку (тем или иным способом «спроектировав» его на пространство ранжировок), а затем проверять согласованность ранжировок с помощью известных критериев. При этом от толерантности перейти к ранжировке можно, например, так. Будем выбирать ближайшую (в смысле применяемого расстояния) матрицу к матрице ответов эксперта из всех, соответствующих ранжировкам без связей.

Второй путь — проверить согласованность случайных толерантностей, а групповое мнение искать с помощью медианы Кемени (подробнее см. ниже) непосредственно по исходным данным, т. е. по толерантностям. Групповое мнение при этом может быть найдено в пространстве ранжировок. Второй путь мы считаем более предпочтительным, поскольку при этом обеспечивается более адекватная проверка согласованности и исключается процедура укладывания мнения эксперта в «прокрустово ложе» ранжировки (эта процедура может приводить как к потере информации, так и к принципиально неверным выводам, вызванным искажениями мнений экспертов).

Области применения статистики бинарных отношений многообразны: ранговая корреляция — оценка величины связи между переменными, измеренными в порядковой шкале; анализ экспертных или экспериментальных упорядочений; анализ разбиений технико-экономических показателей на группы сходных между собой; обработка данных о сходстве (взаимозаменяемости); статистический анализ классификаций; математические вопросы теории менеджмента и др.

Случайные множества. Будем рассматривать случайные подмножества некоторого множества Q. Если Q состоит из конечного числа элементов, то считаем, что случайное подмножество S — это случайный элемент со значениями в 2^Q — множестве всех подмножеств множества Q, состоящем из $2^{card(Q)}$ элементов. Чтобы удовлетворить математиков, считаем, что все подмножества Q измеримы (другими словами, σ-алгебра измеримых множеств совпадает с совокупностью всех подмножеств рассматриваемого конечного множества). Тогда распределение случайного подмножества $S = S(\omega)$ множества Q — это

$$P_S(A) = P(S = A) = \mathrm{P}(\{\omega : S(\omega) = A\}), A \subseteq Q. \tag{7.9}$$

В формуле (7.9) предполагается, что S: $\Omega \to 2^Q$, где (Ω, F, P) — вероятностное пространство, на котором определен случайный элемент $S(\omega)$. (Здесь Ω — пространство элементарных событий, F — σ-алгебра случайных событий, P — вероятностная мера на F.) Через распределение $P_S(A)$ выражаются вероятности различных событий, связанных с S. Так, чтобы найти вероятность накрытия фиксированного элемента q случайным множеством S, достаточно вычислить

$$P(q \in S) = \mathrm{P}(\{\omega : q \in S(\omega)\}) = \sum_{A: q \in A, A \subseteq 2^Q} P(S = A),$$

где суммирование идет по всем подмножествам A множества Q, содержащим q. Пусть $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$. Рассмотрим случайные величины (значения характеристической функции случайного множества), определяемые по случайному множеству S следующим образом:

$$\chi_i(\omega) = \begin{cases} 1, q_i \in S(\omega), \\ 0, q_i \notin S(\omega). \end{cases}$$

Определение 3. Случайное множество S называется случайным множеством с независимыми элементами, если случайные величины $\chi_i(\omega)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, независимы (в совокупности).

Последовательность случайных величин $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ — это бернуллиевский вектор с $X_i = \chi_i$ и $p_i = P(q_i \in S(\omega))$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Из сказанного выше следует, что распределение случайного множества с независимыми элементами задается формулой:

$$P(S = A) = \prod_{q_i \in A} p_i \prod_{q_i \in Q \setminus A} (1 - p_i),$$

т. е. такие распределения образуют $k = card(Q)$ — мерное параметрическое семейство, входящее в $(2^{card(Q)} - 1)$ — одномерное семейство всех распределений случайных подмножеств множества Q.

При исследовании случайных подмножеств произвольного множества Q будем рассматривать их как случайные величины со значениями в некотором пространстве подмножеств множества Q, например в пространстве замкнутых подмножеств 2^Q множества Q.

Представляющими интерес лишь для математиков способами введения измеримой структуры в 2^Q интересоваться не будем. Отсутствие специального интереса к внутриматематической проблеме измеримости связано с тем, что при вероятностно-статистическом моделировании и анализе данных на ЭВМ все случайные подмножества рассматриваются как конечные (т. е. подмножества конечного множества).

Случайные множества находят разнообразные применения в многообразных проблемах эконометрики и математической экономики. В том числе в задачах управления запасами и ресурсами (см. об этом гл. 5 в монографии [2]), в задачах менеджмента и, в частности, маркетинга, в экспертных оценках, например, при анализе мнений голосующих или опрашиваемых, каждый из которых отмечает несколько пунктов из списка, и т. д.

Кроме того, случайные множества применяются в гранулометрии, при изучении пористых сред и объектов сложной природы в таких областях, как металлография, петрография, биология, в частности математическая морфология. Они используются при изучении структуры веществ и материалов, в исследовании процессов распространения, в том числе просачивания, распространения пожаров, экологических загрязнений, при районировании, в изучении областей поражения, например поражения металла коррозией и сердечной мышцы при инфаркте миокарда и т. д. Можно вспомнить о компьютерной томографии, о наглядном представлении сложной информации на экране компьютера, об изучении распространения рекламной информации, о картах Кохонена (популярный метод представления информации при применении нейросетей) и т. д.

Методы ранговой статистики. Ранее установлено, что любой адекватный алгоритм в порядковой шкале является функцией от некоторой матрицы C. Пусть никакие два из результатов наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не совпадают, а $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — их ранги. Тогда элементы матрицы C и ранги результатов наблюдений связаны взаимно однозначным соответствием:

$$r_i = 1 + \sum_{1 \le j \le n} (1 - c_{ij}),$$

а c_{ij} через ранги выражаются так: $c_{ij} = 1$, если $r_i < r_j$, и $c_{ij} = 0$ в противном случае.

Сказанное означает, что при обработке данных, измеренных в порядковой шкале, могут применяться только ранговые статистические методы. Отметим, что часто используемое в непараметрической статистике преобразование $Y = F(X)$ (здесь $F(x)$ — непрерывная функция распределения случайной величины X, причем F предполагается произвольной) фактически означает переход к порядковой шкале, поскольку статистические выводы при этом инвариантны относительно допустимых преобразований в порядковой шкале (т. е. строго возрастающих преобразований).

Разумеется, ранговые статистические методы могут применяться не только при обработке данных, измеренных в порядковой шкале. Так, для проверки независимости двух количественных признаков в случае, когда нет уверенности в нормальности соответствующего двумерного распределения, целесообразно пользоваться коэффициентами ранговой корреляции Кендалла или Спирмена.

В настоящее время (в соответствии с развитием непараметрической статистической теории) с помощью непараметрических и прежде всего ранговых методов можно решать тот же набор задач прикладной статистики, что и с помощью параметрических методов, в частности основанных на предположении нормальности. Однако параметрические методы вошли в массовое сознание исследователей и инженеров и мешают широкому внедрению более обоснованной и прогрессивной ранговой статистики. Так, при проверке однородности двух выборок вместо критерия Стьюдента целесообразно использовать ранговые методы (см. [4, 5] и гл. 2 выше), но пока это делается не всегда.

Объекты общей природы. Вероятностная модель объекта нечисловой природы в общем случае — случайный элемент со значениями в пространстве произвольного вида, а модель выборки таких объектов — совокупность независимых одинаково распределенных случайных элементов. Именно такая модель была использована для обработки наблюдений, каждое из которых — нечеткое множество [18].

Из-за имеющегося разнобоя в терминологии приведем математические определения из основополагающей монографии — справочника по теории вероятностей академика РАН Ю.В Прохорова и профессора Ю.А. Розанова [29].

Пусть (X, B) — некоторое измеримое пространство; (F, B) — измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$ на пространстве элементарных событий (Ω, F, P) (где P — вероятностная мера на σ-алгебре F-измеримых подмножеств Ω, называемых событиями) со значениями в (X, B) называется **случайной величиной** (чаще этот математический объект называют случайным элементом, оставляя термин «случайная величина» за частным случаем, когда X — числовая прямая. — *Прим. А.О.*) в фазовом пространстве (X, B). **Распределением вероятностей** этой случайной величины ξ называется функция $P_\xi = P_\xi(B)$ на σ-алгебре B фазового пространства, определенная как

$$P_\xi = \mathrm{P}\{\xi \in B\}, (B \in B) \qquad (7.10)$$

(распределение вероятностей P_ξ представляет собой вероятностную меру в фазовом пространстве (X, B)) [29, с. 132].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайные величины на пространстве случайных событий (Ω, F, P) в соответствующих фазовых пространствах (X_k, B_k). Совместным распределением вероятностей этих величин называется функция $P_{\xi1, \xi2, \ldots, \xi n} =$ $= P_{\xi1, \xi2, \ldots, \xi n} (B_1, B_2, \ldots, B_n)$, определенная на множествах $B_1 \in B_1$, $B_2 \in B_2, \ldots,$ $B_n \in B_n$ как

$$P_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(B_1,B_2,\ldots,B_n) = P_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \ldots, \xi_n \in B_n). \qquad (7.11)$$

Распределение вероятностей $P_{\xi1, \xi2, \ldots, \xi n}$ как функция на полукольце множеств вида $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, $B_1 \in B_1$, $B_2 \in B_2, \ldots, B_n \in B_n$, в произведении пространств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ представляет собой функцию распределения. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если при любых $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (см. [29, с. 133])

$$P_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(B_1,B_2,\ldots,B_n) = P_{\xi_1}(B_1)P_{\xi_2}(B_2)\ldots P_{\xi_n}(B_n). \qquad (7.12)$$

Предположим, что совместное распределение вероятностей $P_{\xi,\eta}(A, B)$ случайных величин ξ и η абсолютно непрерывно относительно некоторой меры Q

на произведении пространств $X \times Y$, являющейся произведением мер Q_X и Q_Y, т. е.:

$$P_{\xi,\eta}(A,B) = \int_{A \times B} p(x,y) Q(dx,dy) \tag{7.13}$$

для любых $A \in A$ и $B \in B$, где $p(x, y)$ — соответствующая *плотность распределения вероятностей* [29, с. 145].

В формуле (7.13) предполагается, что $\xi = \xi(\omega)$ и $\eta = \eta(\omega)$ — случайные величины на одном и том же пространстве элементарных событий Ω со значениями в фазовых пространствах (X, A) и (Y, B). Существование плотности $p(x, y)$ вытекает из абсолютной непрерывности $P_{\xi,\eta}(A, B)$ относительно Q в соответствии с теоремой Радона — Никодима [30].

Условное распределение вероятностей $P_\xi(A \mid \eta)$, $A \in A$, может быть выбрано одинаковым для всех $\omega \in \Omega$, при которых случайная величина $\eta = \eta(\omega)$ сохраняет одно и то же значение: $\eta(\omega) = y$. При почти каждом $y \in Y$ (относительно распределения P_η в фазовом пространстве (Y, B)) условное распределение вероятностей $P_\xi(A \mid y) = \mathrm{P}_{\omega,\xi}(A)$, где $\omega \in \{\eta = y\}$ и $A \in A$, будет абсолютно непрерывно относительно меры Q_x:

$$Q_{\mathrm{X}}(A) = \int_{A \times \mathrm{X}} Q(dx,dy).$$

Причем соответствующая плотность условного распределения вероятностей будет иметь вид (см. [29, с. 145–146]):

$$p_\xi(x \mid y) = \frac{P_\xi(dx \mid y)}{Q_{\mathrm{X}}(dx)} = \frac{p(x,y)}{\int_{\mathrm{X}} p(x,y) Q_{\mathrm{X}}(dx)}. \tag{7.14}$$

При построении вероятностных моделей реальных явлений важны вероятностные пространства из конечного числа элементарных событий. Для них перечисленные выше общие понятия становятся более прозрачными, в частности снимаются вопросы измеримости (все подмножества конечного множества обычно считаются измеримыми). Вместо плотностей и условных плотностей рассматриваются вероятности и условные вероятности. Отметим, что вероятности можно рассматривать как плотности относительно меры, приписывающей каждому элементу пространства элементарных событий вес 1, т. е. считающей меры:

$$Q(A) = Card(A)$$

(мера каждого множества равна числу его элементов). В целом ясно, что определения основных понятий теории вероятностей в общей ситуации практически не отличаются от таковых в элементарных курсах, во всяком случае с идейной точки зрения.

За последние 30 лет в прикладной статистике сформировалась новая область — нечисловая статистика, или статистика нечисловых данных, она же — статистика объектов нечисловой природы. К настоящему времени она развита не менее, чем ранее выделенные статистика случайных величин, многомерный статистический анализ, статистика временных рядов и случайных процессов. Краткая сводка основных постановок и результатов прикладной статистики в пространствах нечисловой природы дана в настоящей главе (см. также [1, 4]).

Теория, построенная для результатов наблюдений, лежащих в пространствах общей природы, является центральным стержнем в нечисловой статистике. В ее рамках удалось разработать и изучить методы оценивания параметров и характеристик, проверки гипотез (в частности, с помощью статистик интегрального типа), параметрической и непараметрической регрессии (восстановления зависимостей), непараметрического оценивания плотности, дискриминантного и кластерного анализов и т. д.

Вероятностно-статистические методы, развитые для результатов наблюдений, принадлежащих пространствам произвольного вида, позволяют единообразно проводить анализ данных из любого конкретного пространства. Так, в монографии [2] они применены к конечным случайным множествам, в работе [18] — к нечетким множествам. С их помощью установлено поведение обобщенного мнения экспертной комиссии (медианы Кемени) при увеличении числа экспертов, когда ответы экспертов лежат в том или ином пространстве бинарных отношений. Методы классификации могут быть основаны на непараметрических оценках плотности распределения вероятностей в пространстве общей природы. Такие методы были применены для медицинской диагностики в пространстве разнотипных данных, когда часть координат вектора измерена по количественным шкалам, а часть — по качественным, и т. д.

7.4. РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРИРОДЫ

Как показано выше, исходные статистические данные могут иметь различную математическую природу, являться элементами разнообразных пространств: конечномерных, функциональных, бинарных отношений, множеств, нечетких множеств и т. д. Следовательно, центральной частью нечисловой статистики (и прикладной статистики в целом) является статистика в пространствах произвольной природы. Эта область прикладной статистики сама по себе не используется при анализе конкретных данных. Это очевидно, поскольку конкретные данные всегда имеют вполне определенную природу. Однако общие подходы, методы, результаты статистики в пространствах произвольной природы представляют собой научный инструментарий, готовый для применения в каждой конкретной области.

Статистика в пространствах произвольной природы. Много ли общего у статистических методов анализа данных различной природы? На этот естественный вопрос можно сразу же однозначно ответить: да, очень много. Такой ответ будет постоянно подтверждаться и конкретизироваться на протяжении всей главы (см. также [1, 2]). Несколько примеров приведем сразу же.

Прежде всего отметим, что понятия случайного события, вероятности, независимости событий и случайных величин являются общими для любых конечных вероятностных пространств и любых конечных областей значений случайных величин (см. предыдущий раздел). Поскольку все реальные явления и процессы можно описывать с помощью математических объектов, являющихся элементами конечных множеств, сказанное выше означает, что конечных вероятностных пространств и дискретных случайных величин (точнее, величин, принимающих значения в конечном множестве) вполне достаточно для всех практических применений.

Переход к непрерывным моделям реальных явлений и процессов оправдан только тогда, когда он облегчает проведение рассуждений и выкладок. Например, находить определенные интегралы зачастую проще, чем вычислять значения сумм. Не можем не отметить, что приведенные соображения о взаимном соотнесении дискретных и непрерывных математических моделей автор услышал более 30 лет назад от академика А.Н. Колмогорова (ясно, что за конкретную формулировку несет ответственность автор настоящего учебника).

Основные *проблемы прикладной статистики* — описание данных, оценивание, проверка гипотез — также в своей существенной части могут быть рассмотрены в рамках статистики в пространствах произвольной природы. Например, для описания данных могут быть использованы эмпирические и теоретические средние, плотности вероятностей и их непараметрические оценки, регрессионные зависимости. Правда, для этого пространства произвольной природы должны быть снабжены соответствующим математическим инструментарием — расстояниями (показателями близости, мерами различия) между элементами рассматриваемых пространств.

Так, популярный в настоящее время метод оценивания параметров распределений — *метод максимального правдоподобия* — не накладывает каких-либо ограничений на конкретный вид элементов выборки. Они могут лежать в пространстве произвольной природы. Математические условия касаются только свойств плотностей вероятности и их производных по параметрам. Аналогичная ситуация с *методом одношаговых оценок*, идущим на смену методу максимального правдоподобия [4, 34]. Асимптотику решений экстремальных статистических задач достаточно изучить для пространств произвольной природы, а затем применять в каждом конкретном случае [31, 32], когда задачу прикладной статистики удается представить в оптимизационном виде.

Общая теория проверки статистических гипотез также не требует конкретизации математической природы рассматриваемых элементов выборок. Это относится, например, к лемме Неймана — Пирсона или теории статистических решений. Более того, естественная область построения теории статистик интегрального типа — это пространства произвольной природы [4, 33].

Совершенно ясно, что в конкретных областях прикладной статистики накоплено большое число результатов, относящихся именно к этим областям. Особенно это касается областей, исследования в которых ведутся сотни лет, в частности статистики случайных величин (одномерной статистики). Однако принципиально важно указать на «ядро» прикладной статистики — статистику в пространствах произвольной природы. Если постоянно «держать в уме» это «ядро», то становится ясно, что, например, многие методы непараметрической оценки плотности вероятности или кластер-анализа, использующие только расстояния между объектами и элементами выборки, относятся именно к статистике объектов произвольной природы, а не к статистике случайных величин или многомерному статистическому анализу. Следовательно, и применяться они могут во всех областях прикладной статистики, а не только в тех, в которых «родились».

Расстояния (метрики). В пространствах произвольной природы нет операции сложения, поэтому статистические процедуры не могут быть основаны на использовании сумм. Поэтому применяется другой математический инструментарий, использующий понятия типа расстояния.

Как известно, расстоянием в пространстве X называется числовая функция двух переменных $d(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$, определенная на этом пространстве, т. е. в стандартных обозначениях d: $X^2 \to R^1$, где R^1 — прямая, т. е. множество всех действительных чисел. ***Эта функция должна удовлетворять трем условиям*** (иногда их называют аксиомами):

1) неотрицательности: $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, x) = 0$, для любых значений $x \in X$, $y \in X$;

2) симметричности: $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x \in X$, $y \in X$;

3) неравенства треугольника: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ для любых значений $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Для термина «расстояние» математиками часто используется синоним — «метрика».

Пример 1. Если $d(x, x) = 0$ и $d(x, y) = 1$ при $x \neq y$ для любых значений $x \in X$, $y \in X$, то, как легко проверить, функция $d(x, y)$ — расстояние (метрика). Такое расстояние естественно использовать в пространстве X значений номинального признака: если два значения (например, названные двумя экспертами) совпадают, то расстояние равно 0, а если различны — то оно равно 1.

Пример 2. Расстояние, используемое в геометрии, очевидно, удовлетворяет трем приведенным выше аксиомам. Если X — это плоскость, а $x(1)$ и $x(2)$ — координаты точки $x \in X$ в некоторой прямоугольной системе координат, то эту точку естественно отождествить с двумерным вектором $(x(1), x(2))$. Тогда расстояние между точками $x = (x(1), x(2))$ и $y = (y(1), y(2))$ согласно известной формуле аналитической геометрии равно:

$$d(x, y) = \sqrt{(x(1) - y(1))^2 + (x(2) - y(2))^2}.$$

Пример 3. Евклидовым расстоянием в пространстве R^k векторов вида $x = (x(1), x(2), \ldots, x(k))$ и $y = (y(1), y(2), \ldots, y(k))$ размерности k называется

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{k} (x(j) - y(j))^2 \right)^{1/2}.$$

В примере 2 рассмотрен частный случай примера 3 с $k = 2$.

Пример 4. В пространстве R^k векторов размерности k используют также так называемое блочное расстояние, имеющее вид:

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{k} \left| x(j) - y(j) \right|.$$

Блочное расстояние соответствует длине пути при передвижении по городу, разбитому на кварталы горизонтальными и вертикальными (на плане города) улицами. В результате можно передвигаться только параллельно одной из осей координат.

Пример 5. В пространстве функций, элементами которого являются функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \le t \le 1$, часто используют расстояние Колмогорова:

$$d(x, y) = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|.$$

Пример 6. Пространство функций, элементами которого являются функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \le t \le 1$, превращают в метрическое пространство (т. е. в пространство с метрикой), вводя расстояние:

$$d_p(x, y) = \left(\int_0^1 (x(t) - y(t))^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Это пространство обычно обозначают L^p, где параметр $p \ge 1$ (при $p < 1$ не выполняются аксиомы метрического пространства, в частности аксиома треугольника).

Пример 7. Рассмотрим пространство квадратных матриц порядка k. Как ввести расстояние между матрицами $A = \|a(i, j)\|$ и $B = \|b(i, j)\|$? Можно сложить расстояния между соответствующими элементами матриц:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |a(i, j) - b(i, j)|.$$

Пример 8. Предыдущий пример наводит на мысль о следующем полезном свойстве расстояний. Если на некотором пространстве определены два или больше расстояний, то их сумма — также расстояние.

Пример 9. Пусть A и B — множества. Расстояние между множествами можно определить формулой:

$$d(A, B) = \mu(A \Delta B).$$

Здесь μ — мера на рассматриваемом пространстве множеств; Δ — символ симметрической разности множеств:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

Если мера так называемая считающая, т. е. приписывающая единичный вес каждому элементу множества, то введенное расстояние есть число несовпадающих элементов в множествах A и B.

Пример 10. Между множествами можно ввести и другое расстояние:

$$d_1(A,B)=\frac{\mu(A\Delta B)}{\mu(A\bigcup B)}.$$

В ряде задач прикладной статистики используются функции двух переменных, для которых выполнены не все три аксиомы расстояния, а только некоторые. Их обычно называют показателями различия, поскольку чем больше различаются объекты, тем больше значение функции. Иногда в том же смысле используют термин «мера близости». Он менее удачен, поскольку большее значение функции соответствует меньшей близости.

Чаще всего отказываются от аксиомы, требующей выполнения неравенства треугольника, поскольку это требование не всегда находит обоснование в конкретной прикладной ситуации.

Пример 11. В конечномерном векторном пространстве показателем различия является

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{k}(x(j)-y(j))^2$$

(сравните с примером 3).

Показателями различия, но не расстояниями являются такие популярные в прикладной статистике показатели, как дисперсия или средний квадрат ошибки при оценивании.

Иногда отказываются также и от аксиомы симметричности.

Пример 12. Показателем различия чисел x и y является

$$d(x,y)=\left|\frac{x}{y}-1\right|.$$

Такой показатель различия используют в ряде процедур экспертного оценивания.

Что же касается первой аксиомы расстояния, то в различных постановках прикладной статистики ее обычно принимают. Вполне естественно, что наименьший показатель различия должен достигаться, причем именно на совпадающих объектах. Имеет ли смысл это наименьшее значение делать отличным от 0? Вряд ли, поскольку всегда можно добавить одну и ту же константу ко всем значениям показателя различия и тем самым добиться выполнения первой аксиомы.

В прикладной статистике используются самые разные расстояния и показатели различия, о них идет речь в соответствующих разделах настоящего учебника и других литературных источников [1, 2, 4, 34–37].

7.5. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

В нечисловой статистике (и в организационно-экономическом моделировании в целом) используют большое количество метрик и показателей различия (см. примеры в предыдущем разделе). Как обоснованно выбрать то или иное расстояние для использования в конкретной задаче? В 1959 г. американский статистик Джон Кемени предложил использовать аксиоматический подход, согласно которому следует сформулировать естественные для конкретной задачи аксиомы и вывести из них вид метрики. Этот подход получил большую популярность в нашей стране после выхода в 1972 г. перевода на русский язык книги Дж. Кемени и Дж. Снелла [38], в которой дана система аксиом для расстояния Кемени между упорядочениями. (Упорядочения, как и иные бинарные отношения, естественно представить в виде квадратных матриц из 0 и 1; тогда расстояние Кемени — это расстояние из примера 7 предыдущего раздела.)

Последовала большая серия работ, в которых из тех или иных систем аксиом выводился вид метрики или показателя различия для различных видов данных, прежде всего для объектов нечисловой природы. Многие полученные результаты описаны в монографии [2] и обзоре [36], содержащем 161 ссылку, в том числе 69 на русском языке. Рассмотрим некоторые задачи аксиоматического введения расстояний.

Аксиоматическое введение расстояния между толерантностями. Напомним, что толерантность — это бинарное отношение, являющееся рефлексивным и симметричным. Его обычно используют для описания отношения сходства между реальными объектами, отношений знакомства или дружбы между людьми. От отношения эквивалентности отличается тем, что свойство транзитивности не предполагается обязательно выполненным. Действительно, Иванов может быть знаком с Петровым, Петров — с Сидоровым, но при этом ничего необычного нет в том, что Иванов и Сидоров не знакомы между собой.

Пусть множество X, на котором определено отношение толерантности, состоит из конечного числа элементов: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Тогда толерантность описывается квадратной матрицей $A = \|a(i, j)\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, такой, что $a(i, j) = 1$, если x_i и x_j связаны отношением толерантности, и $a(i, j) = 0$ в противном случае. Матрица A симметрична: $a(i, j) = a(j, i)$, на главной диагонали стоят единицы: $a(i, i) = 1$. Любая матрица, удовлетворяющая приведенным в предыдущей фразе условиям, является матрицей, соответствующей некоторому отношению толерантности. Матрице A можно сопоставить неориентированный граф с вершинами в точках X: вершины x_i и x_j соединены ребром тогда и только тогда, когда $a(i, j) = 1$. Толерантности используются, в частности, при проведении экспертных исследований (см. гл. 5).

Будем говорить, что толерантность A_3 лежит между толерантностями A_1 и A_2, если при всех i, j число $a_3(i, j)$ лежит между числами $a_1(i, j)$ и $a_2(i, j)$, т. е. выполнены либо неравенства $a_1(i, j) \le a_3(i, j) \le a_2(i, j)$, либо неравенства $a_1(i,j) \ge a_3(i, j) \ge a_2(i, j)$.

Теорема 7.1 [2]. Пусть:

1) $d(A_1, A_2)$ — метрика в пространстве толерантностей, определенных на конечном множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$;

2) $d(A_1, A_3) + d(A_3, A_2) = d(A_1, A_2)$ тогда и только тогда, когда A_3 лежит между A_1 и A_2;

3) если отношения толерантности A_1 и A_2 отличаются только на одной паре элементов, т. е. $a_1(i, j) = a_2(i, j)$ при $(i, j) \ne (i_0, j_0)$, $i < j$, $i_0 < j_0$, и $a_1(i_0, j_0) \ne$ $\ne a_2(i_0, j_0)$, то $d(A_1, A_2) = 1$.

Тогда

$$d(A_1, A_2) = \sum_{1 \le i < j \le k} | a_1(i, j) - a_2(i, j) | = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} | a_1(i, j) - a_2(i, j) |.$$

Таким образом, расстояние $d(A_1, A_2)$ только постоянным множителем 1/2 отличается от расстояния Кемени, введенного в пространстве всех бинарных отношений как расстояние Хемминга между описывающими отношения матрицами из 0 и 1 (см. пример 7 предыдущего раздела). Теорема 7.1 дает аксиоматическое введение расстояния в пространстве толерантностей. Оказалось, что фактически оно является сужением расстояния Кемени на это пространство. Сам Дж. Кемени дал аналогичную систему аксиом для сужения на пространство упорядочений. Доказательство теоремы 7.1 вытекает из рассмотрений, связанных с аксиоматическим введением расстояний между множествами, и приводится ниже.

Мера симметрической разности как расстояние между множествами. Как известно, бинарное отношение можно рассматривать как подмножество декартова квадрата X^2 того множества X, на котором оно определено. Поэтому теорему 7.1 можно рассматривать как аксиоматическое введение расстояния между множествами специального вида. Укажем систему аксиом для расстояния между множествами общего вида, описанного в примере 9 предыдущего раздела.

Определение 1. Множество B находится между множествами A и C, если $(A \cap C) \subseteq B \subseteq (A \cup C)$.

С помощью определения 1 в совокупности множеств вводятся геометрические соотношения, использование которых полезно для восприятия рассматриваемых ситуаций.

Расстояние между двумя точками в евклидовом пространстве не изменится, если обе точки сдвинуть на один и тот же вектор. Аналогичное свойство расстояния между множествами сформулируем в виде аксиомы 1. Оно соответствует аксиоме 3 Кемени и Снелла [38, с. 22] для расстояний между упорядочениями.

Аксиома 1. Если $A \cap C = B \cap C = \varnothing$, то $d(A, B) = d(A \cup C, B \cup C)$.

Определение 2. Непустая система множеств называется кольцом, если для любых двух входящих в нее множеств в эту систему входят их объединение, пересечение и разность. Множество X называется единицей системы множеств, если оно входит в эту систему, а все остальные множества системы являются подмножествами X. Кольцо множеств, содержащее единицу, называется алгеброй множеств [30, с. 38].

Теорема 7.2. Пусть W — алгебра множеств, d: $W^2 \to R^1$. Тогда аксиома 1 эквивалентна следующему условию: $d(A, B) = d(A \setminus B, B \setminus A)$ для любых $A, B \in W$.

Доказательство. Поскольку

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing, \ \ (B \setminus A) \notin \cap (A \cap B) = \varnothing,$$

то равенство $d(A, B) = d(A \setminus B, B \setminus A)$ следует из аксиомы 1. Обратное утверждение вытекает из того, что в условиях аксиомы 1

$$(A \cup C) \setminus (B \cup C) = A \setminus B, \ \ (B \cup C) \setminus (A \cup C) = B \setminus A.$$

Теорема 7.2 доказана.

С целью внести в алгебру множеств W отношение «находиться между», аналогичное используемому при аксиоматическом введении расстояний в пространствах бинарных отношений (см. условие 2 в теореме 7.1), примем следующую аксиому.

Аксиома 2. Если B лежит между A и C, то $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.

Определение 3 [30]. Неотрицательная функция μ, определенная на алгебре множеств W, называется мерой, если для любых двух непересекающихся множеств A и B из W справедливо соотношение:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Понятие меры — это обобщение понятий длины линии, площади фигуры, объема тела.

Теорема 7.3. Пусть W — алгебра множеств, аксиомы 1 и 2 выполнены для функции d: $W^2 \to [0; +\infty]$. Функция d симметрична: $d(A, B) = d(B, A)$ для любых A и B из W. Тогда существует, и притом единственная, мера μ на W, такая, что

$$d(A, B) = \mu(A \Delta B) \tag{7.15}$$

при всех A и B из W, где $A\Delta B$ — симметрическая разность множеств A и B, т. е. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Доказательство. Положим

$$\mu(B) = d(\varnothing, B), \quad B \in W. \tag{7.16}$$

Покажем, что определенная формулой (7.16) функция множества μ является мерой. Неотрицательность μ следует из неотрицательности d. Остается доказать аддитивность, т. е. что из $A \cap B = \varnothing$ следует, что

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \; A \in W, B \in W. \tag{7.17}$$

Поскольку A всегда лежит между $\varnothing$ и $A \cup B$, то по аксиоме 2

$$\mu(A \cup B) = d(\varnothing, A \cup B) = d(\varnothing, A) + d(A, A \cup B) = \mu(A) + d(A, A \cup B). \tag{7.18}$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то по аксиоме 1 $d(\varnothing, B) = d(A, A \cup B)$, откуда с учетом (7.18) и следует (7.17).

Докажем соотношение (7.15). Поскольку $A \setminus B$ и $B \setminus A$ имеют пустое пересечение, то согласно определению 1 пустое множество $\varnothing$ лежит между $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Поэтому по аксиоме 2

$$d(A \setminus B, B \setminus A) = d(A \setminus B, \varnothing) + d(\varnothing, B \setminus A).$$

Из симметричности и соотношения (7.16) следует, что

$$d(A \setminus B, \varnothing) = d(\varnothing, A \setminus B) = \mu(A \setminus B),$$

откуда $d(A \setminus B, B \setminus A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A)$. Из соотношения (7.17) следует, что $\mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \Delta B)$. С другой стороны, по аксиоме 1

$$d(A \setminus B, B \setminus A) = d((A \setminus B) \bigcup (A \bigcap B), (B \setminus A) \bigcup (A \bigcap B)) = d(A, B).$$

Из трех последних равенств вытекает справедливость равенства (7.15).

Остается доказать единственность меры μ в соотношении (7.15). Поскольку $A \Delta B = B$ при $A = \varnothing$, то из (7.15) следует (7.16), т. е. однозначность определения меры $\mu = \mu(d)$ по расстоянию d. Теорема 7.3 доказана.

Теорема 7.4 (обратная). Пусть μ — мера, определенная на алгебре множеств W. Тогда функция $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ является псевдометрикой, для нее выполнены аксиомы 1 и 2.

Доказательство. То, что функция $d(A, B)$ из (7.15) задает псевдометрику, хорошо известно (см., например, [39, с. 79]). Доказательство аксиомы 2 со держится в [40, с. 181–183]. Аксиома 1 следует из того, что условия $A \bigcap C = B \bigcap C = \varnothing$ обеспечивают справедливость соотношений:

$$(A \bigcup C) \Delta (B \bigcup C) = ((A \bigcup C) \setminus (B \bigcup C)) \bigcup ((B \bigcup C) \setminus (A \bigcup C)) = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = A \Delta B.$$

Замечание. Полагая в аксиоме 2 $A = B = C$, получаем, что $d(A, A) + d(A, A) = d(A, A)$, т. е. $d(A, A) = 0$. Согласно теоремам 7.3 и 7.4, из условий теоремы 7.3 следует неравенство треугольника. Таким образом, в теореме 7.3 действительно приведена система аксиом, определяющая семейство псевдометрик в пространстве множеств.

Обсудим независимость (друг от друга) условий теоремы 7.3. Отбрасывание неотрицательности функции d приводит к тому, что слово «мера» в 7.3 и 7.4 необходимо заменить на «заряд» [30, с. 328]. Этот термин обозначает аддитивную функцию множеств, не обладающую свойством неотрицательности. Заряд можно представить как разность двух мер.

Функция $d_1(A,B) = \sqrt{\mu(A\Delta B)}$ является псевдометрикой, для нее выполнена аксиома 1, но не выполнена аксиома 2, следовательно, ее нельзя представить в виде (7.15).

Приведем пример системы множеств W и метрики в ней, для которых верна аксиома 2, но не верна аксиома 1, а потому эту метрику нельзя представить в виде (7.15). Пусть W состоит из множеств $\varnothing, A, B, A\cup B$, причем $A\cap B = \varnothing$, а расстояния таковы:

$$d(\varnothing,A) = d(\varnothing,B) = 1,\ d(A,A\cup B) = d(B,A\cup B) = d(A,B) = 2,\ d(\varnothing,A\cup B) = 3.$$

Если единица X алгебры множеств W конечна, т. е. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, то расстояние (7.15) принимает вид:

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \,|\, \chi_A(x_i) - \chi_B(x_i) \,|, \tag{7.19}$$

где χ_C — индикатор (индикаторная функция) множества C, т. е. $\chi_C(x) = 1$, если $x \in C$, и $\chi_C(x) = 0$ в противном случае. Как следует из теоремы 7.3, неотрицательный коэффициент μ_i — это мера одноэлементного множества $\{x_i\}$, а также расстояние этого множества от пустого множества, т. е.

$$\mu_i = \mu(\{x_i\}) = d(\varnothing, \{x_i\}).$$

Если все коэффициенты μ_i положительны, то формула (7.19) определяет метрику, если хотя бы один равен 0, то псевдометрику, поскольку в таком случае найдутся два различающиеся между собой множества A и B, такие, что $d(A, B) = 0$.

Расстояние определяется однозначно, если априори известны коэффициенты μ_i. В частности, равноправность объектов (элементов единицы алгебры множеств X) приводит к $\mu_i \equiv 1$. Требование равноправности содержится в аксиомах 2 и 4 Кемени [38, с. 21–22].

Применим полученные результаты к толерантностям и докажем теорему 7.1. Совокупность всех толерантностей, определенных на конечном множестве Y, естественным образом ассоциируется с совокупностью всех подмножеств множества $X = \{(y_i, y_j), 1 \le i < j \le k\}$. Именно пара (y_i, y_j) входит в подмножество тогда и только тогда, когда y_i и y_j связаны отношением толерантности. Указанная совокупность подмножеств является алгеброй множеств с единицей X. Определение 1 понятия «находиться между» для множеств полностью соответствует ранее данному определению понятия «находиться между» для толерантностей.

Теорема 7.5. Пусть выполнены условия 1 и 2 теоремы 7.1 и аксиома 1. Тогда существуют числа $\mu_{ij} > 0$, такие, что

$$d(A,B) = \sum_{1 \le ii < j \le k} \mu_{ij} \,|\, a(i,j) - b(i,j) \,|. \tag{7.20}$$

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 7.3. Поскольку в условии 1 требуется, чтобы функция $d(A, B)$ являлась метрикой, то необходимо $\mu_{ij} > 0$.

Теорема 7.6. Пусть выполнены условия теоремы 7.1 и, кроме того, аксиома 1. Тогда верно заключение теоремы 7.1.

Доказательство. Рассмотрим толерантность A, для которой $a(i, j) = 1$ при $(i, j) = (i_0, j_0)$ и $a(i, j) = 0$ в противном случае. Согласно условию 3 теоремы 7.1 $d(\varnothing, A) = 1$, а согласно (7.20) имеем $d(\varnothing, A) = \mu_{i_0 j_0}$. Следовательно, коэффициент $\mu_{i_0 j_0} = 1$, что и требовалось доказать.

Для окончательного доказательства теоремы 7.1 осталось избавиться от требования справедливости аксиомы 1.

Доказательство теоремы 7.1. Рассмотрим две толерантности A и B, такие, что при представлении их в виде множеств $A \subseteq B$. Это означает, что $a(i, j) \le b(i, j)$ при всех i, j. Поскольку X — конечное множество, то существует конечная последовательность толерантностей $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, A_t$, такая, что $A_1 = A, A_t = B, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_m \subseteq \ldots \subseteq A_t$, причем A_{m+1} получается из A_m заменой ровно одного значения $a_m(i_m, j_m) = 0$ на $a_{m+1}(i_m, j_m) = 1$, для $(i, j) \ne (i_m, j_m)$ при этом $a_m(i, j) = a_{m+1}(i, j)$. Тогда A_m находится между A_{m-1} и A_{m+1}, следовательно, по условию 2:

$$d(A,B) = d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \ldots + d(A_m, A_{m+1}) + \ldots + d(A_{t-1}, A_t).$$

По условию 3 $d(A_m, A_{m+1}) = 1$ при всех m, а потому заключение теоремы 7.1 верно для любых A и B, таких, что $A \subseteq B$.

Поскольку $A \cap B$ лежит между A и B, то по условию 2:

$$d(A, B) = d(A \cap B, A) + d(A \cap B, B).$$

При этом $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$. Применяя результат предыдущего абзаца, получаем, что заключение теоремы 7.1 верно всегда.

Замечание 1. Таким образом, условие 3 не только дает нормировку, но и заменяет аксиому 1.

Замечание 2. Условие 1 теоремы 7.1 не использовалось в доказательстве, но было приведено в первоначальной публикации [41], чтобы подчеркнуть цель рассуждения. По той же причине оно сохранено в формулировке теоремы 7.1, хотя в доказательстве удалось без него обойтись. Понадобилась только симметричность функции d.

Аксиоматическое введение метрики в пространстве неотрицательных суммируемых функций. Рассмотрим пространство $L(E, \mu)$ неотрицательных суммируемых функций на множестве E с мерой μ. Далее в настоящем разделе будем рассматривать только функции из пространства $L(E, \mu)$. Интегрирование всюду проводится по множеству (пространству) E и по мере μ. Будем писать $g = h$ или $g \le h$, если указанные соотношения справедливы почти всюду по μ на E (т. е. могут нарушаться лишь на множестве нулевой меры).

Аксиоматически введем расстояние в пространстве $L(E, \mu)$ (изложение следует работе [42]). Обозначим $M(g, h) = \max(g, h)$ и $m(g, h) = \min(g, h)$. Пусть функция D: $L(E, \mu) \times L(E, \mu) \to R^1$ — тот основной объект изучения, аксиомы для которого будут сейчас сформулированы.

Аксиома 1. Если $gh = 0$, $g + h \ne 0$, то $D(g, h) = 1$.

Аксиома 2. Если $h \le g$, то $D(g, h) = C\int(g - h)d\mu$, где множитель C не зависит от h, т. е. $C = C(g)$.

Лемма. Из аксиом 1, 2 следует, что для $h \le g \ne 0$

$$D(g,h) = \frac{\int (g-h)d\mu}{\int g d\mu}.$$

Для доказательства заметим, что по аксиоме 1 $D(g, 0) = 1$, а по аксиоме 2 $D(g, 0) = C\int g d\mu$, откуда $C = (\int g d\mu)^{-1}$. Подставляя это соотношение в аксиому 2, получаем заключение леммы.

Требование согласованности расстояния в пространстве $L(E, \mu)$ с отношением «находиться между» приводит, как и ранее для расстояния $d(A, B)$, к следующей аксиоме.

Аксиома 3. Для любых g и h справедливо равенство $D(g, h) = D(M(g, h), g) + D(M(g, h), h)$.

Замечание. В ряде реальных ситуаций естественно считать, что наибольшее расстояние между элементами пространства множеств (которое без ограничения общности можно положить равным 1), т. е. наибольшее несходство, соответствует множествам, не имеющим общих элементов. Расстояние, введенное в теореме 7.3 (формула (7.15)), этому условию не удовлетворяет. Поэтому в пространстве множеств была аксиоматически введена [36] так называемая D-метрика (от англ. *dissimilarity* — несходство), для которой это условие выполнено. Она имеет вид:

$$D(A,B)=\begin{cases}\dfrac{\mu(A\Delta B)}{\mu(A\bigcup B)}, & \mu(A\bigcup B)>0,\\ 0, & \mu(A)=\mu(B)=0.\end{cases} \tag{7.21}$$

Приведенные выше аксиомы являются обобщениями соответствующих аксиом для D-метрики в пространстве множеств.

Теорема 7.7. Из аксиом 1–3 следует, что

$$D(g,h)=\begin{cases}\dfrac{\int|g-h|\,d\mu}{\int M(g,h)d\mu}, & g+h\neq 0,\\ 0, & g=h=0.\end{cases} \tag{7.22}$$

Доказательство. Поскольку

$$(M(g, h) - g) + (M(g, h) - h) = |g - h|,$$

то заключение теоремы 7.7 при $g + h \neq 0$ вытекает из леммы и аксиомы 3. Из аксиомы 2 при $g = 0$ следует, что $D(0, 0) = 0$. Легко видеть, что функция D, заданная формулой (7.22), удовлетворяет аксиомам 1–3 и, кроме того, $D(g, h) \leq 1$ при любых g и h.

Замечание. Если g и h — индикаторные функции множеств, то форму0 ла (7.22) переходит в формулу (7.21). Если g и h — функции принадлежности нечетких множеств, то формула (7.22) задает метрику в пространстве нечетких множеств, а именно D-метрику в этом пространстве [36].

Теорема 7.8. Функция $D(g, h)$, определенная формулой (7.22), является метрикой в $L(E, \mu)$ (при отождествлении функций, отличающихся лишь на множестве нулевой меры), причем $D(g, f) + D(\mathrm{f}, h) = D(g, h)$ тогда и только тогда, когда $f = g$, $f = h$ или $f = M(g, h)$.

Доказательство. Обратимся к определению метрики. Для рассматриваемой функции непосредственно очевидна справедливость условий неотрицательности и симметричности. Очевидна и эквивалентность условия $D(g, h) = 0$ равенству $g = h$. Остается доказать неравенство треугольника и установить, когда оно обращается в равенство.

Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемые расстояния задаются верхней строкой формулы (7.22) и, кроме того,

$$R = \int M(g,f)d\mu - \int M(f, h)d\mu \geq 0$$

(частные случаи с использованием нижней строки формулы (7.22) рассматриваются элементарно, а справедливости последнего неравенства можно добиться заменой обозначений функций — элементов пространства $L(E, \mu)$). Тогда

$$D(g,f)+D(f,h) \geq \frac{\int(|g-f|+|f-h|)d\mu}{\int M(g,f)d\mu}, \tag{7.23}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $R = 0$ или $f = h$. Положим

$$P = \int (|g-f| + |f-h| - |g-h|)\, d\mu,\ Q = \int(M(g,f) - M(g, h))d\mu.$$

Ясно, что $P \geq 0$ и

$$\frac{\int(|g-f|+|f-h|)d\mu}{\int M(g,f)d\mu} = \frac{\int|g-h|\,d\mu+P}{\int M(g,h)d\mu+Q}. \tag{7.24}$$

Если $Q < 0$, то, очевидно, неравенство треугольника выполнено, причем неравенство является строгим. Рассмотрим случай $Q > 0$.

Воспользуемся следующим элементарным фактом: если $y \geq x$, $y > 0$, $P > Q > 0$, то

$$\frac{x+P}{y+Q} > \frac{x}{y}. \tag{7.25}$$

Из соотношений (7.24) и (7.25) вытекает, что для доказательства неравенства треугольника достаточно показать, что $P - Q > 0$.

Рассмотрим

$$k = \{|g - f| + |f - h| - |g - h|\} - M(g, f) + M(g, h).$$

Применяя равенство $(M(g, h) - g) + (M(g, h) - h) = |g - h|$ к слагаемым, заключенным в фигурные скобки, получаем, что

$$k = M(f, h) + [M(g, f) + M(f, h) - M(g, h) - 2f].$$

Применяя соотношение

$$M(g, h) = g + h - m(g, h) \tag{7.26}$$

к слагаемым, заключенным в квадратные скобки, получаем, что

$$k = M(f, h) - m(f, h) - m(g, f) + m(g, h).$$

Так как $M(f, h) - m(f, h) = |f - h|$, то

$$k = |f - h| - (m(g, f) - m(g, h)) \geq (f - h) - (m(g, f) - m(g, h)). \tag{7.27}$$

В соответствии с (7.26) правая часть (7.27) есть $M(g, f) - M(g, h)$, а потому

$$P - Q = \int k d\mu \geq Q > 0,$$

что завершает доказательство для случая $Q > 0$. При этом неравенство треугольника является строгим.

Осталось рассмотреть случай $Q = 0$. В силу соотношений (7.23) и (7.24) неравенство треугольника выполнено. Когда оно обращается в равенство? Тривиальные случаи: $f = g$ или $f = h$. Если же f отлично от g и h, то необходимо, чтобы $R = 0$ и $P = 0$. Как легко проверить, последнее условие эквивалентно неравенствам:

$$m(g, h) \leq f \leq M(g, h). \tag{7.28}$$

Из правого неравенства в (7.28) следует, что $M(g,f) \le M(g, M(g, h)) = M(g, h)$. Так как $Q = 0$, то $M(g,f) = M(g, h)$. Аналогичным образом из соотношений

$$M(h,f) \le M(h, M(g, h)) = M(g, h) = M(g,f)$$

и $R = 0$ следует, что $M(f, h) = M(g, h)$.

Рассмотрим измеримое множество $X = \{x \in E\colon h(\mathrm{x}) < g(x)\}$. Тогда $M(g, h)(x) = M(f, h)(x) = g(\mathrm{x}) > h(x)$, т. е. $h(x) < f(x) = M(g, h)(x)$ для почти всех $x \in X$. Для почти всех $y \in \{x \in E\colon h(x) > g(x)\}$ точно так же получаем $f(y) = M(g, h)(y)$. Для почти всех $z \in \{x \in E\colon h(x) = g(x)\}$ в силу (7.28) $f(z) = M(g, h)(z)$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Назовем функции g и h подобными, если существует число $b > 0$, такое, что $g = bh$. Тогда при $0 < b \le 1$ имеем $D(g, h) = 1 - b$, т. е. расстояние между подобными функциями линейно зависит от коэффициента подобия. Далее, пусть $a > 0$, тогда $D(ag, ah) = D(g, h)$. Таким образом, метрика (7.22) инвариантна по отношению к преобразованиям подобия, которые образуют группу допустимых преобразований в шкале отношений. Это дает основания именовать метрику (7.22) метрикой подобия [42].

7.6. ЭМПИРИЧЕСКИЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ

Одна из основных статистических процедур — вычисление средних величин для тех или иных совокупностей данных. Законы больших чисел состоят в том, что эмпирические средние сходятся к теоретическим. В классическом варианте: выборочное среднее арифметическое при определенных условиях сходится по вероятности при росте числа слагаемых к математическому ожиданию. На основе законов больших чисел обычно доказывают состоятельность различных статистических оценок. В целом эта тематика занимает заметное место в теории вероятностей и математической статистике.

Однако математический аппарат при этом основан на свойствах сумм случайных величин (векторов, элементов линейных пространств). Следовательно, он не пригоден для изучения вероятностных и статистических проблем, связанных со случайными объектами нечисловой природы. Это такие объекты, как бинарные отношения, нечеткие множества, вообще элементы пространств без векторной структуры. Объекты нечисловой природы все чаще встречаются в прикладных исследованиях. Много конкретных примеров приведено выше в этой главе. Поэтому необходимо научиться усреднять различные нечисловые данные, т. е. определять эмпирические и теоретические средние в пространствах произвольной природы. Кроме того, представляется полезным получение законов больших чисел в пространствах нечисловой природы.

Для осуществления сформулированной научной программы ***необходимо решить следующие задачи***:

А. Определить понятие эмпирического среднего.

Б. Определить понятие теоретического среднего.

В. Ввести понятие сходимости эмпирических средних к теоретическому.

Г. Доказать при тех или иных комплексах условий сходимость эмпирических средних к теоретическому.

Д. Обобщив это доказательство, получить метод обоснования состоятельности различных статистических оценок.

Е Дать применения полученных результатов при решении конкретных задач.

Ввиду принципиальной важности рассматриваемых результатов приводим в настоящей главе доказательство закона больших чисел, а также результаты компьютерного анализа множества эмпирических средних.

Определения средних величин. Пусть X — пространство произвольной природы, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ — его элементы. Чтобы ввести эмпирическое среднее для $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, будем использовать действительнозначную (т. е. с числовыми значениями) функцию $f(x, y)$ двух переменных со значениями в X. В стандартных математических обозначениях: $f: X^2 \to R^1$. Величина $f(x, y)$ интерпретируется как показатель различия между x и y: чем $f(x, y)$ больше, тем x и y сильнее различаются. В качестве f можно использовать расстояние в X, квадрат расстояния и т. п.

Определение 1. Средней величиной для совокупности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (относительно меры различия f), обозначаемой любым из трех способов:

$$x_{cp} = E_n(f) = E_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; f),$$

называем решение оптимизационной задачи:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) \to \min, \qquad y \in X. \tag{7.29}$$

Это определение согласуется с классическими определениями средних величин. Если $X = R^1$, $f(x, y) = (x - y)^2$, то x_{cp} — выборочное среднее арифметическое (точнее, множество решений задачи (7.29) состоит из одного элемента, и этот элемент — выборочное среднее арифметическое). Если же $X = R^1$, $f(x, y) = |x - y|$, то при $n = 2k + 1$ имеем $x_{ср} = x(k + 1)$ (точнее, $x_{ср}$ — это множество $\{x(k + 1)\}$, состоящее из одного элемента $x(k + 1)$), при $n = 2k$ эмпирическое среднее является отрезком $[x(k), x(k + 1)]$. Здесь через $x(i)$ обозначен i-й член вариационного ряда, построенного по $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, т. е. i-я порядковая статистика. Таким образом, при $X = R^1$, $f(x, y) = |x - y|$ решение задачи (7.29) дает естественное определение выборочной медианы. Правда, несколько отличающееся от определения, обычно предлагаемого в курсах «Общей теории статистики», в котором при $n = 2k$ выборочной медианой называют полусумму двух центральных членов вариационного ряда $(x(k) + x(k + 1)) / 2$. Иногда $x(k)$ называют левой медианой, а $x(k + 1)$ — правой медианой [2].

Решением задачи (7.29) является множество $E_n(f)$, которое может быть пустым, состоять из одного или многих элементов. Выше приведен пример, когда решением является отрезок. Если $X = R^1 \setminus \{x_0\}$, $f(x, y) = (x - y)^2$, а среднее арифметическое выборки равно x_0, то $E_n(f)$ пусто.

При моделировании реальных ситуаций часто можно принять, что X состоит из конечного числа элементов. Тогда множество $E_n(f)$ непусто — минимум на конечном множестве всегда достигается.

Понятия случайного элемента $x = x(\omega)$ со значениями в X, его распределения, независимости случайных элементов используем согласно определениям разд. 7.3, т. е. согласно каноническому справочнику Ю.В. Прохорова и Ю.А. Ро-занова [29]. Будем считать, что функция f измерима относительно σ-алгебры, участвующей в определении случайного элемента $x = x(\omega)$. Тогда $f(x(\omega), y)$ при фиксированном y является действительнозначной случайной величиной. Предположим, что она имеет математическое ожидание.

Определение 2. Теоретическим средним $E(x, f)$ (другими словами, математическим ожиданием) случайного элемента $x = x(\omega)$ относительно меры различия f называется решение оптимизационной задачи

$$Mf(x(\omega), y) \to \min, y \in X. \tag{7.30}$$

Это определение, как и для эмпирических средних, согласуется с классическим. Если $X = R^1$, $f(x, y) = (x - y)^2$, то $E(x, f) = M(x(\omega))$ — обычное математическое ожидание (точнее, множество решений задачи (7.30) состоит из одного элемента, и этот элемент — математическое ожидание $M(x(\omega))$). При этом $\min M\, f(x(\omega), y)$ — дисперсия случайной величины $x = x(\omega)$. Если же $X = R^1$,

$f(x, y) = |x - y|$, то $E(x, f) = [a, b]$, здесь $a = \sup\{t: F(t) \leq 0{,}5\}$, $b = \inf\{t: F(t) \geq 0{,}5\}$, где $F(t)$ — функция распределения случайной величины $x = x(\omega)$. Если график $F(t)$ имеет плоский участок на уровне $F(t) = 0{,}5$, то медиана — теоретическое среднее в смысле определения 2 — является отрезком. В классическом случае обычно говорят, что каждый элемент отрезка $[a; b]$ является одним из возможных значений медианы. Поскольку наличие указанного плоского участка — исключительный случай, то обычно решением задачи (7.30) является множество из одного элемента $a = b$, т. е. классическая медиана распределения случайной величины $x = x(\omega)$.

Теоретическое среднее $E(x, f)$ можно определить лишь тогда, когда $Mf(x(\omega), y)$ существует при всех $y \in X$. Оно может быть пустым множеством, например, если $X = R^1 \setminus \{x_0\}$, $f(x, y) = (x - y)^2$, $x_0 = M(x(\omega))$. И то, и другое исключается, если X конечно. Однако и для конечных X теоретическое среднее может состоять не из одного, а из многих элементов. Отметим, однако, что в множестве всех распределений вероятностей на X подмножество тех распределений, для которых $E(x, f)$ состоит более чем из одного элемента, имеет коразмерность 1, поэтому основной является ситуация, когда множество $E(x, f)$ содержит единственный элемент [2].

Существование средних величин. Под существованием средних величин будем понимать непустоту множеств решений соответствующих оптимизационных задач.

Если X состоит из конечного числа элементов, то минимум в задачах (7.29) и (7.30) берется по конечному множеству. А потому, как уже отмечалось, эмпирические и теоретические средние существуют.

Пусть число элементов X бесконечно. Ввиду важности обсуждаемой темы приведем точные формулировки и доказательства. Для строгого математического изложения нам понадобятся термины из раздела математики под названием «общая топология». Топологические термины и результаты будем использовать в соответствии с классической монографией [34]. Так, топологическое пространство называется бикомпактным в том и только в том случае, когда из каждого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие [34, с. 183].

Теорема 7.9. Пусть X — бикомпактное пространство, функция f непрерывна на X^2 (в топологии произведения). Тогда эмпирическое и теоретическое средние существуют.

Доказательство. Функция $f(x_i, y)$ от y непрерывна, сумма непрерывных функций непрерывна, непрерывная функция на бикомпакте достигает своего минимума, откуда и следует заключение теоремы относительно эмпирического среднего.

Перейдем к теоретическому среднему. По теореме Тихонова [34, с. 194] из бикомпактности X вытекает бикомпактность X^2. Для каждой точки (x, y) из X^2 рассмотрим $\varepsilon / 2$ — окрестность в X^2 в смысле показателя различия f, т. е. множество

$$U(x, y) = \{(x', y') : | f(x, y) - f(x', y') | < \varepsilon / 2\}.$$

Поскольку f непрерывна, то множества $U(x, y)$ открыты в рассматриваемой топологии в X^2. По теореме Уоллеса [34, с. 193] существуют открытые (в X) множества $V(x)$ и $W(y)$, содержащие x и y соответственно, и такие, что их декартово произведение $V(x) \times W(y)$ целиком содержится внутри $U(x, y)$.

Рассмотрим покрытие X^2 открытыми множествами $V(x) \times W(y)$. Из бикомпактности X^2 вытекает существование конечного подпокрытия $\{V(x_i) \times W(y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m\}$. Для каждого x из X рассмотрим все декартовы произведения $V(x_i) \times W(y_i)$, куда входит точка (x, y) при каком-либо y. Таких декартовых произведений и их первых множителей $V(x_i)$ конечное число. Возьмем пересечение таких первых множителей $V(x_i)$ и обозначим его $Z(x)$. Это пересечение открыто, как пересечение конечного числа открытых множеств, и содержит точку x. Из покрытия бикомпактного пространства X открытыми множествами $Z(x)$ выберем открытое подпокрытие $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$.

Покажем, что если x'_1 и x'_2 принадлежат одному и тому же Z_j при некотором j, то

$$\sup\{| f(x'_1, y) - f(x'_2, y) |, y \in X\} < \varepsilon. \tag{7.31}$$

Пусть $Zj = Z(x_0)$ при некотором x_0. Пусть $V(x_i) \times W(y_i)$, $i \in I$, — совокупность всех тех исходных декартовых произведений из системы $\{V(x_i) \times W(y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m\}$, куда входят точки (x_0, y) при различных y. Покажем, что их объединение содержит также точки (x'_1, y) и (x'_2, y) при всех y. Действительно, если (x_0, y) входит в $V(x_i) \times W(y_i)$, то y входит в $W(y_i)$, а x'_1 и x'_2 вместе с x_0 входят в $V(x_i)$, поскольку x'_1, x'_2 и x_0 входят в $Z(x_0)$. Таким образом, (x'_1, y) и (x'_2, y) принадлежат $V(x_i) \times W(y_i)$, а потому согласно определению $V(x_i) \times W(y_i)$:

$$| f(x'_1, y) - f(x_i, y_i) | < \varepsilon / 2, \quad | f(x'_2, y) - f(x_i, y_i) | < \varepsilon / 2,$$

откуда и следует неравенство (7.31).

Поскольку X^2 — бикомпактное пространство, то функция f ограничена на X^2, а потому существует математическое ожидание $Mf(x(\omega), y)$ для любого случайного элемента $x(\omega)$, удовлетворяющего приведенным выше условиям согласования топологии, связанной с f, и измеримости, связанной с $x(\omega)$. Если x_1 и x_2 принадлежат одному открытому множеству Z_j, то

$$|Mf(x_1, y) - Mf(x_2, y)| < \varepsilon,$$

а потому функция

$$g(y) = Mf(x(\omega), y) \tag{7.32}$$

непрерывна на X. Поскольку непрерывная функция на бикомпактном множестве достигает своего минимума, т. е. существуют такие точки z, на которых $g(z) = \inf\{g(y), y \in X\}$, то теорема 7.9 доказана.

В ряде интересных для приложений ситуаций X не является бикомпактным пространством. Например, если $X = R^1$. В этих случаях приходится наложить на показатель различия f некоторые ограничения, например так, как это сделано в теореме 7.10.

Теорема 7.10. Пусть X — топологическое пространство, непрерывная (в топологии произведения) функция f: $X^2 \to R^2$ неотрицательна, симметрична (т. е. $f(x, y) = f(y, x)$ для любых x и y из X), существует число $D > 0$, такое, что при всех x, y, z из X

$$f(x, y) \le D\{f(x, z) + f(z, y)\}. \tag{7.33}$$

Пусть в X существует точка x_0, такая, что при любом положительном R множество $\{x\colon f(x, x_0) \le R\}$ является бикомпактным. Пусть для случайного элемента $x(\omega)$, согласованного с топологией в рассмотренном выше смысле, существует $g(x_0) = Mf(x(\omega), x_0)$.

Тогда существуют (т. е. непусты) математическое ожидание $E(x, f)$ и эмпирические средние $E_n(f)$.

Замечание. Условие (7.33) — некоторое обобщение неравенства треугольника. Например, если g — метрика в X, а $f = g^p$ при некотором натуральном p, то для f выполнено соотношение (7.33) с $D = 2^p$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(y)$, определенную формулой (7.32). Имеем

$$f(x(\omega), y) \le D\ \{f(x(\omega), x_0) + f(x_0, y)\}. \tag{7.34}$$

Поскольку по условию теоремы $g(x_0)$ существует, а потому конечно, то из оценки (7.34) следует существование и конечность $g(y)$ при всех y из X. Докажем непрерывность этой функции.

Рассмотрим шар (в смысле меры различия f) радиуса R с центром в x_0:

$$K(R) = \{x: f(x, x_0) \le R\}, R > 0.$$

В соответствии с условием теоремы $K(R)$ как подпространство топологического пространства X является бикомпактным. Рассмотрим произвольную точку x из X. Справедливо разложение:

$$f(x(\omega), y) = f(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \in K(R)) + f(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \notin K(R)),$$

где $\chi(C)$ — индикатор множества C. Следовательно,

$$g(y) = Mf(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \in K(R)) + Mf(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \notin K(R)). \tag{7.35}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (7.35). В силу (7.33)

$$f(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \notin K(R)) \le D\{f(x(\omega), x_0)\chi(x(\omega) \notin K(R)) + f(x_0, y)\chi(x(\omega) \notin K(R))\}. \tag{7.36}$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей (7.36):

$$Mf(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \notin K(R)) \le D\int_R^{+\infty} tdP\{f(x(\omega), x_0) \le t\} + Df(x_0, y)P(x(\omega) \notin K(R)). \tag{7.37}$$

В правой части (7.37) оба слагаемых стремятся к 0 при безграничном возрастании R: первое — в силу того, что

$$g(x_0) = Mf(x(\omega), x_0) = \int_0^{+\infty} tdP(f(x(\omega), x_0) \le t) < \infty,$$

второе — в силу того, что распределение случайного элемента $x(\omega)$ сосредоточено на X и

$$X \setminus \bigcup_{R>0} K(R) = \varnothing.$$

Пусть $U(x)$ — такая окрестность x (т. е. открытое множество, содержащее x), для которой

$$\sup\{f(y, x), y \in U(x)\} < +\infty.$$

Имеем

$$f(y, x_0) \le D(f(x_0, x) + f(x, y)). \tag{7.38}$$

В силу (7.37) и (7.38) при безграничном возрастании R

$$Mf(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \notin K(R)) \to 0 \tag{7.39}$$

равномерно по $y \in U(x)$. Пусть $R(0)$ таково, что левая часть (7.39) меньше $\varepsilon > 0$ при $R > R(0)$ и, кроме того, $y \in U(x) \subseteq K(R(0))$. Тогда при $R > R(0)$

$$|g(y) - g(x)| \le |Mf(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \in K(R)) - Mf(x(\omega), x)\chi(x(\omega) \in K(R))| + 2\varepsilon. \tag{7.40}$$

Нас интересует поведение выражения в правой части формулы (7.40) при $y \in U(x)$. Рассмотрим f_1 — сужение функции f на замыкание декартова произведения множеств $U(x) \times K(R)$, и случайный элемент $x_1(\omega) = x(\omega)\chi(x(\omega) \in K(R))$. Тогда

$$Mf(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \in K(R)) = Mf_1(x_1(\omega), y)$$

при $y \in U(x)$, а непрерывность функции $g_1(y) = Mf_1(x_1(\omega), y)$ была доказана в теореме 7.9. Последнее означает, что существует окрестность $U_1(x)$ точки x, такая, что

$$|Mf_1(x_1(\omega), y) - Mf_1(x_1(\omega), x)| < \varepsilon \tag{7.41}$$

при $y \in U_1(x)$. Из (7.40) и (7.41) вытекает, что при $y \in U(x) \cap U_1(x)$

$$|g(y) - g(x)| < 3\varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность функции $g(x)$.

Докажем существование математического ожидания $E(x, f)$. Пусть $R(0)$ таково, что

$$P(x(\omega) \in K(R(0))) > 1/2. \tag{7.42}$$

Пусть H — некоторая константа, значение которой будет выбрано позже. Рассмотрим точку x из множества $K(HR(0))^C$ — дополнения $K(HR(0))$, т. е. из внешности шара радиуса $HR(0)$ с центром в x_0. Пусть $x(\omega) \in K(R(0))$. Тогда имеем

$$f(x_0, x) \leq D\{f(x_0, x(\omega)) + f(x(\omega), x)\},$$

откуда

$$f(x(\omega), x) \geq \frac{1}{D} f(x_0, x) - f(x_0, x(\omega)) \geq \frac{HR(0)}{D} - R(0). \tag{7.43}$$

Выбирая H достаточно большим, получим с учетом условия (7.42), что при $x \in K(HR(0))^C$ справедливо неравенство:

$$Mf(x(\omega), x) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{HR(0)}{D} - R(0)\right). \tag{7.44}$$

Можно выбрать H так, чтобы правая часть (7.44) превосходила $g(x_0) =$ $= Mf(x(\omega), x_0)$.

Сказанное означает, что Argmin $g(x)$ достаточно искать внутри бикомпактного множества $K(HR(0))$. Из непрерывности функции g вытекает, что ее минимум достигается на указанном бикомпактном множестве, а потому — и на всем X. Существование (непустота) теоретического среднего $E(x, f)$ доказана.

Докажем существование эмпирического среднего $E_n(f)$. Есть искушение проводить его дословно, так же как и доказательство существования математического ожидания $E(x, f)$, лишь с заменой 1/2 в формуле (7.44) на частоту попадания элементов выборки x_i в шар $K(R(0))$. Эта частота, очевидно, стремится к вероятности попадания случайного элемента $x = x(\omega)$ в $K(R(0))$, большей 1/2 в соответствии с (7.42). Однако это рассуждение показывает лишь, что вероятность непустоты $E_n(f)$ стремится к 1 при безграничном росте объема выборки. Точнее, оно показывает, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{E_n(f) \neq \varnothing \wedge E_n(f) \subseteq K(HR(0))\} = 1.$$

Поэтому пойдем другим путем, не опирающимся к тому же на вероятностную модель выборки. Положим

$$R(1) = \max\{f(x_i, x_0), i = 1,2,..., n\}. \tag{7.45}$$

Если x входит в дополнение шара $K(HR(1))$, то аналогично (7.43) имеем

$$f(x_i, x_0) \geq \frac{HR(1)}{D} - R(1). \tag{7.46}$$

При достаточно большом H из (7.45) и (7.46) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, x_0) \leq nR(1) < \sum_{i=1}^{n} f(x_i, x), \quad x \in \{K(HR(1))\}^C.$$

Следовательно, Argmin достаточно искать на $K(HR(1))$. Заключение теоремы 7.10 следует из того, что на бикомпактном пространстве $K(HR(1))$ минимизируется непрерывная функция.

Теорема 7.10 полностью доказана. Перейдем к законам больших чисел.

7.7. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

О формулировках законов больших чисел. Пусть x, x_1, x_2, x_3, …, x_n — независимые одинаково распределенные случайные элементы со значениями в X. Закон больших чисел — это утверждение о сходимости эмпирических средних к теоретическому среднему (математическому ожиданию) при росте объема выборки n, т. е. утверждение о том, что

$$E_n(f) = E_n(x_1, x_2, x_3,..., x_n; f) \to E(x, f) \tag{7.47}$$

при $n \to \infty$. Однако и слева, и справа в формуле (7.47) стоят, вообще говоря, множества. Поэтому понятие сходимости в (7.47) требует обсуждения и определения.

В силу классического закона больших чисел при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) \to Mf(x, y) \tag{7.48}$$

в смысле сходимости по вероятности, если правая часть существует ([43], теорема А.Я. Хинчина, 1923 г.).

Если пространство X состоит из конечного числа элементов, то из соотношения (7.48) легко вытекает (см., например, [2, с. 192–193]), что

$$\lim_{n\to\infty} P\{E_n(f) \subseteq E(x, f)\} = 1. \tag{7.49}$$

Другими словами, $E_n(f)$ является состоятельной оценкой $E(x, f)$.

Если $E(x, f)$ состоит из одного элемента, $E(x, f) = \{x_0\}$, то соотношение (7.49) переходит в следующее:

$$\lim_{n\to\infty} P\{E_n(f) = \{x_0\}\} = 1. \tag{7.50}$$

Однако с прикладной точки зрения доказательство соотношений (7.49)–(7.50) не дает достаточно уверенности в возможности использования $E_n(f)$ в качестве оценки $E(x, f)$. Причина в том, что в процессе доказательства объем выборки предполагается настолько большим, что при всех $y \in X$ одновременно левые части соотношений (7.48) сосредотачиваются в непересекающихся окрестностях правых частей.

Замечание. Если в соотношении (7.48) рассмотреть сходимость с вероятностью 1, то аналогично (7.49) получим так называемый усиленный закон больших чисел [2, с. 193–194]. Согласно этой теореме с вероятностью 1 эмпирическое среднее $E_n(f)$ входит в теоретическое среднее $E(x, f)$, начиная с некоторого объема выборки n, вообще говоря, случайного, $n = n(\omega)$. Мы не будем останавливаться на сходимости с вероятностью 1, поскольку в соответствующих постановках, подробно разобранных в монографии [2], нет принципиальных отличий от случая сходимости по вероятности.

Если X не является конечным, например $X = R^1$, то соотношения (7.49) и (7.50) неверны. Поэтому необходимо искать иные формулировки закона больших чисел. В классическом случае сходимости выборочного среднего арифметического к математическому ожиданию, т. е. $\bar{x} \to M(x)$, можно записать закон больших чисел так: для любого ε > 0 справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\bar{x} \in (M(x)-\varepsilon;\ \ M(x)+\varepsilon)\} = 1. \tag{7.51}$$

В этом соотношении в отличие от (7.49) речь идет о попадании эмпирического среднего $E_n(f) = \bar{x}$ не непосредственно внутрь теоретического среднего $E(x, f)$, а в некоторую окрестность теоретического среднего (для случайных величин с непрерывными функциями распределения вероятность совпадения выборочного среднего арифметического и математического ожидания, т. е. вероятность выполнения соотношений (7.49) и (7.50), равна 0).

Обобщим эту формулировку. Как задать окрестность теоретического среднего в пространстве произвольной природы? Естественно взять его окрестность, определенную с помощью какой-либо метрики. Однако полезно обеспечить на ее дополнении до X отделенность множества значений $Mf(x(\omega), y)$ как функции y от минимума этой функции на всем X.

Поэтому мы сочли целесообразным определить такую окрестность с помощью самой функции $Mf(x(\omega), y)$.

Определение 1. Для любого ε > 0 назовем ε-пяткой функции $g(x)$ множество:

$$K_\varepsilon(g) = \{x : g(x) < \inf\{d(y), y \in X\} + \varepsilon, x \in X\}.$$

Таким образом, в ε-пятку входят все те x, для которых значение $g(x)$ либо минимально, либо отличается от минимального (или от инфимума — точной нижней грани) не более чем на ε. Так, для $X = R^1$ и функции $g(x) = x^2$ минимум равен 0, а ε-пятка имеет вид интервала (–√ε; √ε). В формулировке (7.51) классического закона больших чисел утверждается, что при любом ε > 0 вероятность попадания среднего арифметического в √ε-пятку математического ожидания стремится к 1. Поскольку ε > 0 произвольно, то вместо √ε-пятки можно говорить о ε -пятке, т. е. перейти от (7.51) к эквивалентной записи:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\bar{x} \in K_\varepsilon(M(x(\omega)-x)^2\} = 1. \tag{7.52}$$

Соотношение (7.52) допускает непосредственное обобщение на общий случай пространств произвольной природы.

Схема закона больших чисел. Пусть x, x_1, x_2, x_3, …, x_n — независимые одинаково распределенные случайные элементы со значениями в пространстве произвольной природы X с показателем различия f: $X^2 \to R^1$. Пусть выполнены некоторые математические условия регулярности. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} P\{E_n(f) \subseteq K_\varepsilon(E(x,f))\} = 1. \qquad (7.53)$$

Аналогичным образом может быть сформулирована и общая идея усиленного закона больших чисел. Ниже приведены две конкретные формулировки «условий регулярности».

Законы больших чисел. Начнем с рассмотрения естественного обобщения конечного множества — бикомпактного пространства X.

Теорема 7.11. В условиях теоремы 7.9 разд. 7.6 справедливо соотношение (7.53).

Доказательство. Воспользуемся построенным при доказательстве теоремы 7.9 разд. 7.6 конечным открытым покрытием $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_k\}$ пространства X, таким, что для него выполнено соотношение (7.31) разд. 7.6. Построим на его основе разбиение X на непересекающиеся множества W_1, W_2, …, W_m (объединение элементов разбиения W_1, W_2, …, W_m составляет X). Это можно сделать итеративно. На первом шаге из Z_1 следует вычесть Z_2, …, Z_k — это и будет W_1. Затем в качестве нового пространства надо рассмотреть разность X и W_1, а покрытием его будет $\{Z_2, \ldots, Z_k\}$. И так до k-го шага, когда последнее из рассмотренных покрытий будет состоять из единственного открытого множества Z_k. Остается из построенной последовательности W_1, W_2, …, W_k вычеркнуть пустые множества, которые могли быть получены при осуществлении описанной процедуры (поэтому, вообще говоря, m может быть меньше k).

В каждом из элементов разбиения W_1, W_2, …, W_m выберем по одной точке, которые назовем центрами разбиения и соответственно обозначим w_1, w_2, …, w_m. Это и есть то конечное множество, которым можно аппроксимировать бикомпактное пространство X. Пусть y входит в W_j. Тогда из соотношения (7.31) разд. 7.6 вытекает, что

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, w_j)\right| < \varepsilon. \qquad (7.54)$$

Перейдем к доказательству соотношения (7.53). Возьмем произвольное $\delta > 0$. Рассмотрим некоторую точку b из $E(x, f)$. Доказательство будет основано на том, что с вероятностью, стремящейся к 1, для любого y вне $K_\delta(E(x, f))$ выполнено неравенство:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, b). \qquad (7.55)$$

Для обоснования этого неравенства рассмотрим все элементы разбиения $W_1, W_2, \ldots, W_m$, имеющие непустое пересечение с внешностью δ-пятки $K_\delta(E(x, f))$. Из неравенства (7.54) следует, что для любого y вне $K_\delta(E(x, f))$ левая часть неравенства (7.55) не меньше

$$\min_j \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, w_j) \right) - \varepsilon, \qquad (7.56)$$

где минимум берется по центрам всех элементов разбиения, имеющим непустое пересечение с внешностью δ-пятки. Возьмем теперь в каждом таком разбиении точку v_i, лежащую вне δ-пятки $K_\delta(E(x, f))$. Тогда из неравенств (7.31) разд. 7.6 и (7.56) следует, что левая часть неравенства (7.55) не меньше

$$\min_j \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, v_j) \right) - 2\varepsilon. \qquad (7.57)$$

В силу закона больших чисел для действительнозначных случайных величин каждая из участвующих в соотношениях (7.55) и (7.57) средних арифметических имеет своими пределами соответствующие математические ожидания, причем в соотношении (7.57) эти пределы не менее

$$Mf(x(\omega), b) + \delta - 2\varepsilon,$$

поскольку точки v_i лежат вне δ-пятки $K_\delta(E(x, f))$. Следовательно, при

$$\delta - 2\varepsilon > 0$$

и достаточно большом n, обеспечивающем необходимую близость рассматриваемого конечного числа средних арифметических к их математическим ожиданиям, справедливо неравенство (7.55).

Из неравенства (7.55) следует, что пересечение $E_n(f)$ с внешностью $K_\delta(E(x, f))$ пусто. При этом точка b может входить в $E_n(f)$, а может и не входить. Во втором случае $E_n(f)$ состоит из иных точек, входящих в $K_\delta(E(x, f))$. Теорема 7.11 доказана.

Если X не является бикомпактным пространством, то необходимо суметь оценить рассматриваемые суммы «на периферии», вне бикомпактного ядра, которое обычно выделяется естественным путем. Один из возможных комплексов условий сформулирован выше в теореме 7.10 разд. 7.6.

Теорема 7.12. В условиях теоремы 7.10 разд. 7.6 справедлив закон больших чисел, т. е. соотношение (7.53).

Доказательство. Будем использовать обозначения, введенные в теореме 7.10 разд. 7.6 и при ее доказательстве. Пусть r и R, $r < R$, — положительные числа. Рассмотрим точку x в шаре $K(r)$ и точку y вне шара $K(R)$. Поскольку

$$f(x_0, y) \le D\{f(x_0, x) + f(x, y)\},$$

то

$$f(x,y) \ge \frac{1}{D} f(x_0, y) - f(x_0, x) \ge \frac{R}{D} - r. \qquad (7.58)$$

Положим

$$g_n(x) = g_n(x, \omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, x).$$

Сравним $g_n(x_0)$ и $g_n(y)$. Выборку x_1, x_2, x_3, …, x_n разобьем на две части. В первую часть включим те элементы выборки, которые входят в $K(r)$, во вторую — все остальные (т. е. лежащие вне $K(r)$). Множество индексов элементов первой части обозначим $I = I(n, r)$. Тогда в силу неотрицательности f имеем

$$g_n(y) \ge \frac{1}{n}\sum_{i\in I} f(x_i, y),$$

а в силу неравенства (7.58)

$$\sum_{i\in I} f(x_i, y) \ge \left(\frac{R}{D} - r\right) Card I(n, r),$$

где $CardI(n, r)$ — число элементов в множестве индексов $I(n, r)$. Следовательно,

$$g_n(y) \geq \frac{1}{n}\left(\frac{R}{D} - r\right)J, \tag{7.59}$$

где $J = CardI(n, r)$ — биномиальная случайная величина $B(n, p)$ с вероятностью успеха $p = P\{x_i(\omega) \in K(r)\}$. По теореме Хинчина для $g_n(x_0)$ справедлив (классический) закон больших чисел. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $n_1 = n_1(\varepsilon)$ так, чтобы при $n > n_1$ было выполнено соотношение:

$$P\{g_n(x_0) - g(x_0) > \varepsilon\} < \varepsilon, \tag{7.60}$$

где $g_n(x_0) = Mf(x_1, x_0)$. Выберем r так, чтобы вероятность успеха $p > 0{,}6$. По теореме Бернулли можно выбрать $n_2 = n_2(\varepsilon)$ так, чтобы при $n > n_2$

$$P\{J > 0{,}5n\} > 1 - \varepsilon. \tag{7.61}$$

Выберем R так, чтобы

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{D} - r\right) > g(x_0) + \varepsilon.$$

Тогда

$$K_\varepsilon(g) \subseteq K(R) \tag{7.62}$$

и согласно (7.59), (7.60) и (7.61) при $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$ с вероятностью не менее $1 - \varepsilon$ имеем

$$g_n(y) > g_n(x_0) \tag{7.63}$$

для любого y вне $K(R)$. Из (7.62) следует, что минимизировать g_n достаточно внутри бикомпактного шара $K(R)$, при этом $E_n(f)$ не пусто и

$$E_n(f) \subseteq K(R) \tag{7.64}$$

с вероятностью не менее $1-2\varepsilon$.

Пусть g'_n и g' — сужения g_n и $g(x) = Mf(x(\omega), x)$ соответственно на $K(R)$ как функций от x. В силу (7.62) справедливо равенство $K_\varepsilon(g') = K_\varepsilon(f)$. Согласно доказанной выше теореме 7.11 найдется $n_4 = n_4(\omega)$, такое, что

$$P(K_0(g_n^{'}) \subseteq K_\varepsilon(g)) > 1 - \varepsilon.$$

Согласно (7.64) с вероятностью не менее $1 - 2\varepsilon$

$$K_0(g_n^{'}) = E_n(f)$$

при $n > n_3$. Следовательно, при $n > n_5(\varepsilon) = \max(n_3, n_4)$ имеем

$$P(E_n(f) \subseteq K_\varepsilon(g)) > 1 - 3\varepsilon,$$

что и завершает доказательство теоремы 7.12.

Справедливы и иные варианты законов больших чисел, полученные, в частности, в статьях [31, 44]. Разберем важный для прикладных исследований пример.

Медиана Кемени и экспертные оценки. Рассмотрим на основе развитой выше теории частный случай пространств нечисловой природы — пространство бинарных отношений на конечном множестве $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ и его подпространства. Как известно, каждое бинарное отношение A можно описать матрицей $\|a(i, j)\|$ из 0 и 1, причем $a(i, j) = 1$, тогда и только тогда q_i и q_j находятся в отношении A, и $a(i, j) = 0$ в противном случае. Напомним определение расстояния Кемени (см. начало разд. 7.5).

Определение 2. Расстоянием Кемени между бинарными отношениями A и B, описываемыми матрицами $\|a(i, j)\|$ и $\|b(i, j)\|$ соответственно, называется

$$d(A,B) = \sum_{i,j=1}^{k} | a(i,j) - b(i,j) | .$$

Замечание. Иногда в определение расстояния Кемени вводят множитель, зависящий от k.

Определение 3. Медианой Кемени для выборки, состоящей из бинарных отношений, называется эмпирическое среднее, построенное с помощью расстояния Кемени.

Замечание. В определение медианы Кемени входит множество, по которому проводится минимизация. Сам Дж. Кемени рассматривал минимизацию по пространству упорядочений [38]. Можно минимизировать по пространству отношений эквивалентности или по пространству отношений толерантности, по всем бинарным отношениям, а также по иным множествам, например по совокупности ответов экспертов — тогда медианой Кемени будет мнение того эксперта, который оказался «в центре» мнений членов экспертной комиссии.

Поскольку число бинарных отношений на конечном множестве конечно, то эмпирические и теоретические средние для произвольных показателей различия существуют и справедливы законы больших чисел, описанные формулами (7.49) и (7.50) выше.

Бинарные отношения, в частности упорядочения, часто используются для описания мнений экспертов. Тогда расстояние Кемени измеряет близость мнений экспертов, а медиана Кемени позволяет находить итоговое усредненное мнение комиссии экспертов. Расчет медианы Кемени обычно включают в информационное обеспечение систем принятия решений с использованием оценок экспертов. Речь идет, например, о математическом обеспечении автоматизированного рабочего места «Математика в экспертизе» (АРМ МАТЭК), предназначенного, в частности, для использования при проведении экспертиз в задачах экологического страхования. Поэтому представляет большой практический интерес численное изучение свойств медианы Кемени при конечном объеме выборки. Такое изучение дополняет описанную выше асимптотическую теорию, в которой объем выборки предполагается безгранично возрастающим ($n \to \infty$).

Компьютерное изучение свойств медианы Кемени при конечных объемах выборок. С помощью специально разработанной программной системы В.Н. Жихарев провел ряд серий численных экспериментов по изучению свойств выборочных медиан Кемени. Представление о полученных результатах дается табл. 7.2, взятой из статьи [45]. В каждой серии методом статистических испытаний определенное число раз моделировался случайный и независимый выбор одинаково распределенных экспертных ранжировок, а затем находились все медианы Кемени для смоделированного набора мнений экспертов. При этом в сериях 1–5 распределение ответа эксперта предполагалось равномерным на множестве всех ранжировок. В серии 6 это распределение являлось монотонным относительно расстояния Кемени с некоторым центром (о понятии монотонности см. разд. 7.3), т. е. вероятность выбора определенной ранжировки убывала с увеличением расстояния Кемени этой ранжировки от центра. Таким образом, серии 1–5 соответствуют ситуации, когда у экспертов нет почвы для согласия, нет группировки их мнений относительно некоторого единого среднего группового мнения, в то время как в серии 6 есть единое мнение — описанный выше центр, к которому тяготеют ответы экспертов.

Таблица 7.2

Вычислительный эксперимент по изучению медианы Кемени

Номер серии	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Число испытаний	100	1 000	50	50	1 000	1 000
Количество объектов	5	5	7	7	5	5
Количество экспертов	10	30	10	30	10	10
Частота непустого пересечения	0,85	0,58	0,52	0,2	0,786	0,911
Среднее отношение диаметров	0,283	0,124	0,191	0,0892	0,202	0,0437
Средняя мощность медианы	5,04	2,41	6,4	2,88	3,51	1,35
Максимальная мощность медианы	30	14	19	11	40	12

Результаты, приведенные в табл. 7.2, можно комментировать разными способами. Неожиданным явилось большое число элементов в выборочной медиане Кемени — как среднее, так и особенно максимальное. Одновременно обращает на себя внимание убывание этих чисел при росте числа экспертов и особенно при переходе к ситуации реального существования группового мнения (серия 6). Достаточно часто один из ответов экспертов входит в медиану Кемени (т. е. пересечение множества ответов экспертов и медианы Кемени непусто), а диаметр медианы как множества в пространстве ранжировок заметно меньше диаметра множества ответов экспертов. По этим показателям наилучшее положение в серии 6. Грубо говоря, всяческие «патологии» в поведении медианы Кемени наиболее резко проявляются в ситуации, когда ее применение не имеет содержательного обоснования, т. е. когда у экспертов нет основы для согласия, их ответы равномерно распределены на множестве ранжировок.

Увеличение числа испытаний в 10 раз при переходе от серии 1 к серии 5 не очень сильно повлияло на приведенные в таблице характеристики, поэтому представляется, что суть дела выявляется при числе испытаний (в методе Монте-Карло), равном 100 или даже 50. Увеличение числа объектов или экспертов увеличивает число элементов в рассматриваемых пространствах ранжировок, а потому уменьшается частота попадания какого-либо из мнений экспертов внутрь медианы Кемени, а также отношение диаметра медианы к диаметру множества экспертов и число элементов медианы Кемени (среднее и максимальное). Можно сказать, что увеличение числа объектов или экспертов уменьшает степень дискретности задачи, приближает ее к непрерывному случаю, а потому уменьшает выраженность различных «патологий».

Есть много интересных направлений исследований, которые мы здесь не рассматриваем. Они связаны, в частности, со сравнением медианы Кемени с другими методами усреднения мнений экспертов, например с нахождением итогового упорядочения по методу средних арифметических рангов или методу медиан рангов, а также объединяющему их методу с использованием расчета согласующей ранжировки (см. гл. 5). Другое перспективное направление связано с использованием малых окрестностей ответов экспертов для поиска входящих в медиану ранжировок (с целью сокращения расчетов). Весьма важно получить теоретические и численные оценки скорости сходимости в законах больших чисел.

Различные варианты медианы Кемени. Согласно энциклопедии «Вероятность и математическая статистика», медиана Кемени — это эмпирическое среднее $x_{ср} = E_n(f) = E_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; f)$ относительно расстояния Кемени f в том или ином пространстве бинарных отношений X [21]. Обратим внимание на роль пространства X. В зависимости от того, каково X, вычисление медианы может быть как весьма сложной задачей, так и элементарной.

Если X — пространство упорядочений (ранжировок), как в основополагающей книге Кемени и Снелла [9], то имеет место первый из этих случаев. Для нахождения медианы Кемени по выборке, состоящей из ранжировок, понадобилось разработать специальные достаточно сложные алгоритмы [35, 45]. Задачам исследования итогового ранжирования мнений группы экспертов с помощью медианы Кемени посвящены работы [46–48]. Использование экспертных ранжировок и медианы Кемени при расчетах кредитного риска в банке рассмотрено в [47].

Если же X — пространство всех бинарных отношений, то медиана Кемени элементарно находится по правилу большинства [2]. А именно, если у более чем половины матриц, описывающих входящие в выборку бинарные отношения, на определенном месте стоит 1, то и у медианы Кемени на этом месте стоит 1. Если для более чем половины матриц определенный элемент равен 0, то и у эмпирического среднего этот элемент равен 0. Если же число единиц и нулей совпадает (это возможно лишь при четном объеме выборки), то медиана Кемени определяется неоднозначно. Соответствующий элемент итоговой матрицы может равняться как 0, так и 1 — сумма расстояний от нее до элементов выборки одна и та же — минимальная из возможных. Это утверждение вытекает из аналогичного результата для подмножеств конечного множества, поскольку бинарные отношения — это подмножества декартова квадрата того множества, между элементами которого рассматриваются отношения. Поясним сказанное.

Если A и B — подмножества конечного множества $X = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, то, как показано в разд. 7.5, расстояние, обобщающее расстояние Кемени, имеет вид:

$$d(A,B)=\sum_{j=1}^{k}\mu_j\,|\,\chi_A(y_j)-\chi_B(y_j)\,|,$$

где χ_C — индикатор (индикаторная функция) множества C, т. е. $\chi_C(x) = 1$, если $x \in C$, и $\chi_C(x) = 0$ в противном случае. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — та совокупность подмножеств X, для которой ищем эмпирическое среднее. Необходимо решить оптимизационную задачу:

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i, z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\mu_j\left|\chi_{x_i}(y_j)-\chi_z(y_j)\right| \to \min, \quad z \subseteq X .$$

Ясно, что можно поменять местами суммы и решать задачу:

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i,z)=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_j\left|\chi_{x_i}(y_j)-\chi_z(y_j)\right|\right)\to \min, \quad z\subseteq X .$$

Эта задача допускает декомпозицию на k задач:

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_j\left|\chi_{x_i}(y_j)-\chi_z(y_j)\right|\to \min, \quad j=1,2,\ldots,k, \quad z\subseteq X .$$

Другими словами, для каждого элемента X по отдельности надо решить, включать его в эмпирическое среднее или нет. При конкретном j обозначим $\chi_{x_i}(y_j)=a_i$, $\chi_z(y_j)=b$. Тогда каждая из поэлементных задач имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|a_i-b\right|\to \min, \quad b\in\{0,1\},$$

причем каждое из a_i — либо 0, либо 1.

Таким образом, надо найти минимум из двух величин:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i, n-\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}.$$

Первая из этих сумм соответствует $b = 0$, вторая — $b = 1$. Если первая сумма меньше, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < n-\sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i < \frac{n}{2},$$

то следует положить $b = 0$, т. е. не включать элемент y_j в эмпирическое среднее. Если

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n-\sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i > \frac{n}{2},$$

то, наоборот, включать. Если же имеет место равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n-\sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2},$$

то оба варианта $b = 0$ и $b = 1$ дают одно и то же значение минимизируемой функции, и решение задачи оптимизации неоднозначно, эмпирическое среднее состоит из 2^t подмножеств, где t — число элементов X, для которых имеют место рассматриваемые равенства. Таким образом, решение принимается по правилу большинства.

Вернемся к медиане Кемени. В ее определении, строго говоря, участвуют не одно пространство бинарных отношений, а два. Первое — это пространство X_1, в котором лежат усредняемые бинарные отношения (мнения экспертов) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Второе — это пространство X_2, по элементам которого проводится минимизация (в котором ищется эмпирическое среднее как решение задачи оптимизации). Эти пространства могут различаться. Например, пусть X_1 — пространство всех бинарных отношений, а X_2 — пространство ранжировок без связей. Это значит, что итоговое мнение комиссии экспертов — строгое упорядочение, в то время как ответы экспертов могут включать в себя противоречия (не быть транзитивными). Возможна и противоположная постановка: пусть ответы экспертов — строгие упорядочения (ранжировки без связей), а итоговое мнение ищется среди кластеризованных ранжировок.

Выделение двух пространств бинарных отношений позволяет более адекватно обрабатывать ответы экспертов. Например, мнение эксперта, особенно если оно получено с применением процедуры парных сравнений, отнюдь не всегда свободно от противоречий (не всегда выполнена транзитивность). Чтобы применять классическую процедуру получения итогового мнения комиссии экспертов в виде медианы Кемени — Снелла [38], иногда рекомендуют предварительно корректировать мнения экспертов, избавляясь от противоречий. Естественно, при этом искажаются исходные мнения экспертов. Использование концепции «двух пространств бинарных отношений» позволяет избежать этого искажения и получить итоговое мнение комиссии экспертов, более адекватное исходным мнениям экспертов. Приведенные соображения важны, в частности, при использовании люсианов как моделей ответов экспертов ([1, гл. 3], [4, гл. 11]).

Вычисление медианы Кемени в общем случае — задача целочисленного программирования. Для ее нахождения используются различные алгоритмы дискретной математики, в частности основанные на методе ветвей и границ. Применяют также алгоритмы, основанные на идее случайного поиска, поскольку для каждого бинарного отношения нетрудно найти множество его соседей.

Рассмотрим пример вычисления медианы Кемени. Пусть дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний для множества бинарных отношений из 9 элементов $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9$ (см. табл. 7.3). Найдем в этом множестве из 9 элементов медиану для выборки из 5 элементов $\{A_2, A_4, A_5, A_8, A_9\}$. (Здесь пространство X_2, по элементам которого проводится минимизация, состоит из 9 элементов $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9$.)

Таблица 7.3

Матрица попарных расстояний

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	0	2	13	1	7	4	10	3	11
A_2	2	0	5	6	1	3	2	5	1
A_3	13	5	0	2	2	7	6	5	7
A_4	1	6	2	0	5	4	3	8	8
A_5	7	1	2	5	0	10	1	3	7
A_6	4	3	7	4	10	0	2	1	5

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_7	10	2	6	3	1	2	0	6	3
A_8	3	5	5	8	3	1	6	0	9
A_9	11	1	7	8	7	5	3	9	0

В соответствии с определением медианы Кемени следует ввести в рассмотрение функцию:

$$C(A) = \sum_{i\in\{2,4,5,8,9\}} D(A_i, A) = D(A_2, A) + D(A_4, A) + D(A_5, A) + D(A_8, A) + D(A_9, A),$$

рассчитать ее значения для всех $A = A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9$ и выбрать наименьшее.

Проведем расчеты:

$$C(A_1) = D(A_2, A_1) + D(A_4, A_1) + D(A_5, A_1) + D(A_8, A_1) + D(A_9, A_1) = \\ = 2 + 1 + 7 + 3 + 11 = 24;$$

$$C(A_2) = D(A_2, A_2) + D(A_4, A_2) + D(A_5, A_2) + D(A_8, A_2) + D(A_9, A_2) = \\ = 0 + 6 + 1 + 5 + 1 = 13;$$

$$C(A_3) = D(A_2, A_3) + D(A_4, A_3) + D(A_5, A_3) + D(A_8, A_3) + D(A_9, A_3) = \\ = 5 + 2 + 2 + 5 + 7 = 21;$$

$$C(A_4) = D(A_2, A_4) + D(A_4, A_4) + D(A_5, A_4) + D(A_8, A_4) + D(A_9, A_4) = \\ = 6 + 0 + 5 + 8 + 8 = 27;$$

$$C(A_5) = D(A_2, A_5) + D(A_4, A_5) + D(A_5, A_5) + D(A_8, A_5) + D(A_9, A_5) = \\ = 1 + 5 + 0 + 3 + 7 = 16;$$

$$C(A_6) = D(A_2, A_6) + D(A_4, A_6) + D(A_5, A_6) + D(A_8, A_6) + D(A_9, A_6) = \\ = 3 + 4 + 10 + 1 + 5 = 23;$$

$$C(A_7) = D(A_2, A_7) + D(A_4, A_7) + D(A_5, A_7) + D(A_8, A_7) + D(A_9, A_7) = \\ = 2 + 3 + 1 + 6 + 3 = 15;$$

$$C(A_8) = D(A_2, A_8) + D(A_4, A_8) + D(A_5, A_8) + D(A_8, A_8) + D(A_9, A_8) = \\ = 5 + 8 + 3 + 0 + 9 = 25;$$

$$C(A_9) = D(A_2, A_9) + D(A_4, A_9) + D(A_5, A_9) + D(A_8, A_9) + D(A_9, A_9) =$$
$$= 1 + 8 + 7 + 9 + 0 = 25.$$

Из всех вычисленных сумм наименьшая равна 13, и достигается она при $A = A_2$, следовательно, медиана Кемени — это множество $\{A_2\}$, состоящее из одного элемента A_2.

В данном случае медиана Кемени — одно из исходных экспертных мнений. В общем случае медиана Кемени может не совпадать ни с одним из мнений экспертов. Последнее обстоятельство является поводом для критики рассматриваемого способа усреднения. Действительно, если представить себе, что ответы экспертов равномерно распределены по поверхности бублика (в математической терминологии — тора), то может случиться так, что медиана Кемени — центр бублика — лежит в пустоте, следовательно, далека от мнений кого-либо из экспертов.

Выход из этого парадокса может быть найден путем изменения области минимизации $\{A\}$ в определении медианы Кемени. Действительно, если принять, что пространство X_2, по элементам которого проводится минимизация, совпадает с множеством ответов экспертов, то, очевидно, решением задачи минимизации будет одно из экспертных мнений. Такое эмпирическое среднее назовем «модифицированной медианой Кемени». Здесь наглядно видна польза концепции «двух пространств бинарных отношений».

Преимуществом модифицированной медианы Кемени является значительно меньшая вычислительная трудоемкость. Если для расчета медианы Кемени необходимо применять специальные алгоритмы дискретной оптимизации (см., например, [35]), то модифицированную медиану Кемени можно найти без привлечения компьютера, как это и продемонстрировано выше.

Дальнейшие результаты статистики нечисловых данных содержатся в специальной литературе, в частности в учебниках [1, 4].

7.8. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ

Плотности распределения вероятностей используются при решении различных задач эконометрики. Так, согласно лемме Неймана — Пирсона оптимальное правило принятия решений при проверке статистических гипотез основано на отношении плотностей распределения вероятностей, соответствующих нулевой и альтернативной гипотезам. Непараметрическая оценка регрессионной зависимости строится путем замены неизвестной исследователю плотности совместного распределения на непараметрическую состоятельную оценку этой плотности (разд. 3.3 выше). Для решения задач классификации, как кластер-анализа, так и диагностики (дискриминации, распознавания образов с учителем), используют непараметрические оценки плотности [1, 4].

В гл. 2 применялась эмпирическая функция распределения — состоятельная непараметрическая оценка функции распределения числовой случайной величины. А как оценить плотность? Если формально продифференцировать эмпирическую функцию распределения, то получим бесконечности в точках, соответствующих элементам выборки, и 0 во всех остальных. Ясно, что это не оценка плотности.

Как же действовать? Каждому элементу выборки соответствует в эмпирическом распределении вероятность $1 / n$, где n — объем выборки. Целесообразно эту вероятность не помещать в одну точку, а «размазать» вокруг нее, построив «холмик». Если «холмики» налегают друг на друга, то получаем положительную плотность на всей прямой. Чтобы получить состоятельную оценку плотности, необходимо выбирать ширину «холмика» в зависимости от объема выборки. При этом число «холмиков», покрывающих фиксированную точку, должно безгранично расти. Но одновременно доле таких «холмиков» следует убывать, поскольку покрывающие «холмики» должны быть порождены лишь ближайшими членами вариационного ряда.

Реализация описанной идеи привела к различным вариантам непараметрических оценок плотности. Основополагающей является работа Н.В. Смирнова 1951 г. [49]. Вначале рассматривались непараметрические оценки плотности распределения числовых случайных величин и конечномерных случайных векторов. В 1980-х гг. удалось сконструировать такие оценки в пространствах произвольной природы [50], а затем и для конкретных видов нечисловых данных [51].

О гистограммах. При описании числовых данных часто используют гистограммы. При этом область изменения случайной переменной разбивают на интервалы равной длины, подсчитывают число попаданий в каждый интервал и строят соответствующую столбиковую диаграмму. Она напоминает график плотности. И действительно, Н.В. Смирнов показал в работе [49], что последовательность гистограмм при определенных условиях сходится к плотности.

Процедура построения гистограммы зависит от субъективного мнения статистика. Не существует научно обоснованных правил выбора числа интервалов и их длины. Рекомендации по этому поводу, приводимые в различных изданиях, отражают лишь традицию и/или субъективное мнение авторов.

К настоящему времени разработано много методов оценивания плотности распределения. О некоторых из них речь пойдет ниже. Что же касается гистограмм, то с научной точки зрения их надо отнести к истории статистики.

Непараметрические оценки плотности в пространствах произвольной природы. Сначала рассмотрим непараметрические оценки плотности в наиболее общей ситуации. Напомним, что в нечисловой статистике выделяют общую теорию и статистику в конкретных пространствах нечисловой природы (например, статистику ранжировок). В общей теории есть два основных сюжета. Один связан со средними величинами и асимптотическим поведением решений экстремальных статистических задач, второй — с непараметрическими оценками плотности. Первый сюжет рассмотрен выше, второму посвящен настоящий раздел.

Понятие плотности в пространстве произвольной природы X требует специального обсуждения. В пространстве X должна быть выделена некоторая специальная мера μ, относительно которой будут рассматриваться плотности, соответствующие другим мерам, например мере ν, задающей распределение вероятностей некоторого случайного элемента ξ. В таком случае $\nu(A) = P(\xi \in A)$ для любого случайного события A. Плотность $f(x)$, соответствующая мере ν, — это такая функция, что

$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu$$

для любого случайного события A. Для случайных величин и векторов мера μ — это объем множества A, в математических терминах — мера Лебега. Для дискретных случайных величин и элементов со значениями в конечном множестве X в качестве меры μ естественно использовать считающую меру, которая событию A ставит в соответствие число его элементов. Используют также нормированную случайную меру, когда число точек в множестве A делят на число точек во всем пространстве X. В случае считающей меры значение плотности в точке x совпадает с вероятностью попасть в точку x, т. е. $f(x) = P(\xi = x)$. Таким образом, с рассматриваемой точки зрения стирается грань между понятиями «плотность вероятности» и «вероятность (попасть в точку)».

Как могут быть использованы непараметрические оценки плотности распределения вероятностей в пространствах нечисловой природы? Например, для решения задач классификации (диагностики, распознавания образов) [1, 4]. Зная плотности распределения классов, можно решать основные задачи диагностики: как задачи выделения кластеров, так и задачи отнесения вновь поступающего объекта к одному из диагностических классов. В задачах кластер-анализа можно находить моды плотности и принимать их за центры кластеров или за начальные точки итерационных методов типа k-средних или динамических сгущений. В задачах собственно диагностики (дискриминации, распознавания образов с учителем) можно принимать решения о диагностике объектов на основе отношения плотностей, соответствующих классам. При неизвестных плотностях представляется естественным использовать их состоятельные оценки.

Методы оценивания плотности вероятности в пространствах общего вида предложены и первоначально изучены в работе [50]. В частности, в задачах диагностики объектов нечисловой природы предлагаем использовать непараметрические ядерные оценки плотности типа Парзена — Розенблатта (этот вид оценок и его название впервые были введены в статье [50]). Они имеют вид:

$$f_n(x) = \frac{1}{\eta_n(h_n, x)} \sum_{1 \le i \le n} K\left(\frac{d(x_i, x)}{h_n}\right),$$

где K: $R_+^1 \to R^1$ — так называемая ядерная функция, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ — выборка, по которой оценивается плотность, $d(x_i, x)$ — показатель различия (метрика, расстояние, мера близости) между элементом выборки x_i и точкой x, в которой оценивается плотность, последовательность h_n показателей размытости такова, что $h_n \to 0$ и $nh_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $\eta_n(h_n, x)$ — нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение условия нормировки (интеграл по всему пространству от непараметрической оценки плотности $f_n(x)$ по мере μ должен равняться 1). Ранее американские исследователи Е. Парзен и М. Розенблатт использовали подобные статистики в случае $X = R^1$ с $d(x_i, x) = |x_i - x|$.

Введенные описанным образом ядерные оценки плотности — частный случай так называемых линейных оценок, также впервые предложенных в работе [50]. В теоретическом плане они выделяются тем, что удается получать результаты такого же типа, что в классическом одномерном случае, но, разумеется, с помощью совсем иного математического аппарата.

Свойства непараметрических ядерных оценок плотности. Рассмотрим выборку со значениями в некотором пространстве произвольного вида. В этом пространстве предполагаются заданными показатель различия d и мера μ. Одна из основных идей рассматриваемого подхода состоит в том, чтобы согласовать их между собой. А именно, на их основе построим новый показатель различия d_1, так называемый «естественный», в терминах которого проще формулируются свойства непараметрической оценки плотности. Для этого рассмотрим шары $L_t(x) = \{y \in X: d(y, x) \le t\}$ радиуса $t \ge 0$ и их меры $F_x(t) = \mu(L_t(x))$. Предположим, что $F_x(t)$ как функция t при фиксированном x непрерывна и строго возрастает. Введем функцию $d_1(x, y) = F_x(d(x, y))$. Это монотонное преобразование показателя различия или расстояния, а потому $d_1(x, y)$ — также показатель различия (даже если d — метрика, для d_1 неравенство треугольника может быть не выполнено). Другими словами, $d_1(x, y)$, как и $d(x, y)$, можно рассматривать как показатель различия (меру близости) между x и y.

Для вновь введенного показателя различия $d_1(x, y)$ введем соответствующие шары $L_{1t}(x) = \{y \in X: d_1(y, x) \le t\}$.

Поскольку обратная функция $F^{-1}{}_x(t)$ определена однозначно, то

$$L_{1t}(x) = \{y \in X : d_1(y, x) \le F_x^{-1}(t)\} = L_T(x),$$

где $T = F^{-1}{}_x(t)$. Следовательно, справедлива цепочка равенств $F^1{}_x(t) = \mu(L_{1t}(x)) = \mu(L_T(x)) = F_x(F^{-1}{}_x(t)) = t$ (для всех тех значений параметра t, для которых определены все участвующие в записи математические объекты).

Переход от d к d_1 напоминает классическое преобразование, использованное Н.В. Смирновым при изучении непараметрических критериев согласия и однородности, а именно преобразование $\eta = F(\xi)$, переводящее случайную величину ξ с непрерывной функцией распределения $F(x)$ в случайную величину η, равномерно распределенную на отрезке [0, 1]. Оба рассматриваемых преобразования существенно упрощают дальнейшие рассмотрения. Преобразование $d_1 = F_x(d)$ зависит от точки x, что не влияет на дальнейшие рассуждения, поскольку ограничиваемся изучением сходимости в отдельно взятой точке.

Функцию $d_1(x, y)$, для которой мера шара радиуса t равна t, называем в соответствии с работой [50] «естественным показателем различия» или «естественной метрикой». В случае конечномерного пространства R^k и евклидовой метрики d имеем $d_1(x, y) = c_k d^k(x, y)$, где c_k — объем шара единичного радиуса в R^k.

Поскольку можно записать, что

$$K\left(\frac{d(x_i, x)}{h_n}\right) = K_1\left(\frac{d_1(x_i, x)}{h_n}\right),$$

где

$$K_1(u) = K\left(\frac{F_x^{-1}(uh_n)}{h_n}\right),$$

то переход от одного показателя различия к другому, т. е. от d к d_1, соответствует переходу от одной ядерной функции к другой, т. е. от K к K_1. Выгода от такого перехода заключается в том, что утверждения о поведении непараметрических оценок плотности приобретают более простую формулировку.

Теорема 7.13. Пусть d — естественная метрика, плотность f непрерывна в точке x и ограничена на всем пространстве X, причем $f(x) > 0$, ядерная функция $K(u)$ удовлетворяет простым условиям регулярности:

$$\int_0^1 K(u)du = 1, \int_0^{\infty} (|K(u)| + K^2(u))du < \infty .$$

Тогда $\eta_n(h_n, x) = nh_n$, оценка $f_n(x)$ является состоятельной, т. е. $f_n(x) \to f(x)$ по вероятности при $n \to \infty$ и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}(nh_n Df_n(x)) = f(x)\int_0^{+\infty} K^2(u)du.$$

Теорема 7.13 доказывается методами, развитыми в работе [50]. Однако остается открытым вопрос о скорости сходимости ядерных оценок, в частности о поведении величины $\alpha_n = M(f_n(x) - f(x))^2$ — среднего квадрата ошибки, и об оптимальном выборе показателей размытости h_n. Для того чтобы продвинуться в решении этого вопроса, введем новые понятия. Для случайного элемента $X(\omega)$ со значениями в X рассмотрим так называемые круговое распределение $G(x, t) =$ $= P\{d(X(\omega), x) \le t\}$ и круговую плотность $g(x, t) = G'_t(x, t)$.

Теорема 7.14. Пусть ядерная функция $K(u)$ непрерывна и финитна, т. е. существует число E, такое, что $K(u) = 0$ при $u >$ Е. Пусть круговая плотность является достаточно гладкой, т. е. допускает разложение:

$$g(x,t) = f(x) + tg'_t(x,0) + \frac{t^2}{2} g''_{tt}(x,0) + \frac{t^3}{3!} g'''_{ttt}(x,0) + \ldots + \frac{t^k}{k!} g^{(k)}_{t^{(k)}}(x,0) + o(h_n^k)$$

при некотором натуральном k, причем остаточный член равномерно ограничен на $[0, hE]$. Пусть

$$\int_0^E u^i K(u)du = 0, i = 1,2,\ldots,k-1.$$

Тогда

$$\alpha_n = [Mf_n(x) - f(x)]^2 + Df_n(x) =$$

$$= h_n^{2k}\left(\int_0^E u^k K(u)du\right)^2 (g_{t^{(k)}}^k(x,0))^2 + \frac{f(x)}{nh_n}\int_0^E K^2(u)du + o\left(h_n^{2k} + \frac{1}{nh_n}\right).$$

Доказательство теоремы 7.14 проводится с помощью разработанной в нечисловой статистике математической техники, образцы которой представлены, в частности, в работе [50]. Если коэффициенты при основных членах в правой части последней формулы не равны 0, то величина α_n достигает минимума, равного

$$\alpha_n = O\left(n^{-1+\frac{1}{2k+1}}\right), \text{ при } h_n = n^{-\frac{1}{2k+1}}.$$

Эти выводы совпадают с классическими результатами, полученными ранее рядом авторов для весьма частного случая прямой $X = R^1$ (см., например, монографию [52, с. 316]). Заметим, что для уменьшения смещения оценки приходится применять знакопеременные ядра $K(u)$.

Непараметрические оценки плотности в конечных пространствах [51]. В случае пространств из конечного числа элементов естественных метрик не существует. Однако можно получить аналоги теорем 7.13 и 7.14, переходя к пределу не только по объему выборки n, но и по новому параметру дискретности m.

Рассмотрим некоторую последовательность X_m, $m = 1, 2, \ldots$, конечных пространств. Пусть в X_m заданы показатели различия d_m. Будем использовать нормированные считающие меры μ_m, ставящие в соответствие каждому подмножеству A долю элементов всего пространства X_m, входящих в A. Как и ранее, рассмотрим как функцию t объем шара радиуса t, т. е.

$$F_{mx}(t) = \mu_m(\{y \in X_m : d_m(x,y) \le t\}).$$

Введем аналог естественного показателя различия $d_{1m}(x, y) = F_{mx}(d_m(x, y))$. Наконец, рассмотрим аналоги преобразования Смирнова $F^1_{mx}(t) = \mu_m(\{y \in X_m: d_{1m}(x, y) \le t\})$. Функции $F^1_{mx}(t)$, в отличие от ситуации предыдущего раздела, уже не совпадают тождественно с t, они кусочно-постоянны и имеют скачки в некоторых точках t_i, $i = 1, 2, \ldots$, причем в этих точках $F^1_{mx}(t) = t_i$.

Теорема 7.15. Пусть точки скачков равномерно сближаются, т. е. $\max(t_i - - t_{i-1}) \to 0$ при $m \to \infty$ (другими словами, $\sup|F^1{}_{mx}(t) - t| \to 0$ при $m \to \infty$). Тогда существует последовательность параметров дискретности m_n, такая, что при предельном переходе $n \to \infty$, $m \to \infty$, $m \geq m_n$ справедливы заключения теорем 7.13 и 7.14.

Пример 1. Пространство $X_m = 2^{\sigma(m)}$ всех подмножеств конечного множества $\sigma(m)$ из m элементов допускает (см. разд/ 7.5 или монографию [2]) аксиоматическое введение метрики $d(A, B) = card(A\Delta B) / 2^m$ где Δ — символ симметрической разности множеств. Рассмотрим непараметрическую ядерную оценку плотности типа Парзена — Розенблатта:

$$f_{nm}(A) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1}{h_n}\Phi\left(\frac{2card(A\Delta X_i) - m}{\sqrt{m}}\right)\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция нормального стандартного распределения. Можно показать, что эта оценка удовлетворяет условиям теоремы 7.15 с $m_n = (\ln n)^6$.

Пример 2. Рассмотрим пространство функций f: $Y_r \to Z_q$, определенных на конечном множестве $Y_r = \{1 / r, 2 / r, \ldots, (r - 1) / r, 1\}$, со значениями в конечном множестве $Z_q = \{0, 1 / q, 2 / q, \ldots, (q - 1) / q, 1\}$. Это пространство можно интерпретировать как пространство нечетких множеств (см. разд. 7.2), а именно, Y_r — носитель нечеткого множества, а Z_q — множество значений функции принадлежности. Очевидно, число элементов пространства X_m равно $(q + 1)^r$. Будем использовать расстояние $d(f, g) = \sup|f(y) - g(y)|$ в этом пространстве. Непараметрическая оценка плотности имеет вид:

$$f_{nm}(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{[2\sup_y|x(y) - x_i(y)| + 1/q]^r}{h_n(1 + 1/q)^r}\right).$$

Если $r = n^\alpha$, $q = n^\beta$, то при $\beta > \alpha$ выполнены условия теоремы 7.15, а потому справедливы теоремы 7.13 и 7.14.

Пример 3. Рассматривая пространства ранжировок m объектов, в качестве расстояния $d(A, B)$ между ранжировками A и B примем минимальное число инверсий, необходимых для перехода от A к B. Тогда $\max(t_i - t_{i-1})$ не стремится к 0 при $m \to \infty$, условия теоремы 7.15 не выполнены.

Пример 4. В прикладных работах наиболее распространенный пример объектов нечисловой природы — вектор разнотипных данных: реальный объект описывается вектором, часть координат которого — значения количественных признаков, а часть — качественных (номинальных и порядковых). Для пространств разнотипных признаков, т. е. декартовых произведений непрерывных и дискретных пространств, возможны различные постановки.

Пусть, например, число градаций качественных признаков остается постоянным. Тогда непараметрическая оценка плотности сводится к произведению двух величин: частоты попадания в точку в пространстве качественных признаков и классической оценки типа Парзена — Розенблатта в пространстве количественных переменных. В общем случае расстояние $d(x, y)$ можно, например, рассматривать как сумму трех расстояний. А именно, евклидова расстояния d_1 между количественными факторами, расстояния d_2 между номинальными признаками ($d_2(x, y) = 0$, если $x = y$, и $d_2(x, y) = 1$, если $x \neq y$) и расстояния d_3 между порядковыми переменными (если x и y — номера градаций, то $d_3(x, y) = |x - y|$). Наличие количественных факторов приводит к непрерывности и строгому возрастанию функции $F_{mx}(t)$, а потому для непараметрических оценок плотности в пространствах разнотипных признаков верны теоремы 7.13–7.14.

Программная реализация описания данных с помощью непараметрических оценок плотности включена в ряд программных продуктов по прикладной статистике, в частности в пакет программ анализа данных ППАНД [53].

Эконометрика продолжает бурно развиваться, в частности ее область, посвященная непараметрическим оценкам плотности распределения вероятностей. Работы ведутся как в теоретическом плане [54–61], так и в прикладном [62].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: нечисловая статистика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 446 с.

2. *Орлов, А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях / А.И. Орлов. — Москва : Наука, 1979. — 296 с.

3. *Орлов, А.И.* Статистика объектов нечисловой природы и экспертные оценки / А.И. Орлов // Экспертные оценки. Вопросы кибернетики. — 1979. — № 58 — С. 17–33.

4. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

5. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Саратов : ИНТУИТ : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 676 с.

6. *Шубкин, В.П.* Социологические опыты / В.П. Шубкин. — Москва : Мысль, 1970. — 256 с.

7. *Щукина, Г.И.* Проблема познавательного интереса в педагогике / Г.И. Щукина. — Москва : Педагогика, 1971. — 352 с.

8. *Толстова, Ю.Н.* Измерение в социологии / Ю.Н. Толстова. — Москва : Инфра-М, 1998. — 184 с.

9. *Кендэл, М.* Ранговые корреляции / М. Кендэл. — Москва : Статистика, 1975. — 216 с.

10. *Беляев, Ю.К.* Вероятностные методы выборочного контроля / Ю.К. Беляев. — Москва : Наука, 1975. — 408 с.

11. *Лумельский, Я.П.* Статистические оценки результатов контроля качества / Я.П. Лумельский. — Москва : Изд-во стандартов, 1979. — 200 с.

12. *Дэвид, Г.* Метод парных сравнений / Г. Дэвид. — Москва : Статистика, 1978. — 144 с.

13. *Орлов, А.И.* Распределения реальных статистических данных не являются нормальными / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2016. — № 117. — С. 71–90.

14. Организация и планирование машиностроительного производства (производственный менеджмент) : учебник / К.А. Грачева, М.К. Захарова, Л.А. Одинцова [и др.] ; под редакцией Ю.В. Скворцова, Л.А. Некрасова. — Москва : Высшая школа, 2003. — 470 с.

15. *Кендалл, М.Дж.* Статистические выводы и связи / М.Дж. Кендалл, А. Стюарт. — Москва : Наука, 1973. — 900 с.

16. *Себер, Дж.* Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер. — Москва : Мир, 1980. — 456 с.

17. *Орлов, А.И.* Асимптотика некоторых оценок размерности модели в регрессии / А.И. Орлов // Прикладная статистика. Ученые записки по статистике. — 1983. — Т. 45. — С. 260–265.

18. *Орлов, А.И.* Задачи оптимизации и нечеткие переменные / А.И. Орлов. — Москва : Знание, 1980. — 64 с.

19. *Борель, Э.* Вероятность и достоверность / Э. Борель. — Москва : ГИФМЛ, 1961. — 120 с.

20. *Орлов, А.И.* Вероятностные модели конкретных видов объектов нечисловой природы / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. — 1995. — Т. 61. — № 5. — С. 43–51.

21. Вероятность и математическая статистика : энциклопедия / главный редактор Ю.В. Прохоров. — Москва : Большая Российская энциклопедия, 1999. — 910 с.

22. *Четыркин, Е.М.* Выборочные методы в аудите / Е.М. Четыркин, Н.Е. Васильева. — Москва : Дело, 2003. — 144 с.

23. *Орлов, А.И.* Логистическое распределение / А.И. Орлов // Математическая энциклопедия. — 1982. — Т. 3. — С. 414.

24. *Орлов, А.И.* Оценивание параметров: одношаговые оценки предпочтительнее оценок максимального правдоподобия / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 109. — С. 208–237.

25. *Тюрин, Ю.Н.* Статистические модели ранжирования / Ю.Н. Тюрин, А.П. Василевич, П.Ф. Андрукович // Статистические методы анализа экспертных оценок. — Москва : Наука, 1977. — С. 30–58.

26. *Орлов, А.И.* Случайные множества с независимыми элементами (люсианы) и их применения / А.И. Орлов // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. Ученые записки по статистике. 1980. — Т. 36. — С. 287–308.

27. *Орлов, А.И.* Парные сравнения в асимптотике Колмогорова / А.И. Орлов // Экспертные оценки в задачах управления. — Москва : Изд-во ИПУ АН СССР, 1982. — С. 58–66.

28. *Орлов, А.И.* Теория люсианов / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 101. — С. 275–304.

29. *Прохоров, Ю.В.* Теория вероятностей. (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.) / Ю.В. Прохоров, Ю.А. Розанов. — Москва : Наука, 1973. — 496 с.

30. *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — Москва : Наука, 1972. — 496 с.

31. *Орлов, А.И.* Асимптотика решений экстремальных статистических задач / А.И. Орлов // Анализ нечисловых данных в системных исследованиях. Сборник трудов. — 1982. — № 10. — С. 4–12.

32. *Орлов, А.И.* Предельная теория решений экстремальных статистических задач / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2017. — № 133. — С. 579–600.

33. *Орлов, А.И.* Предельная теория непараметрических статистик / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 100. — С. 226–244.

34. *Келли, Дж.* Общая топология / Дж. Келли. — Москва : Наука, 1968. — 384 с.

35. *Литвак, Б.Г.* Экспертная информация. Методы получения и анализа / Б.Г. Литвак. — Москва : Радио и связь, 1982. — 184 с.

36. *Раушенбах, Г.В.* Меры близости и сходства / Г.В. Раушенбах // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. — Москва : Наука, 1986. — С. 169–203.

37. *Орлов, А.И.* Расстояния в пространствах статистических данных / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 101. — С. 227–252.

38. *Кемени, Дж.* Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения / Дж. Кемени, Дж. Снелл. — Москва : Советское радио, 1972. — 192 с.

39. *Окстоби, Дж.* Мера и категория / Дж. Окстоби. — Москва : Мир, 1974. — 158 с.

40. *Льюс, Р.* Психофизические шкалы / Р. Льюс, Е. Галантер // Психологические измерения. — Москва : Мир, 1967. — С. 111–195.

41. *Орлов, А.И.* Связь между нечеткими и случайными множествами: Нечеткие толерантности / А.И. Орлов // Исследования по вероятностно-статистическому моделированию реальных систем. — Москва : ЦЭМИ АН СССР, 1977. — С. 140–148.

42. *Орлов, А.И.* Метрика подобия: аксиоматическое введение, асимптотическая нормальность / А.И. Орлов, Г.В. Раушенбах // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвузовский сборник научных трудов. — Пермь : Изд-во ПГУ, 1986. — С. 148–157.

43. *Гнеденко, Б.В.* Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. — 7-е изд., испр. — Москва : Эдиториал URSS, 2001. — 320 с.

44. *Орлов, А.И.* Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2013. — № 89. — С. 554–584.

45. *Жихарев, В.Н.* Законы больших чисел и состоятельность статистических оценок в пространствах произвольной природы / В.Н. Жихарев, А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвузовский сборник научных трудов. — Пермь : Изд-во ПГУ, 1998. — С. 65–84.

46. *Жуков, М.С.* Задача исследования итогового ранжирования мнений группы экспертов с помощью медианы Кемени / М.С. Жуков, А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2016. — № 122. — С. 785– 806.

47. *Жуков, М.С.* Использование экспертных ранжировок при расчетах кредитного риска в банке / М.С. Жуков, А.И. Орлов // Инновации в менеджменте. — 2017. — № 1(11). — С. 18–25.

48. *Жуков, М.С.* Экспертные оценки в рисках / М.С. Жуков, А.И. Орлов, С.Г. Фалько // Контроллинг. — 2017. — № 4(66). — С. 24–27.

49. *Смирнов, Н.В.* О приближении плотностей распределения случайных величин / Н.В. Смирнов // Ученые записки МГПИ им. В.П. Потемкина. — 1951. — Т. XVI. — № 3. — С. 69–96.

50. *Орлов, А.И.* Непараметрические оценки плотности в топологических пространствах / А.И. Орлов // Прикладная статистика. Ученые записки по статистике. — 1983. — Т. 45. — С. 12–40.

51. *Орлов, А.И.* Ядерные оценки плотности в пространствах произвольной природы / А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипо-

тез : межвузовский сборник научных трудов. — Пермь : Изд-во ПГУ, 1996. — С. 68–75.

52. *Ибрагимов, И.А.* Асимптотическая теория оценивания / И.А. Ибрагимов, Р.З. Хасьминский. — Москва : Наука, 1979. — 528 с.

53. *Орлов, А.И.* Пакет программ анализа данных «ППАНД» : учебное пособие / А.И. Орлов, И.Л. Легостаева. — Москва : Сотрудничающий центр ВОЗ по профессиональной гигиене, 1990. — 93 с.

54. *Орлов, А.И.* Оценки плотности в пространствах произвольной природы / А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвузовский сборник научных трудов. — Пермь : Изд-во ПГУ, 2013. — С. 21–33.

55. *Орлов, А.И.* Оценки плотности распределения вероятностей в пространствах произвольной природы / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 99. — С. 15–32.

56. *Орлов, А.И.* Ядерные оценки плотности в пространствах произвольной природы / А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвузовский сборник научных трудов. — Пермь: Изд-во ПГУ, 2015. — С. 43–57.

57. *Орлов, А.И.* Предельные теоремы для ядерных оценок плотности в пространствах произвольной природы / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2015. — № 108. — С. 316–333.

58. *Орлов, А.И.* Непараметрические ядерные оценки плотности вероятности в дискретных пространствах / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2016. — № 122. — С. 833–855.

59. *Орлов, А.И.* Ядерные оценки плотности в конечных пространствах / А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвузовский сборник научных трудов. — Пермь : Изд-во ПГУ, 2016. — С. 24–37.

60. *Орлов, А.И.* Асимптотика оценок плотности распределения вероятностей / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2017. — № 131. — С. 845–873.

61. *Орлов, А.И.* Скорость сходимости ядерных оценок плотности в пространствах произвольной природы / А.И. Орлов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвузовский сборник научных трудов. — Пермь : Изд-во ПГУ, 2018. — С. 35–45.

62. *Фалько, С.Г.* Приоритизация требований стейкхолдеров к проектам в области производственного консалтинга / С.Г. Фалько, А.И. Орлов, Я.С. Рыкова // Контроллинг в экономике, организации производства и управлении: шансы и риски цифровой экономики : сборник научных трудов IX международного конгресса по контроллингу. — Москва : Изд-во НП «Объединение контроллеров», 2019. — С. 204–211.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Приведите примеры практического использования количественных и категоризованных данных.

2. Как соотносятся группы допустимых преобразований для различных шкал измерения?

3. Почему анализ нечисловых данных (статистика нечисловых данных) занимает центральное место в прикладной статистике и эконометрике?

4. Какая математическая модель используется для описания случайного множества?

5. Докажите, что для блочного расстояния (пример 4 из разд. 7.4) справедливо неравенство треугольника.

6. Расскажите о многообразии расстояний в различных пространствах статистических данных.

7. Докажите, что если $d(x, y)$ — расстояние в некотором пространстве, то $\sqrt{d(x,y)}$ — также расстояние в этом пространстве.

8. Как бинарные отношения описываются матрицами из 0 и 1?

9. Выпишите матрицу из 0 и 1, соответствующую бинарному отношению (кластеризованной ранжировке) $5 < \{1, 3\} < 4 < 2 < \{6, 7\}$.

10. Что такое расстояние Кемени и медиана Кемени?

11. Найдите расстояние Кемени между бинарными отношениями — упорядочениями $A = [3 < 2 < 1 < \{4, 5\}]$ и $B = [1 < \{2, 3\} < 4 < 5]$.

12. Дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний (мер различия) для множества бинарных отношений из 9 элементов $X_2 = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9\}$ (в таблице). Найдите в этом множестве медиану Кемени и модифицированную медиану Кемени для выборки из 5 элементов $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_9\}$.

Попарные расстояния между бинарными отношениями

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	0	5	3	6	7	4	10	3	11
A_2	5	0	5	6	10	3	2	5	7
A_3	3	5	0	8	2	7	6	5	7
A_4	6	6	8	0	5	4	3	8	8
A_5	7	10	2	5	0	10	8	3	7
A_6	4	3	7	4	10	0	2	3	5
A_7	10	2	6	3	8	2	0	6	3
A_8	3	5	5	8	3	3	6	0	9
A_9	11	7	7	8	7	5	3	9	0

13. Чем закон больших чисел для медианы Кемени отличается от «классического» закона больших чисел, известного в статистике?

14. Как соотносятся эмпирические и теоретические средние величины для числовых данных и в пространствах произвольной природы?

15. Как соотносятся законы больших чисел для числовых случайных величин и в пространствах произвольной природы?

16. Почему описание числовых данных с помощью непараметрических оценок плотности предпочтительнее их описания с помощью гистограмм?

17. Можно ли строить непараметрические оценки плотности для результатов наблюдений из дискретных пространств?

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ, РЕФЕРАТОВ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Содержание первого сочинения по прикладной статистике — книги «Числа» в Библии.
2. Взаимосвязи различных классов объектов нечисловой природы между собой.
3. Вероятностные модели бинарных отношений.
4. Вероятностные модели парных сравнений.
5. Методы теории люсианов в теории и практике экспертных оценок.
6. Центральная роль статистики нечисловых данных (статистики объектов произвольной природы, нечисловой статистики) в прикладной статистике.
7. Расстояния в пространствах функций.
8. Докажите, что аксиоматически введенный в разд. 7.5 показатель различия между множествами $d(A, B) = \mu(A\Delta B)$ удовлетворяет неравенству треугольника.
9. Расстояние Кемени и медиана Кемени в экспертных оценках.
10. Рассчитайте модифицированную медиану Кемени упорядочения 7 инвестиционных проектов, приведенных в табл. 5.4 гл. 5 (задача 13).
11. Средние величины в теории и практике анализа статистических данных.
12. Средние и законы больших чисел в пространстве упорядочений.
13. Законы больших чисел в пространствах нечисловой природы.
14. Непараметрические оценки плотности в непрерывных и дискретных пространствах.
15. Использование непараметрических оценок плотности для восстановления зависимости.
16. Применение общих результатов нечисловой статистики в конкретных областях прикладной статистики.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИНСТРУМЕНТЫ ЭКОНОМЕТРИКИ

В настоящем приложении собраны основные математические результаты, постоянно используемые при обосновании эконометрических методов и моделей. Эти теоретические инструменты отнюдь не всегда легко найти в литературе по теории вероятностей и математической статистике. Например, такие рассматриваемые далее теоремы и методы, как многомерная центральная предельная теорема, теоремы о наследовании сходимости и метод линеаризации, даже не включены в энциклопедию «Вероятность и математическая статистика» [3] — наиболее полный, по мнению составителей, свод знаний по заявленной тематике. Последний факт наглядно демонстрирует разрыв между математической дисциплиной «Теория вероятностей и математическая статистика» и потребностями организационно-экономического моделирования.

П.1.1. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Законы больших чисел позволяют описать поведение сумм случайных величин. Примером является следующий результат, доказанный русским математиком П.Л. Чебышевым (1821–1894) в 1867 г. Пусть сначала вероятностное пространство состоит из конечного числа элементов.

Теорема П.1.1. (теорема Чебышева). Пусть случайные величины X_1, X_2, …, X_k попарно независимы и существует число C, такое, что $D(X_i) \leq C$ при всех $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда для любого положительного числа ε выполнено неравенство:

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_k}{k}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_k)}{k}\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{C}{k\varepsilon^2}. \qquad (П1.1)$$

Частным случаем теоремы Чебышева является теорема Бернулли — первый в истории вариант закона больших чисел. Известный математики Якоб Бернулли (1654–1705), живший в городе Базель в Швейцарии, в самом конце XVII в. доказал это утверждение в рамках математической модели (опубликовано доказательство было лишь после его смерти, в 1713 г.). Современная формулировка теоремы Бернулли такова.

Теорема П.1.2 (теорема Бернулли). Пусть m — число наступлений события A в k независимых (попарно) испытаниях, и p есть вероятность наступления события A в каждом из испытаний. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство:

$$P\left\{\left|\frac{m}{k} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{p(1-p)}{k\varepsilon^2}. \qquad (\text{П}1.2)$$

Ясно, что при росте k выражения в правых частях формул (П1.1) и (П1.2) стремятся к 0. Таким образом, среднее арифметическое попарно независимых случайных величин сближается со средним арифметическим их математических ожиданий.

Напомним, что выше шла речь лишь о пространствах элементарных событий из конечного числа элементов. Однако приведенные теоремы верны и в общем случае, для произвольных пространств элементарных событий. Однако в список условий закона больших чисел необходимо добавить требование существования дисперсий. Легко видеть, что если существуют дисперсии, то существуют и математические ожидания. Закон больших чисел в формулировке Чебышева приобретает следующий вид.

Теорема П.1.3 (теорема Чебышева) [4, с. 147]. Если $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной,

$$D(X_1) \leq C,\, D(X_2) \leq C,\, \ldots,\, D(X_i) \leq C,\, \ldots$$

то, каково бы ни было постоянное число $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} MX_j\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad (\text{П}1.3)$$

С точки зрения прикладных статистических исследований ограниченность дисперсий вполне естественна. Она вытекает, например, из ограниченности диапазона изменения практически всех величин, используемых при реальных расчетах.

В 1923 г. А.Я. Хинчин показал, что если случайные величины не только независимы, но и одинаково распределены, то существование у них математического ожидания является необходимым и достаточным условием для применимости закона больших чисел [4, с. 150]. Найдены и более экзотические варианты закона больших чисел. Например, такой.

Теорема П.1.4 [4, с. 150–151]. Для того чтобы для последовательности X_1, X_2, …, X_k, … (как угодно зависимых) случайных величин при любом положительном ε выполнялось соотношение (П1.3), необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$

$$M\frac{\left(\sum_{j=1}^{k}(X_j - MX_j)\right)^2}{n^2 + \left(\sum_{j=1}^{k}(X_j - MX_j)\right)^2} \to 0.$$

Законы больших чисел для случайных величин служат основой для аналогичных утверждений для случайных элементов в пространствах более сложной природы. В частности, в пространствах произвольной природы (см. гл. 7). Однако здесь мы ограничимся классическими формулировками, служащими основой для современных статистических методов.

Смысл классических законов больших чисел состоит в том, что выборочное среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин приближается (сходится) к математическому ожиданию этих величин. Другими словами, выборочные средние сходятся к теоретическому среднему.

Это утверждение справедливо и для других видов средних. Например, выборочная медиана сходится к теоретической медиане. Это утверждение — тоже закон больших чисел, но неклассический.

Существенным продвижением в теории вероятностей во второй половине XX в. явилось введение средних величин в пространствах произвольной природы и получение для них законов больших чисел, т. е. утверждений, состоящих в том, что эмпирические (т. е. выборочные) средние сходятся к теоретическим средним.

П.1.2. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Простейший вариант центральной предельной теоремы (ЦПТ) теории вероятностей таков.

Теорема П.1.5 (центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых). Пусть X_1, X_2, …, X_n, … — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическими ожиданиями $M(X_i) = m$ и дисперсиями $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, …, n, …$

Тогда для любого действительного числа x существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}<x\right)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

где Φ(x) — функция стандартного нормального распределения.

Эту теорему иногда называют теоремой Линдеберга — Леви [9, с. 122].

В ряде прикладных задач не выполнено условие одинаковой распределенности. В таких случаях центральная предельная теорема обычно остается справедливой, однако на последовательность случайных величин приходится накладывать те или иные условия. Суть этих условий состоит в том, что ни одно слагаемое не должно быть доминирующим, вклад каждого слагаемого в среднее арифметическое должен быть пренебрежимо мал по сравнению с итоговой суммой. Наиболее часто используется теорема Ляпунова.

Теорема П.1.6 (теорема Ляпунова — центральная предельная теорема для разнораспределенных слагаемых). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые случайные величины с математическими ожиданиями $M(X_i) = m_i$ и дисперсиями $D(X_i) = \sigma^2_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Пусть при некотором $\delta > 0$ у всех рассматриваемых случайных величин существуют центральные моменты порядка $2 + \delta$ и безгранично убывает «дробь Ляпунова»:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}M\,|X_k-m_k|^{2+\delta}=0,$$

где

$$B_k^2=\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2=D\left(\sum_{i=1}^{k}X_i\right).$$

Тогда для любого действительного числа x существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n-m_1-m_2-\ldots-m_n}{B_n}<x\right)=\Phi(x), \tag{П1.4}$$

где Φ(x) — функция стандартного нормального распределения.

В случае одинаково распределенных случайных слагаемых

$$m_1=m_2=\ldots=m_n=m,\;\; B_n=D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\sigma\sqrt{n},$$

и теорема Ляпунова переходит в теорему Линдеберга — Леви.

История получения центральных предельных теорем для случайных величин растянулась на два века: от первых работ Муавра в 30-х гг. XVIII в. до необходимых и достаточных условий, полученных Линдебергом и Феллером в 30-х гг. XX в.

Теорема П.1.7 (теорема Линдеберга — Феллера). Пусть X_1, X_2, …, X_n, … — независимые случайные величины с математическими ожиданиями $M(X_i) = m_i$ и дисперсиями $D(X_i) = \sigma^2{}_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Предельное соотношение (П1.4), т. е. центральная предельная теорема, выполнено тогда и только тогда, когда при любом $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-m_k|>\tau B_n} (x - m_k)^2 dF_k(x) = 0,$$

где $F_k(x)$ обозначает функцию распределения случайной величины X_k.

Доказательства перечисленных в настоящем разделе центральных предельных теорем для случайных величин можно найти в классическом курсе теории вероятностей [4].

Для обоснования многих статистических методов большое значение имеет многомерная центральная предельная теорема. В ней речь идет не о сумме случайных величин, а о сумме случайных векторов.

Теорема П.1.8 (необходимое и достаточное условие многомерной сходимости [9, с. 124]). Пусть F_n обозначает совместную функцию распределения k-мерного случайного вектора $(X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(k)})$, $n = 1, 2, \ldots$, и $F_{\lambda n}$ — функция распределения линейной комбинации $\lambda_1 X_n^{(1)} + \ldots + \lambda_k X_n^{(k)}$. Необходимое и достаточное условие для сходимости F_n к некоторой k-мерной функции распределения F состоит в том, что $F_{\lambda n}$ имеет предел для любого вектора λ.

Приведенная теорема ценна тем, что с ее помощью сходимость векторов сводится к сходимости линейных комбинаций их координат, т. е. к сходимости обычных случайных величин, рассмотренных ранее. Однако она не дает возможности непосредственно указать предельное распределение. Это можно сделать с помощью следующей теоремы.

Теорема П.1.9 (теорема о многомерной сходимости). Пусть F_n и $F_{\lambda n}$ — те же, что в предыдущей теореме. Пусть F — совместная функция распределения k-мерного случайного вектора $(X_1, \ldots, X_k)$. Если функция распределения $F_{\lambda n}$ сходится при росте объема выборки к функции распределения F_λ для любого вектора λ, где F_λ — функция распределения линейной комбинации $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_k X_k$, то F_n сходится к F.

Здесь сходимость F_n к F означает, что для любого k-мерного вектора $(x_1, \ldots, x_k)$, такого, что функция распределения F непрерывна в $(x_1, \ldots, x_k)$, числовая последовательность $F_n(x_1, \ldots, x_k)$ сходится при росте n к числу $F(x_1, \ldots, x_k)$. Другими словами, сходимость функций распределения понимается точно так же, как при обсуждении предельных теорем для случайных величин выше. Приведем многомерный аналог этих теорем.

Теорема П.1.10 (многомерная центральная предельная теорема) [9]. Рассмотрим независимые одинаково распределенные k-мерные случайные векторы:

$$U_n' = (U_{1n}, \ldots, U_{kn}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где штрих обозначает операцию транспонирования вектора. Предположим, что случайные векторы U_n имеют моменты первого и второго порядка, т. е.

$$M(U_n) = \mu, D(U_n) = \Sigma,$$

где μ — вектор математических ожиданий координат случайного вектора, Σ — его ковариационная матрица. Введем последовательность средних арифметических случайных векторов:

$$\overline{U}_n = (\overline{U}_{1n}, \ldots, \overline{U}_{kn}), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \overline{U}_{in} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij}.$$

Тогда случайный вектор $\sqrt{n}(\overline{U}_n - \mu)$ имеет асимптотическое k-мерное нормальное распределение $N_k(0, \Sigma)$, т. е. он асимптотически распределен так же, как k-мерная нормальная величина с нулевым математическим ожиданием, ковариационной Σ и плотностью:

$$N_k(u \mid 0, \Sigma) = (2\pi)^{-k/2} \mid \Sigma \mid^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} u' \Sigma^{-1} u \right\}.$$

Здесь $|\Sigma|$ — определитель матрицы Σ. Другими словами, распределение случайного вектора $\sqrt{n}(\overline{U}_n - \mu)$ сходится к k-мерному нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Σ.

Напомним, что многомерным нормальным распределением с математическим ожиданием μ и ковариационной матрицей Σ называется распределение, имеющее плотность:

$$N_k(u\,|\,\mu,\Sigma)=(2\pi)^{-k/2}\,|\,\Sigma\,|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(u-\mu)'\Sigma^{-1}(u-\mu)]\right\}.$$

Многомерная центральная предельная теорема показывает, что распределения сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов при большом числе слагаемых хорошо приближаются с помощью нормальных распределений, имеющих такие же первые два момента (вектор математических ожиданий координат случайного вектора и его корреляционную матрицу), как и исходные векторы. От одинаковой распределенности можно отказаться, но это потребует некоторого усложнения символики. В целом из теоремы о многомерной сходимости вытекает, что многомерный случай ничем принципиально не отличается от одномерного.

Пример. Пусть X_1, … X_n, … — независимые одинаково распределенные случайные величины. Рассмотрим k-мерные независимые одинаково распределенные случайные векторы:

$$U_n' = (X_n, X_n^2, X_n^3, \ldots, X_n^k),\quad n = 1,2,\ldots$$

Их математическое ожидание — вектор теоретических начальных моментов, а ковариационная матрица составлена из соответствующих центральных моментов. Тогда $\overline{U}_n$ — вектор выборочных центральных моментов. Многомерная центральная предельная теорема утверждает, что $\overline{U}_n$ имеет асимптотически нормальное распределение. Как вытекает из теорем о наследовании сходимости и о линеаризации (см. ниже), из распределения $\overline{U}_n$ можно вывести распределения различных функций от выборочных начальных моментов. А поскольку центральные моменты выражаются через начальные моменты, то аналогичное утверждение верно и для них.

П.1.3. ТЕОРЕМЫ О НАСЛЕДОВАНИИ СХОДИМОСТИ

Суть проблемы наследования сходимости. Пусть распределения случайных величин X_n при $n \to \infty$ стремятся к распределению случайной величины X. При каких функциях f можно утверждать, что распределения случайных величин $f(X_n)$ сходятся к распределению $f(X)$, т. е. наследуется сходимость?

Хорошо известно, что для непрерывных функций f сходимость наследуется [9]. Однако в статистических методах используются различные обобщения этого утверждения. ***Необходимость обобщений связана с тремя обстоятельствами:***

1. Статистические данные могут моделироваться не только случайными величинами, но и случайными векторами, случайными множествами, случайными элементами произвольной природы (т. е. функциями на вероятностном пространстве со значениями в произвольном множестве).

2. Переход к пределу должен рассматриваться не только для случая безграничного возрастания объема выборки, но и в более общих случаях. Например, если в постановке статистической задачи участвуют несколько выборок объемов $n(1)$, $n(2)$, …, $n(k)$, то вполне обычным является предположение о безграничном росте всех этих объемов (что можно описать и как $\min\{n(1), n(2), \ldots, n(k)\} \to \infty$).

3. Функция f не обязательно является непрерывной. Она может иметь разрывы. Кроме того, она может зависеть от параметров, по которым происходит переход к пределу. Например, может зависеть от объемов выборок. Так, в гл. 2 при изучении критерия Крамера — Уэлча понадобилось рассмотреть функцию $f = f(n(1), n(2), \ldots, n(k))$, для расчета значений которой необходимо использовать объемы выборок.

Расстояние Прохорова и сходимость по направленному множеству. Введем необходимые для дальнейшего изложения понятия.

Расстояние (метрика) Прохорова. Пусть C — некоторое пространство, A — его подмножество, d — метрика в C. Введем понятие ε-окрестности множества A в метрике d:

$$S(A, \varepsilon) = \{x \in C: d(A, x) < \varepsilon\}.$$

Таким образом, ε-окрестность множества A — это совокупность всех точек пространства C, отстоящих от A не более чем на положительное число ε. При этом расстояние от точки x до множества A — это точная нижняя грань расстояний от x до точек множества A, т. е.

$$d(A, x) = \inf\{d(x, y): y \in A\}.$$

Пусть P_1 и P_2 — две вероятностные меры на C (т. е. распределения двух случайных элементов со значениями в C). Пусть D_{12} — множество чисел $\varepsilon > 0$, таких, что

$$P_1(A) \le P_2(S(A, \varepsilon) + \varepsilon$$

для любого замкнутого подмножества A пространства C. Пусть D_{21} — множество чисел $\varepsilon > 0$, таких, что

$$P_2(A) \le P_1(S(A, \varepsilon) + \varepsilon$$

для любого замкнутого подмножества A пространства C. Расстояние Прохорова $L(P_1, P_2)$ между вероятностными мерами (его можно рассматривать и как расстояние между случайными элементами с распределениями P_1 и P_2 соответственно) вводится формулой:

$$L(P_1, P_2) = \max(\inf D_{12}, \inf D_{21}).$$

С помощью расстояния (метрики) Прохорова формализуется понятие сходимости распределений случайных элементов в произвольном пространстве.

Расстояние $L(P_1, P_2)$ введено академиком РАН Юрием Васильевичем Прохоровым в середине XX в. и широко используется в современной теории вероятностей.

Сходимость по направленному множеству [5, с. 95–96]. Бинарное отношение $\geq$ (упорядочение), заданное на множестве B, называется направлением на нем, если B не пусто и:

а) если m, n и p — такие элементы множества B, что $m \geq n$ и $n \geq p$, то $m \geq p$;

б) $m \geq m$ для любого m из B;

в) если m и n принадлежат B, то найдется элемент p из B, такой, что $p \geq m$ и $p \geq n$.

Направленное множество — это пара $(B, \geq)$, где $\geq$ — направление на множестве B. Направленностью (или «последовательностью по направленному множеству») называется пара $(f, \geq)$, где f — функция, $\geq$ — направление на ее области определения. Пусть f: $B \to Y$, где Y — топологическое пространство. Направленность $(f, \geq)$ сходится в топологическом пространстве Y к точке y_0, если для любой окрестности U точки y_0 найдется p из B, такое, что $f(q) \in U$ при любом $q \geq p$. В таком случае говорят также о сходимости по направленному множеству.

Пусть $B = \{(n(1), n(2), \ldots, n(k))\}$ — совокупность векторов, каждый из которых составлен из объемов k выборок. Пусть

$$(n(1), n(2), \ldots, n(k)) \geq (n_1(1), n_1(2), \ldots, n_1(k))$$

тогда и только тогда, когда $n(i) \geq n_1(i)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда $(B, \geq)$ — направленное множество, сходимость по которому эквивалентна сходимости при $\min \{n(1), n(2), \ldots, n(k)\} \to \infty$.

Чтобы охватить различные частные случаи, целесообразно предельные теоремы формулировать в терминах сходимости по направленному множеству. Будем писать $B = \{\alpha\}$. Пусть запись $\alpha \to \infty$ обозначает переход к пределу по направленному множеству.

Формулировка проблемы наследования сходимости. Пусть случайные элементы X_α со значениями в пространстве C сходятся при $\alpha \to \infty$ к случайному элементу X, где через $\alpha \to \infty$ обозначен переход к пределу по направленному множеству. Сходимость случайных элементов означает, что $L(X_\alpha, X) \to 0$ при $\alpha \to \infty$, где L — метрика Прохорова в пространстве C.

Пусть f_α: $C \to Y$ — некоторые функции. Какие условия надо на них наложить, чтобы из $L(X_\alpha, X) \to 0$ вытекало, что $L_1(f_\alpha(X_\alpha), f_\alpha(X)) \to 0$ при $\alpha \to \infty$, где L_1 — метрика Прохорова в пространстве Y? Другими словами, какие условия на функции f_α: $C \to Y$ гарантируют наследование сходимости?

В работах [6, 7] найдены необходимые и достаточные условия на функции f_α: $C \to Y$, гарантирующие наследование сходимости. Описанию этих условий посвящена оставшаяся часть разд. П1.3.

Приведем для полноты изложения строгие формулировки математических предположений.

Математические предположения. Пусть C и Y — полные сепарабельные метрические пространства, Пусть выполнены обычные предположения измеримости: X_α и X — случайные элементы C, $f_\alpha(X_\alpha)$ и $f_\alpha(X)$ — случайные элементы в Y, рассматриваемые ниже подмножества пространств C и Y лежат в соответствующих σ-алгебрах измеримых подмножеств, и т. д.

Понадобятся некоторые определения. Разбиение $T_n = \{C_{1n}, C_{2n}, \ldots, C_{nn}\}$ пространства C — это такой набор подмножеств C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, этого пространства, что пересечение любых двух из них пусто, а объединение совпадает с C. Диаметром $diam(A)$ подмножества A множества C называется точная верхняя грань расстояний между элементами A, т. е.

$$diam(A) = \sup \{d(x, y), x \in A, y \in A\},$$

где $d(x, y)$ — метрика в пространстве C. Обозначим ∂A границу множества A, т. е. совокупность точек x, таких, что любая их окрестность $U(x)$ имеет непустое пересечение как с A, так и с $C \setminus A$.

Колебанием $\delta(f, B)$ функции f на множестве B называется:

$$\delta(f, B) = \sup\{|f(x) - f(y)|, x \in B, y \in B\}.$$

Теорема П.1.11 (достаточное условие для наследования сходимости). Пусть $L(X_\alpha, X) \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Пусть существует последовательность T_n разбиений пространства C, такая, что $P(X \in \partial A) = 0$ для любого A из T_n и, основное условие, для любого $\varepsilon > 0$

$$m_\varepsilon(\alpha, n) = \sum P(X \in A) \to 0 \qquad \text{(П1.5)}$$

при $n \to \infty$ и $\alpha \to \infty$, где сумма берется по всем тем A из T_n, для которых колебание функции f_α на A больше ε, т. е. $\delta(f_\alpha, A) > \varepsilon$. Тогда $L_1(f_\alpha(X_\alpha), f_\alpha(X)) \to 0$ при $\alpha \to \infty$.

Теорема П.1.12 (необходимое условие для наследования сходимости). Пусть Y — конечномерное линейное пространство, $Y = R^k$. Пусть случайные элементы $f_\alpha(X)$ асимптотически ограничены по вероятности при $\alpha \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $S(\varepsilon)$ и элемент направленного множества $\alpha(\varepsilon)$, такие, что $P(\|f_\alpha(X)\| > S(\varepsilon)) < \varepsilon$ при $\alpha \geq \alpha(\varepsilon)$, где $\|f_\alpha(X)\|$ — норма (длина) вектора $f_\alpha(X)$. Пусть существует последовательность T_n разбиений пространства C, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \max\{diam(C_{jn}),\ C_{jn} \in T_n\} = 0,$$

т. е. последовательность T_n является безгранично измельчающейся. Самое существенное — пусть условие (П1.5) не выполнено для последовательности T_n. Тогда существует последовательность случайных элементов X_α, такая, что $L(X_\alpha, X) \to 0$ при $\alpha \to \infty$, но $L_1(f_\alpha(X_\alpha), f_\alpha(X))$ не сходится к 0 при $\alpha \to \infty$.

Несколько огрубляя, можно сказать, что условие (П1.5) является необходимым и достаточным для наследования сходимости.

Пример 1. Пусть C и Y — конечномерные линейные пространства, функции f_α не зависят от α, т. е. $f_\alpha \equiv f$, причем функция f ограничена. Тогда условие (П1.5) эквивалентно требованию интегрируемости по Риману — Стилтьесу функции f по мере $G(A) = P(X \in A)$. В частности, условие (П1.5) выполнено для непрерывной функции f.

В конечномерных пространствах C вместо сходимости $L(X_\alpha, X) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ можно говорить о слабой сходимости функций распределения случайных векторов X_α к функции распределения случайного вектора X. Речь идет о «сходимости по распределению», т. е. о сходимости во всех точках непрерывности функции распределения случайного вектора X. В этом случае разбиения могут состоять из многомерных параллелепипедов [6, гл. 2].

Пример 2. Полученные выше результаты дают обоснование для рассуждений типа следующего (ср., например, утверждения в гл. 2). Пусть по двум независимым выборкам объемов m и n соответственно построены статистики X_m и Y_n. Пусть известно, что распределения этих статистик сходятся при безграничном росте объемов выборок к стандартному нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Пусть $a(m, n)$ и $b(m, n)$ — некоторые коэффициенты. Тогда согласно результатам примера 1 распределение случайной величины $Z(m, n) = a(m, n)X_m + b(m, n)Y_n$ сближается с распределением нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией $a^2(m, n) + b^2(m, n)$. Если же $a^2(m, n) + b^2(m, n) = 1$, например:

$$a(m,n)=\sqrt{\frac{m}{m+n}}, \quad b(m,n)=\sqrt{\frac{n}{m+n}},$$

то распределение $Z(m, n)$ сходится при безграничном росте объемов выборок к стандартному нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

П.1.4. МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ

При разработке статистических методов часто возникает следующая задача [9, с. 338]. Имеется последовательность k-мерных случайных векторов $X_n = (X_{1n}, X_{2n}, \ldots, X_{kn})$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $X_n \to a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ при $n \to \infty$, и последовательность функций f_n: $R^k \to R^1$. Требуется найти распределение случайной величины $f_n(X_n)$.

Основная идея: рассмотреть главный линейный член функции f_n в окрестности точки a. Из математического анализа известно, что

$$f_n(X_n)-f_n(a)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f_n(a)}{\partial x_j}(X_{jn}-a_j)+O_n(\|X_n-a\|^2),$$

где остаточный член является бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем линейный член. Таким образом, произвольная функция может быть заменена на линейную функцию от координат случайного вектора. Эта замена проводится с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Конечно, должны быть выполнены некоторые математические условия регулярности. Например, функции f_n должны быть дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки a.

Если вектор X_n является асимптотически нормальным с математическим ожиданием a и ковариационной матрицей $\sum / n$, где $\sum = ||\sigma_{ij}||$, причем $\sigma_{ij} = nM(X_i - a_i)(X_j - a_j)$, то линейная функция от его координат также асимптотически нормальна. Следовательно, при очевидных условиях регулярности $f_n(X_n)$ — асимптотически нормальная случайная величина с математическим ожиданием $f_n(a)$ и дисперсией:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f_n(a)}{\partial x_i}\frac{\partial f_n(a)}{\partial x_j}\sigma_{ij}\,.$$

Для практического использования асимптотической нормальности $f_n(X_n)$ остается заменить неизвестные моменты a и $\sum$ на их оценки. Например, если X_n — это среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных векторов, то a можно заменить на X_n, а $\sum$ — на выборочную ковариационную матрицу.

Пример. Пусть $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. В качестве X_n ($k = 1$) рассмотрим выборочное среднее арифметическое:

$$\overline{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n}\,.$$

Как известно, в силу закона больших чисел $\overline{Y} \to a = M(Y)$. Следовательно, для получения распределений функций от выборочного среднего арифметического можно использовать метод линеаризации. В качестве примера рассмотрим $f_n(y) = f(y) = y^2$. Тогда

$$\left(\overline{Y}\right)^2 - a^2 = \frac{df(a)}{dy}\left(\overline{Y} - a\right) + O\left(\left(\overline{Y} - a\right)^2\right) = 2a\left(\overline{Y} - a\right) + O\left(\left(\overline{Y} - a\right)^2\right).$$

Из этого соотношения следует, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка:

$$\left(\overline{Y}\right)^2 = a^2 + 2a\left(\overline{Y} - a\right).$$

Поскольку в соответствии с центральной предельной теоремой (разд. П1.2) выборочное среднее арифметическое является асимптотически нормальной случайной величиной с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 / n, то квадрат этой статистики является асимптотически нормальной случайной величиной с математическим ожиданием a^2 и дисперсией $4a^2\sigma^2 / n$. Для практического использования может оказаться полезной замена параметров (асимптотического нормального распределения) на их оценки, а именно, математического ожидания — на $(\overline{Y})^2$, а дисперсии — на $4(\overline{Y})^2 s^2/n$, где s^2 — выборочная дисперсия.

Большое внимание (целая глава!) уделено методу линеаризации в классическом учебнике Е.С. Вентцель [2].

П.1.5. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Многие используемые в статистических методах функции от результатов наблюдений выражаются через эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ (эмпирической функцией распределения $F_n(x)$ называется доля элементов выборки, меньших x). К ним относятся статистики Колмогорова, Смирнова, омега-квадрат. Отметим, что и другие статистики выражаются через эмпирическую функцию распределения, например:

$$\overline{Y} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_n(x).$$

Полезным является преобразование Н.В. Смирнова $t = F(x)$. Тогда независимые случайные величины $Z_j = F(Y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, имеют равномерное распределение на отрезке [0; 1]. Рассмотрим построенную по ним эмпирическую функцию распределения $F_n(t)$, $0 \le t \le 1$. Эмпирическим процессом называется случайный процесс:

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t).$$

Рассмотрим критерии проверки согласия функции распределения выборки с фиксированной функцией распределения $F(x)$.

Статистика критерия Колмогорова записывается в виде:

$$K_n = \sup_{0 \le t \le 1} |\xi_n(t)|,$$

статистика критерия Смирнова — это

$$S_n = \sup_{0 \le t \le 1} \xi_n(t),$$

а статистика критерия омега-квадрат (Крамера — Мизеса — Смирнова) имеет вид:

$$\omega_n^2 = \int_0^1 \xi_n^2(t) dt .$$

Случайный процесс $\xi_n(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию $M\xi_n(s)\xi_n(t) = \min(s, t) - st$. Рассмотрим гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с такими же математическим ожиданием и ковариационной функцией. Он называется броуновским мостом. (Напомним, что гауссовским процесс именуется потому, что вектор $(\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_k))$ имеет многомерное нормальное распределение при любых наборах моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_k$.)

Пусть f — функционал, определенный на множестве возможных траекторий случайных процессов. ***Принцип инвариантности*** [3] состоит в том, что последовательность распределений случайных величин $f(\xi_n)$ сходится при $n \to \infty$ к распределению случайной величины $f(\xi)$. Сходимость по распределению обозначим символом =>. Тогда принцип инвариантности кратко записывается так: $f(\xi_n) \Rightarrow f(\xi)$. В частности, согласно принципу инвариантности статистика Колмогорова и статистика омега-квадрат сходятся по распределению к распределениям соответствующих функционалов от случайного процесса ξ:

$$K_n = \sup_{0 \le t \le 1} |\xi_n(t)| \Rightarrow \sup_{0 \le t \le 1} |\xi(t)|, \quad \omega_n^2 = \int_0^1 \xi_n^2(t) dt \Rightarrow \int_0^1 \xi^2(t) dt .$$

Таким образом, от проблем прикладной статистики сделан переход к теории случайных процессов.

Методами этой теории найдены распределения случайных величин:

$$\sup_{0\le t\le 1} |\xi(t)|, \int_0^1 \xi^2(t)dt.$$

Принцип инвариантности — инструмент получения предельных распределений функций от результатов наблюдений, используемых в прикладной статистике.

Обоснование принципу инвариантности может быть дано на основе теории сходимости вероятностных мер в функциональных пространствах [1]. Более простой подход, позволяющий к тому же получать необходимые и достаточные условия в предельной теории статистик интегрального типа (принцип инвариантности к ним нельзя применить), рассмотрен в гл. 7 учебника [8].

Почему принцип инвариантности так назван? Обратим внимание, что предельные распределения рассматриваемых статистик не зависят от их функции распределения $F(x)$. Другими словами, предельное распределение инвариантно относительно выбора $F(x)$.

В более широком смысле термин «принцип инвариантности» применяют тогда, когда предельное распределение не зависит от тех или иных характеристик исходных распределений [3]. В этом смысле наиболее известный «принцип инвариантности» — это центральная предельная теорема, поскольку предельное стандартное нормальное распределение — одно и то же для всех возможных распределений независимых одинаково распределенных слагаемых (лишь бы слагаемые имели конечные математическое ожидание и дисперсию).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биллингсли, П.* Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — Москва : Наука, 1977. — 352 с.

2. *Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей : учебник для студентов вузов / Е.С. Вентцель. — 10-е изд., стер. — Москва : Академия, 2005. — 571 с.

3. Вероятность и математическая статистика : энциклопедия / главный редактор Ю.В. Прохоров. — Москва : Большая Российская энциклопедия, 1999. — 910 с.

4. *Гнеденко, Б.В.* Курс теории вероятностей : учебник / Б.В. Гнеденко. — 13-е изд. — Москва : URSS. 2022. — 456 с.

5. *Келли, Дж.Л.* Общая топология / Дж.Л. Келли. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1981. — 431 с.

6. *Орлов, А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях / А.И. Орлов. — Москва : Наука, 1979. — 296 с.

7. *Орлов, А.И.* Асимптотическое поведение статистик интегрального типа / А.И. Орлов // Вероятностные процессы и их приложения : межвузовский сборник. — Москва : Изд-во МИЭМ, 1989. — С. 118–123.

8. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

9. *Рао, С.Р.* Линейные статистические методы и их применения / С.Р. Рао. — Москва : Наука, 1968. — 548 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. Какова роль законов больших чисел в обосновании статистических методов?

2. Приведите примеры использования центральных предельных теорем при построении статистических процедур доверительного оценивания и проверки гипотез.

3. Почему при обосновании статистических методов необходимо использовать теоремы о наследовании сходимости?

4. Примените метод линеаризации для изучения распределения выборочной дисперсии (исходя из асимптотической нормальности при $n \to \infty$ среднего арифметического двумерных векторов $(X_k, (X_k)^2)$, $k = 1, 2, \ldots, n$).

5. Приведите примеры применения в прикладной статистике принципа инвариантности.

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ, РЕФЕРАТОВ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Законы больших чисел и различные варианты центральной предельной теоремы — основные результаты классической теории вероятностей.

2. Применение многомерной центральной предельной теоремы совместно с теоремой о наследовании сходимости в эконометрике (по материалам гл. 1–7 настоящего учебника).

3. Место теорем о наследовании сходимости и метода линеаризации в асимптотической прикладной статистике.

4. Необходимые и достаточные условия наследования сходимости.

5. Принцип инвариантности для классических непараметрических статистик.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА — ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ НЕЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ

Нечеткие множества — важный для применений эконометрики вид объектов нечисловой природы. Они не раз упоминались в гл. 7 настоящего учебника. Для тех, кто не изучал теорию нечетких множеств, приведем основные сведения о ней.

П.2.1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Нечеткие множества. Пусть A — некоторое множество. Подмножество B множества A характеризуется своей характеристической функцией:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases} \qquad (\text{П.2.1})$$

Что такое нечеткое множество? Обычно говорят, что нечеткое подмножество C множества A характеризуется своей функцией принадлежности μ_C: $A \to [0; 1]$. Значение функции принадлежности в точке x показывает степень принадлежности этой точки нечеткому множеству. Нечеткое множество описывает неопределенность, соответствующую точке x, — она одновременно и входит, и не входит в нечеткое множество C. За вхождение — $\mu_C(x)$ шансов, за второе, т. е. за то, что точка не входит в множество, — $(1 - \mu_C(x))$ шансов.

Если функция принадлежности $\mu_C(x)$ имеет вид (П.2.1) при некотором B, то C есть обычное (четкое) подмножество A, а именно $B = C$. Таким образом, теория нечетких множество является более общей или хотя бы не менее общей математической дисциплиной, чем обычная теория множеств, поскольку обычные множества — частный случай нечетких. Соответственно, можно ожидать, что теория нечеткости как целое обобщает классическую математику. Однако позже мы увидим, что теория нечеткости в определенном смысле сводится к теории случайных множеств и тем самым является частью классической математики. Другими словами, по степени общности обычная математика и нечеткая математика эквивалентны. Однако для практического применения, например в теории принятия решений, описание и анализ неопределенностей с помощью теории нечетких множеств весьма плодотворны.

Обычное подмножество можно было бы отождествить с его характеристической функцией. Этого математики не делают, поскольку для задания функции (в ныне принятом подходе) необходимо сначала задать множество. Нечеткое же подмножество с формальной точки зрения можно отождествить с его функцией принадлежности. Однако термин «нечеткое подмножество» предпочтительнее при построении математических моделей реальных явлений.

Теория нечеткости является обобщением интервальной математики, посвященной обработке интервальных чисел (см. гл. 7 настоящего учебника). Действительно, функция принадлежности:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a;b], \\ 0, & x \notin [a;b] \end{cases}$$

задает интервальную неопределенность: про рассматриваемую величину известно лишь, что она лежит в заданном интервале $[a, b]$. Тем самым описание неопределенностей с помощью нечетких множеств является более общим, чем с помощью интервалов.

Начало современной теории нечеткости положено работой 1965 г. американского ученого азербайджанского происхождения Л.А. Заде [1]. К настоящему времени по этой теории опубликованы тысячи книг и статей, издается несколько международных журналов (половина — в Китае), выполнено достаточно много как теоретических, так и прикладных работ. Первая книга российского автора по теории нечеткости вышла в 1980 г. [2].

Основоположник теории нечеткости Л.А. Заде рассматривал теорию нечетких множеств как аппарат анализа и моделирования гуманистических систем, т. е. систем, в которых участвует человек. Его подход опирается на предпосылку о том, что элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов, для которых переход от «принадлежности» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен [3]. В настоящее время методы теории нечеткости используются почти во всех прикладных областях, в том числе при управлении предприятиями, качеством продукции и технологическими процессами, при описании предпочтений потребителей и оптимизации процессов варки стали.

Л.А. Заде использовал термин *fuzzy set* (нечеткое множество). На русский язык термин *fuzzy* переводили как нечеткий, размытый, расплывчатый и даже как пушистый и туманный.

Аппарат теории нечеткости довольно громоздок. В качестве примера дадим определения теоретико-множественных операций над нечеткими множествами. Пусть C и D — два нечетких подмножества A с функциями принадлежности $\mu_C(x)$ и $\mu_D(x)$ соответственно. Пересечением $C \cap D$, произведением CD, объединением $C \cup D$, суммой $C + D$, отрицанием $\overline{C}$ называются нечеткие подмножества A с функциями принадлежности:

$$\mu_{C \cap D}(x) = \min(\mu_C(x), \mu_D(x));$$

$$\mu_{CD}(x) = \mu_C(x)\ \mu_D(x);$$

$$\mu_{C \cup D}(x) = \max(\mu_C(x), \mu_D(x));$$

$$\mu_{C+D}(x) = \mu_C(x)\ \mu_D(x) - \mu_C(x)\ \mu_D(x);$$

$$\mu_{\overline{C}}(x) = 1 - \mu_C(x),\ x \in A$$

соответственно.

Теория нечетких множеств в определенном смысле сводится к теории вероятностей, а именно к теории случайных множеств. Соответствующий цикл теорем приведен в следующем разделе. Однако при решении прикладных задач вероятностно-статистические методы и методы теории нечеткости обычно рассматриваются как различные.

Для знакомства со спецификой нечетких множеств изучим некоторые их свойства.

В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые нечеткие множества являются подмножествами одного и того же множества Y.

Законы де Моргана для нечетких множеств. Как известно, законами де Моргана называются следующие тождества алгебры множеств:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad (П.2.2)$$

Теорема П.2.1. Для нечетких множеств справедливы тождества:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad (П.2.3)$$

$$\overline{A + B} = \overline{A}\ \overline{B},\ \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}. \qquad (П.2.4)$$

Доказательство теоремы П.2.1 состоит в непосредственной проверке справедливости соотношений (П.2.3) и (П.2.4) путем вычисления значений функций принадлежности участвующих в этих соотношениях нечетких множеств на основе определений, данных выше.

Тождества (П.2.3) и (П.2.4) назовем законами де Моргана для нечетких множеств. В отличие от классического случая соотношений (П.2.2), они состоят из четырех тождеств, одна пара которых относится к операциям объединения и пересечения, а вторая — к операциям произведения и суммы. Как и соотношение (П.2.2) в алгебре множеств, законы де Моргана в алгебре нечетких множеств позволяют преобразовывать выражения и формулы, в состав которых входят операции отрицания.

Дистрибутивный закон для нечетких множеств. Некоторые свойства операций над множествами не выполнены для нечетких множеств. Так, $A + A \neq A$, за исключением случая, когда A — «четкое» множество (т. е. функция принадлежности принимает только значения 0 и 1).

Верен ли дистрибутивный закон для нечетких множеств? В литературе иногда расплывчато утверждается, что «не всегда». Внесем полную ясность.

Теорема П.2.2. Для любых нечетких множеств A, B и C

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad \text{(П.2.5)}$$

В то же время равенство

$$A(B + C) = AB + AC \qquad \text{(П.2.6)}$$

справедливо тогда и только тогда, когда при всех $y \in Y$

$$\mu_A^2(y) - \mu_A(y))\mu_B(y)\mu_C(y) = 0.$$

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $y \in Y$. Для сокращения записи обозначим $a = \mu_A(y)$, $b = \mu_B(y)$, $c = \mu_C(y)$. Для доказательства тождества (П.2.5) необходимо показать, что

$$\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c)). \qquad \text{(П.2.7)}$$

Рассмотрим различные упорядочения трех чисел a, b, c. Пусть сначала $a \leq b \leq c$. Тогда левая часть соотношения (П.2.7) есть $\min(a, c) = a$, а правая — $\max(a, a) = a$, т. е. равенство (П.2.7) справедливо.

Пусть $b \le a \le c$. Тогда в соотношении (П.2.7) слева стоит $\min(a, c) = a$, а справа — $\max(b, a) = a$, т. е. соотношение (П.2.7) опять является равенством.

Если $b \le c \le a$, то в соотношении (П.2.7) слева стоит $\min(a, c) = c$, а справа — $\max(b, c) = c$, т. е. обе части снова совпадают.

Три остальные упорядочения чисел a, b, c разбирать нет необходимости, поскольку в соотношение (П.2.6) числа b и c входят симметрично. Тождество (П.2.5) доказано.

Второе утверждение теоремы 2 вытекает из того, что в соответствии с определениями операций над нечеткими множествами

$$\mu_{A(B+C)}(y) = a(b + c - bc) = ab + ac - abc$$

и

$$\mu_{AB+AC}(y) = ab + ac - (ab)(ac) = ab + ac - a^2bc.$$

Эти два выражения совпадают тогда и только тогда, когда $a^2bc = abc$, что и требовалось доказать.

Определение П.2.1. Носителем нечеткого множества A называется совокупность всех точек $y \in Y$, для которых $\mu_A(y) > 0$.

Следствие теоремы П.2.2. Если носители нечетких множеств B и C совпадают с Y, то равенство (П.2.6) имеет место тогда и только тогда, когда A — «четкое» (т. е. обычное, классическое, не нечеткое) множество.

Доказательство. По условию $\mu_B(y)\mu_C(y) \ne 0$ при всех $y \in Y$. Тогда из теоремы 2 следует, что $\mu^2_A(y) - \mu_A(y) = 0$, т. е. $\mu_A(y) = 1$ или $\mu_A(y) = 0$, что и означает, что A — четкое множество.

П.2.2. ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим четыре примера использования нечетких множеств при решении практических задач экономики и управления (менеджмента).

Пример описания неопределенности с помощью нечеткого множества. Понятие «богатый» часто используется при обсуждении социально-экономических проблем, в том числе и в связи с подготовкой и принятием решений. Однако очевидно, что разные лица вкладывают в это понятие различное содержание. Сотрудники Института высоких статистических технологий и эконометрики провели небольшое пилотное (т. е. пробное) социологическое исследование представления различных слоев населения о понятии «богатый человек».

Мини-анкета опроса выглядела так:

1. При каком месячном доходе (в условных единицах (у.е.) на одного человека в месяц) вы считали бы себя богатым человеком?

2. Оценив свой сегодняшний доход, к какой из категорий вы себя относите:

а) богатые;

б) достаток выше среднего;

в) достаток ниже среднего;

г) бедные;

д) за чертой бедности?

(В дальнейшем вместо полного наименования категорий будем оперировать буквами, например «в»-категория, «б»-категория и т. д.)

3. Ваша профессия, специальность.

Всего опрошено 74 человека, из них 40 — научные работники и преподаватели, 34 человека — не занятые в сфере науки и образования, в том числе 5 рабочих и 5 пенсионеров. Из всех опрошенных только один (!) считает себя богатым. Несколько типичных ответов научных работников и преподавателей приведены в табл. П.2.1, а аналогичные сведения для работников коммерческой сферы — в табл. П.2.2.

Таблица П.2.1

Типичные ответы научных работников и преподавателей

Ответы на вопрос 3	**Ответы на вопрос 1, у.е. на человека в месяц**	**Ответы на вопрос 2**	**Пол**
Кандидат наук	6	д	ж
Преподаватель	6	в	ж
Доцент	6	б	ж
Учитель	60	в	м
Старший научный сотрудник	60	д	м
Инженер-физик	140	д	ж
Программист	150	г	м
Научный работник	270	г	м

Таблица П.2.2

Типичные ответы работников коммерческой сферы

Ответы на вопрос 3	Ответы на вопрос 1	Ответы на вопрос 2	Пол
Вице-президент банка	600	а	ж
Заместитель директора банка	300	б	ж
Начальник кредитного отдела	300	б	м
Начальник отдела ценных бумаг	60	б	м
Главный бухгалтер	120	д	ж
Бухгалтер	90	в	ж
Менеджер банка	66	б	м
Начальник отдела проектирования	60	в	ж

Разброс ответов на первый вопрос — от 6 до 600 у.е. в месяц на человека. Результаты опроса показывают, что критерий богатства у финансовых работников в целом несколько выше, чем у научных работников и преподавателей (см. гистограммы на рис. П.2.1 и П.2.2 ниже).

Опрос показал, что выявить какое-нибудь конкретное значение суммы, которая необходима «для полного счастья», пусть даже с небольшим разбросом, нельзя, что вполне естественно. Как видно из табл. П.2.1 и П.2.2, денежный эквивалент богатства колеблется от 6 до 600 у.е. в месяц. Подтвердилось мнение, что работники сферы образования в подавляющем большинстве причисляют свой достаток к категории «в» и ниже (81 % опрошенных), в том числе к категории «д» отнесли свой достаток 57 %.

Со служащими коммерческих структур и бюджетных организаций иная картина: «г»-категория 1 человек (4 %), «д»-категория 4 человека (17 %), «б»-категория — 46 % и 1 человек «а»-категория.

Пенсионеры, что не вызывает удивления, отнесли свой доход к категории «д» (4 человека), и лишь один человек указал «г»-категорию. Рабочие же ответили так: 4 человека — «в» и один человек — «б».

Для представления общей картины в табл. П.2.3 приведены данные об ответах работников других профессий.

Прослеживается интересное явление: чем выше планка богатства для человека, тем к более низкой категории относительно этой планки он себя относит.

Для сводки данных естественно использовать гистограммы. Для этого необходимо сгруппировать ответы. Использовались 7 классов (интервалов):

1) до 30 у.е.;

2) от 30 до 60 у.е.;

3) от 60 до 90 у.е.;

4) от 90 до 120 у.е.;

5) от 120 до 150 у.е.;

6) от 150 до 180 у.е.;

7) более 180 у.е.

(Во всех интервалах левая граница исключена, а правая, наоборот, включена.)

Таблица П.2.3

Типичные ответы работников различных профессий

Ответы на вопрос 3	**Ответы на вопрос 1**	**Ответы на вопрос 2**	**Пол**
Работник торговли	6	б	ж
Дворник	12	в	ж
Водитель	60	в	м
Военнослужащий	60	в	м
Владелец бензоколонки	120	б	ж
Пенсионер	36	д	ж
Начальник фабрики	120	б	м
Хирург	30	в	м
Домохозяйка	60	в	ж
Слесарь-механик	150	в	м
Юрист	60	б	м
Оператор ЭВМ	120	д	м
Работник собеса	18	д	ж
Архитектор	150	б	ж

Сводная информация представлена на рис. П.2.1 (для научных работников и преподавателей) и П.2.2 (для всех остальных, т. е. для лиц, не занятых в сфере науки и образования, — служащих иных бюджетных организаций, коммерческих структур, рабочих, пенсионеров).

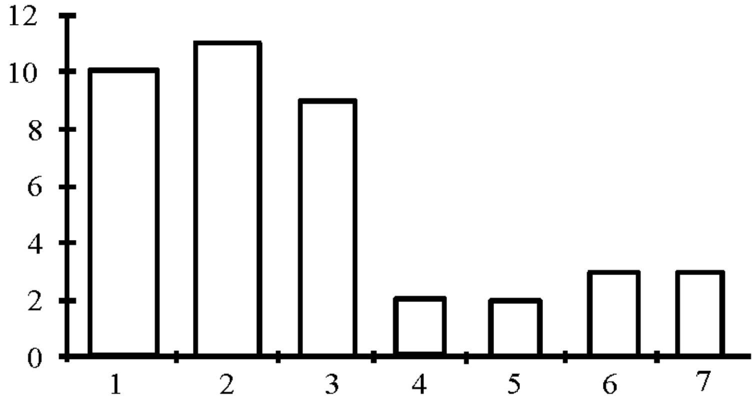


Рис. П.2.1. Гистограмма ответов на вопрос 1 для научных работников и преподавателей (40 человек)

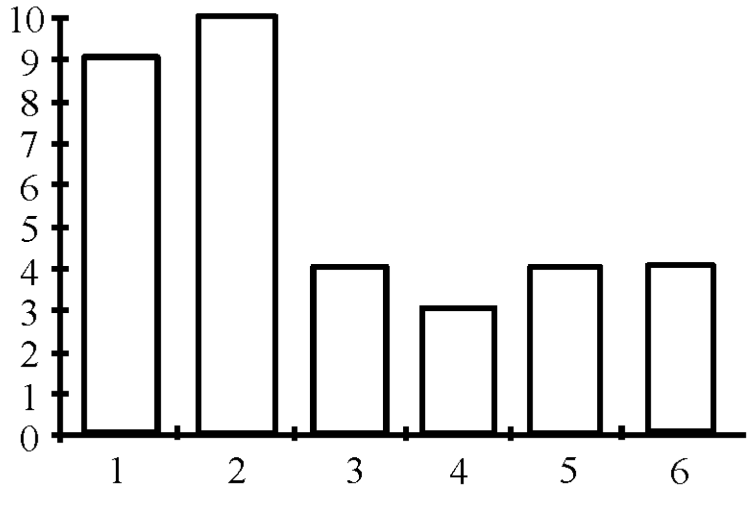


Рис. П.2.2. Гистограмма ответов на вопрос 1 для лиц, не занятых в сфере науки и образования (34 человека)

Для двух выделенных групп, а также для некоторых подгрупп второй группы рассчитаны сводные средние характеристики: выборочные средние арифметические, медианы, моды. При этом медиана группы — количество тысяч рублей, названное центральным по порядковому номеру опрашиваемым в возрастающем ряду ответов на вопрос 1, а мода группы — интервал, на котором столбик гистограммы самый высокий, т. е. в него «попало» максимальное количество опрашиваемых. Результаты приведены в табл. П.2.4.

Таблица П.2.4

Сводные средние характеристики ответов на вопрос 1 для различных групп (в тыс. руб. в месяц на человека)

Группа опрошенных	Среднее арифметическое	Медиана	Мода
Научные работники и преподаватели	70,0	43,5	(30; 60]
Лица, не занятые в сфере науки и образования	86,4	120,0	(30; 60]
Служащие коммерческих структур и бюджетных организаций	107,5	60,0	(30; 60]
Рабочие	90,0	78,0	–
Пенсионеры	61,8	60,0	–

Построим нечеткое множество, описывающее понятие «богатый человек» в соответствии с представлениями опрошенных. Для этого составим табл. П.2.5 на основе рис. П.2.1 и П.2.2 с учетом размаха ответов на первый вопрос (обратите внимание, что первый и последний из использованных ранее интервалов в табл. П.2.5 разбиты каждый на два интервала).

Пятая строка табл. П.2.5 задает функцию принадлежности нечеткого множества, выражающего понятие «богатый человек» в терминах его ежемесячного дохода. Это нечеткое множество является подмножеством множества из 9 интервалов, заданных в строке 2 табл. П.2.5, или множества из 9 условных номеров {0, 1, 2, …, 8}. Эмпирическая функция распределения, построенная по выборке из ответов 74 опрошенных на первый вопрос мини-анкеты, описывает понятие «богатый человек» как нечеткое подмножество положительной полуоси.

Таблица П.2.5

Число ответов, попавших в интервалы

№	Номер интервала	0	1	2	3	4
1	Интервал, тыс. руб. в месяц	(0; 6)	[6; 30]	(30; 60]	(60; 90]	(90; 120]
2	Число ответов в интервале	0	19	21	13	5

№	Номер интервала	0	1	2	3	4
3	Доля ответов в интервале	0	0,257	0,284	0,176	0,068
4	Накопленное число ответов	0	19	40	53	58
5	Накопленная доля ответов	0	0,257	0,541	0,716	0,784
№	**Номер интервала**	**5**	**6**	**7**	**8**	**–**
1	Интервал, тыс. руб. в месяц	(120; 150]	(150; 180]	(180; 600)	[600; +∞)	–
2	Число ответов в интервале	6	7	2	1	–
3	Доля ответов в интервале	0,081	0,095	0,027	0,013	–
4	Интервал, тыс. руб. в месяц	(120; 150]	(150; 180]	(180; 600)	[600; +∞)	–
5	Накопленное число ответов	64	71	73	74	–
6	Накопленная доля ответов	0,865	0,960	0,987	1,000	–

О разработке методики ценообразования на основе теории нечетких множеств. Для оценки значений показателей, не имеющих количественного выражения, можно использовать методы нечетких множеств. Например, в работе П.В. Битюкова [4] нечеткие множества применялись при моделировании задач ценообразования на электронные обучающие курсы, используемые при дистанционном обучении. Им проведено исследование значений фактора «Уровень качества курса» с использованием нечетких множеств. В ходе практического использования предложенной П.В. Битюковым методики ценообразования значения ряда других факторов могут также определяться с использованием теории нечетких множеств. Например, ее можно использовать для расчета прогноза рейтинга специальности в вузе с помощью экспертов, а также значений других факторов, относящихся к группе «Особенности курса». Опишем подход П.В. Битюкова как пример практического использования теории нечетких множеств.

Значение оценки, присваиваемой каждому интервалу для фактора «Уровень качества курса», определяется на универсальной шкале [0; 1], где необходимо разместить значения лингвистической переменной «Уровень качества курса»: НИЗКИЙ, СРЕДНИЙ, ВЫСОКИЙ. Степень принадлежности некоторого значения вычисляется как отношение числа ответов, в которых оно встречалось в определенном интервале шкалы, к максимальному (для этого значения) числу ответов по всем интервалам.

Был проведен опрос экспертов о степени влияния уровня качества электронных курсов на их потребительную ценность. Каждому эксперту в процессе опроса предлагалось оценить с позиции потребителя ценность того или иного класса курсов в зависимости от уровня качества. Эксперты давали свою оценку для каждого класса курсов по 10-балльной шкале (где 1 — min, 10 — max). Для перехода к универсальной шкале [0; 1] все значения 10-балльной шкалы оценки ценности были разделены на максимальную оценку, т. е. на 10.

Используя свойства функции принадлежности, необходимо предварительно обработать данные, чтобы уменьшить искажения, вносимые опросом. Естественными свойствами функций принадлежности являются наличие одного максимума и гладкие, затухающие до нуля фронты. Для обработки статистических данных можно воспользоваться так называемой матрицей подсказок. Предварительно удаляются явно ошибочные элементы. Критерием удаления служит наличие нескольких нулей в строке вокруг этого элемента.

Элементы матрицы подсказок вычисляются с использованием величин:

$$k_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij},\ j = \overline{1,\ n},$$

где b_{ij} — элемент таблицы с результатами анкетирования, сгруппированными по интервалам.

Выбирается максимальный элемент: $k_{\max} = \max_j k_j$, и далее все элементы матрицы при $k_j \neq 0$ преобразуются по формуле:

$$c_{ij} = \frac{b_{ij} k_{\max}}{k_j}, i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1,\ \mathrm{n}}.$$

Для столбцов, где $k_j = 0$, применяется линейная аппроксимация:

$$c_{ij} = \frac{c_{ij-1} + c_{ij+1}}{2},\ i = \overline{1,\ m}, j = \overline{1,\ n}.$$

Результаты расчетов сводятся в таблицу, на основании которой строятся функции принадлежности. Для этого находятся максимальные элементы по строкам:

$$c_{i\max} = \max_j c_{ij},\ \ i = 1, 2, ..., m,\ \ j = 1, 2, ..., n.$$

Функция принадлежности вычисляется по формуле:

$$\mu_{ij} = c_{ij} / c_{i\max} .$$

Результаты расчетов приведены в табл. П.2.6.

На рис. П.2.3 сплошными линиями показаны функции принадлежности значений лингвистической переменной «Уровень качества курса» после обработки таблицы, содержащей результаты опроса. Как видно из графика, функции принадлежности удовлетворяют описанным выше свойствам. Для сравнения пунктирной линией показана функция принадлежности лингвистической переменной для значения НИЗКИЙ без обработки данных.

Таблица П.2.6

Значения функции принадлежности лингвистической переменной

μ_i	Интервал на универсальной шкале									
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
μ_1	0	0,2	1	1	0,89	0,67	0	0	0	0
μ_2	0	0	0	0	0	0,33	1	1	0	0
μ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

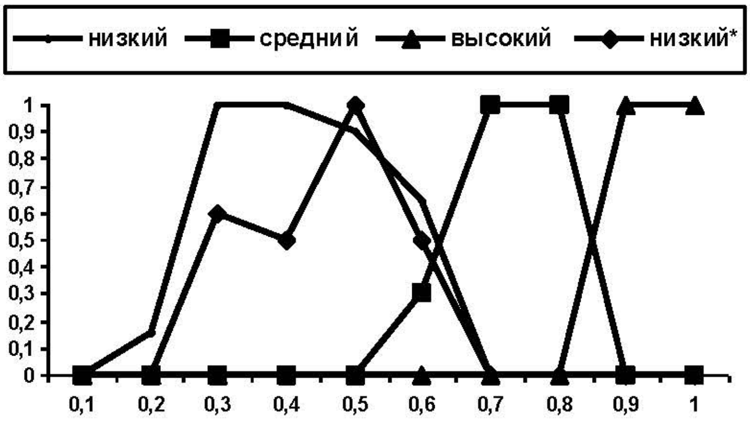


Рис. П.2.3. График функций принадлежности значений лингвистической переменной «Уровень качества курса»

Теория нечетких множеств — основа эконометрической поддержки контроллинга инноваций. Организационно-экономические модели на основе теории нечеткости являются полезными во многих областях экономики и управления. В качестве примера рассмотрим их применение в технологиях управления инновационными процессами [5].

В настоящее время активно разрабатывается подход к управлению инновационными проектами, основанный на методологии контроллинга. Одной из главных причин возникновения и внедрения концепции контроллинга для разработки инноваций на промышленных предприятиях стала необходимость в системной интеграции различных аспектов управления инновационными проектами. Контроллинг обеспечивает методическую и инструментальную базу для поддержки основных функций менеджмента: планирования, учета, контроля и анализа, а также оценки ситуаций для принятия управленческих решений [6].

Согласно [5], ***контроллинг инноваций включает в себя четыре этапа:***

1) оценки реализуемости проекта;

2) информационной поддержки планирования разработки инновационного проекта;

3) информационной поддержки контроля над осуществлением инновационного проекта;

4) информационной поддержки функции анализа.

На первом этапе контроллеру проекта необходимо ответить на вопрос: достигнет ли предприятие поставленных перед ним целей, если приступит к реализации проекта? Цели проекта, как и цели самого предприятия, должны иметь ясный смысл, результаты, полученные при достижении цели, — измеримы, а заданные ограничения (по времени, рамкам бюджета, выделенным ресурсам и качеству получаемых результатов) — выполнимы. Если при реализации проекта общефирменные цели не достигаются, то подразделение контроллинга вырабатывает предложения об альтернативных вариантах реализации проекта, способных удовлетворить поставленные цели.

На этом этапе возникает задача выбора варианта реализации проекта, позволяющего достичь общефирменные цели. Каждый предложенный вариант реализации проекта имеет свои преимущества и недостатки. Он может характеризоваться как количественными экономическими показателями, такими как затраты, поступления и др., техническими показателями, описывающими характеристики качества разрабатываемого продукта, так и качественными показателями, выраженными в виде терминов, например «крошечный», «маленький», «средний».

Целесообразно выделить эталонный вариант реализации проекта и его характеристики. Характеристики подбираются таким образом, чтобы проект был оптимальным с точки зрения предъявляемых к нему требований. Чтобы сравнить варианты реализации проекта с эталонным вариантом и выбрать из них лучший, можно применить эконометрические методы на основе теории нечеткости, рассмотренные ниже.

На втором этапе осуществляется разработка планово-организационных мероприятий. Подразделение контроллинга разрабатывает методики и инструменты планирования, наилучшим образом подходящие в данных условиях и обеспечивающие наиболее точные результаты. Подготовленный план проверяется на реализуемость, затем решаются вопросы, связанные с координацией участников проекта, с организацией информационного потока, с организацией работ и назначением ответственных.

На третьем этапе устанавливается время проведения контрольных мероприятий, связанное с выполнением определенных блоков работ. Выбираются подконтрольные показатели, характеризующие финансовое и организационное состояние проекта. Устанавливаются допустимые отклонения выбранных показателей, превышение которых может привести к негативным последствиям. Проводятся учет показателей, фиксация отклонений. Выявляются причины и виновники отклонений.

На заключительном *четвертом этапе* подразделение контроллинга оценивает влияние выявленных отклонений на дальнейшие шаги реализации проекта. Выясняет, как выявленные отклонения повлияли на основные управляемые параметры проекта.

По окончании цикла контроллер проекта подготавливает отчет с предложением вариантов решения возникших проблем и изменением плановых величин на следующий период.

Применение эконометрических методов сравнения и выбора в контроллинге инноваций. На первом этапе контроллинга инноваций необходимо решить задачу выбора варианта реализации проекта. Выбор между вариантами очевиден, если один из вариантов лучше другого по всем рассматриваемым показателям. В реальных ситуациях выбора варианты обычно несравнимы: первый лучше по одним показателям, второй — по другим. Для сравнения вариантов приходится прибегать к экспертным технологиям (см. гл. 5).

Одна группа экспертных технологий нацелена на выявление объективного упорядочения вариантов в результате усреднения мнений экспертов. Используют различные способы расчета на основе средних рангов (прежде всего средних арифметических и медиан). Для моделирования результатов парных сравнений применяют теорию люсианов (см. разд. 7.3 настоящего учебника). Для экспертных оценок находят медиану Кемени и т. д.

Другая группа экспертных технологий нацелена на получение коэффициентов весомости (важности, значимости) отдельных показателей [7, 8]. Итоговая оценка варианта реализации проекта получается в результате суммирования произведений значений показателей на соответствующие коэффициенты весомости. Иногда эти коэффициенты оцениваются экспертами на основе иерархической системы показателей. Более обоснованным является экспертно-статистический метод, согласно которому на основе обучающей выборки восстанавливается зависимость между показателями варианта реализации инновационного проекта и его итоговой оценкой.

Хотя с момента появления первой книги российского автора по теории нечеткости [2] прошло уже более 40 лет, только сейчас эта теория начинает широко применяться в исследованиях по экономике и менеджменту. В частности, для сравнения вариантов реализации инновационного проекта и выбора из них лучшего можно использовать подход, основанный на описании качественных характеристик нечеткими множествами. Опишем его, используя работу [9].

Пусть $S = \{S_i \mid i = \overline{1,n}\}$ — множество, состоящее из n вариантов реализации инновационного проекта. Для каждого варианта S_i определено m характеристик Q_{ij}, $j = \overline{1,m}$. В зависимости от конкретных условий набор характеристик может меняться.

Необходимо выделить эталонный вариант реализации проекта S_0 и его характеристики Q_{0j}. Характеристики подбираются таким образом, чтобы проект был оптимальным с точки зрения предъявляемых к нему требований.

Требуется проранжировать имеющиеся варианты S реализации инновационного проекта по заданным m характеристикам на соответствие эталону.

Для каждой характеристики Q_{ij}, согласно рассматриваемой методике, строится нечеткое множество $Q_{ij}, i = \overline{0,1} \quad j = \overline{1,m}$. Для этого сначала определяются возможные значения переменной x_j, удовлетворяющие характеристике Q_{ij}. Предполагается, что они составляют отрезок X_{ij}. Определяется середина q_{ij} и полуширина (радиус) $\delta_{ij} > 0$ отрезка X_{ij}. Таким образом,

$$X_{ij} = \lfloor q_{ij} - \delta_{ij}; q_{ij} + \delta_{ij} \rfloor.$$

Для описания критерия Q_{ij} могут применяться различные функции принадлежности.

В работе [9] используют функцию принадлежности следующего вида:

$$\mu_{ij}(x_j) = e^{-\frac{\ln 2}{\delta_{ij}^2}(x_j - q_{ij})^2}, i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Исходя из построения множества X_{ij}, в точке q_{ij} функция имеет максимум, в пределах множества X_{ij} функция принадлежности принимает значения больше 0,5, а вне X_{ij} — меньшее:

$$\begin{aligned} &\mu_{ij} : G_j \to [0;1]; \\ &\mu_{ij}(q_{ij}) = 1; \\ &\mu_{ij}(x_j) \geq 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad x_j \in X_{ij}. \end{aligned}$$

В результате получаем нечеткие множества:

$$\hat{Q}_{ij} = \{x_j \mid \mu_{ij}(x_j)\}, \quad i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Чтобы определить, в какой мере характеристика варианта S_i близка характеристике эталонного варианта S_o, вычисляют степень равенства v_{ij} соответствующих нечетких множеств:

$$v_{ij} = \max_{G_j} \min(\mu_{ij}(x_j), \mu_{oj}(x_j)).$$

Значение максимина достигается в точке пересечения функций принадлежности:

$$v_{ij} = \mu_{oj}(x_{ij}^*),$$

где

$$x_{ij}^* = \frac{q_{ij}\delta_{oj} + q_{oj}\delta_{ij}}{\delta_{oj} + \delta_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Произведя взвешенное голосование, получают интегральную оценку v_i соответствия совокупности характеристик варианта реализации проекта S_i совокупности характеристик эталонного варианта S_o:

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_{ij},$$

где

$$\alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1.$$

Здесь α_j является весом j-го критерия и показывает уровень его важности.

Аддитивно-мультипликативная модель оценки рисков широко применяется в различных областях экономики и менеджмента, в частности для оценки рисков проектов создания ракетно-космической техники [10, 11]. Представляется весьма полезной недавно разработанная обобщенная аддитивно-мультипликативная модель оценки рисков на основе нечетких и интервальных исходных данных [12, 13].

При обсуждении различных подходов к выбору наилучшего варианта реализации инновационного проекта иногда противопоставляют вероятностно-статистические модели и методы теории нечеткости. С методологической точки зрения весьма важно, что такое противопоставление лишено оснований. Давно известно [2], что теория нечеткости в определенном смысле сводится к теории случайных множеств и тем самым к теории вероятностей. Дадим развернутое обоснование этого утверждения.

П.2.3. СВЕДЕНИЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ К СЛУЧАЙНЫМ

Нечеткость и случайность. С самого начала появления современной теории нечеткости в 1960-е гг. (см. выше) началось обсуждение ее взаимоотношений с теорией вероятностей. Дело в том, что функция принадлежности нечеткого множества напоминает плотность распределения вероятностей. Отличие только в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины (или интеграл, если множество возможных значений несчетно) всегда равна 1, а сумма S значений функции принадлежности (в непрерывном случае — интеграл от функции принадлежности) может быть любым неотрицательным числом. Возникает искушение пронормировать функцию принадлежности, т. е. разделить все ее значения на S (при $S \neq 0$), чтобы свести ее к распределению вероятностей (или к плотности вероятности). Однако специалисты по нечеткости справедливо возражают против такого «примитивного» сведения, поскольку оно проводится отдельно для каждой размытости (нечеткого множества), и определения обычных операций над нечеткими множествами согласовать с ним нельзя.

Последнее утверждение означает следующее. Пусть указанным образом преобразованы функции принадлежности нечетких множеств A и B. Как при этом преобразуются функции принадлежности $A \cap B$, $A \cup B$, $A + B$, AB? Установить это невозможно в принципе. Последнее утверждение становится совершенно ясным после рассмотрения нескольких примеров пар нечетких множеств с одними и теми же суммами значений функций принадлежности, но различными результатами теоретико-множественных операций над ними. Причем суммы значений соответствующих функций принадлежности для этих результатов теоретико-множественных операций, например для пересечений множеств, также различны.

В работах по нечетким множествам время от времени утверждается, что теория нечеткости — самостоятельный раздел прикладной математики и не имеет отношения к теории вероятностей (см., например, обзор литературы в монографиях [2, 14]). Некоторые авторы, обсуждавшие взаимоотношения теории нечеткости и теории вероятностей, подчеркивали различие между этими областями теоретических и прикладных исследований. Обычно сопоставляют аксиоматику и сравнивают области приложений.

Аргументы при втором типе сравнений не имеют доказательной силы, поскольку по поводу границ применимости даже такой давно выделившейся научной области, как вероятностно-статистические методы, имеются различные мнения. Более того, нет единства мнений об арифметике. Напомним, что итог рассуждений одного из наиболее известных французских математиков Анри Лебега по поводу границ применимости арифметики таков: «Арифметика применима тогда, когда она применима» (см. его монографию [15, с. 21–22]).

При сравнении различных аксиоматик теории нечеткости и теории вероятностей нетрудно увидеть, что списки аксиом различаются. Из этого, однако, отнюдь не следует, что между указанными теориями нельзя установить связь, типа известного сведения евклидовой геометрии на плоскости к арифметике (точнее к теории числовой системы R^2 (см., например, монографию [16])). Эти две аксиоматики — евклидовой геометрии и арифметики — на первый взгляд весьма сильно различаются.

Можно понять желание энтузиастов теории нечеткости подчеркнуть принципиальную новизну своего научного аппарата. Однако не менее важно установить связи этого подхода с ранее известными.

Проекция случайного множества. Как оказалось, теория нечетких множеств тесно связана с теорией случайных множеств. Еще в 1975 г. в работе [17] показано, что нечеткие множества естественно рассматривать как «проекции» случайных множеств. Рассмотрим этот метод сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств.

Определение П.2.2. Пусть $A = A(\omega)$ — случайное подмножество конечного множества Y. Нечеткое множество B, определенное на Y, называется проекцией A и обозначается $Proj\ A$, если

$$\mu_B(y) = P(y \in A) \tag{П.2.8}$$

при всех $y \in Y$.

Очевидно, каждому случайному множеству A можно поставить в соответствие с помощью формулы (П.2.8) нечеткое множество $B = Proj\ A$. Оказывается, верно и обратное.

Теорема П.2.3. Для любого нечеткого подмножества B конечного множества Y существует случайное подмножество A множества Y, такое, что $B = Proj\ A$.

Доказательство. Достаточно задать распределение случайного множества A. Пусть Y_1 — носитель B (см. определение П.2.1 в разд/ П.2.1 выше). Без ограничения общности можно считать, что $Y_1 = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ при некотором m и элементы Y_1 занумерованы в таком порядке, что

$$0 < \mu_B(y_1) \le \mu_B(y_2) \le \dots \le \mu_B(y_m).$$

Введем множества:

$$Y(1) = Y_1,\ Y(2) = \{y_2, \dots, y_m\}, \dots, Y(t) = \{y_t, \dots, y_m\}, \dots, Y(m) = \{y_m\}.$$

Положим

$$P(A = Y(1)) = \mu_B(y_1),\ P(A = Y(2)) = \mu_B(y_2) - \mu_B(y_1),\ \dots,$$
$$P(A = Y(t)) = \mu_B(y_t) - \mu_B(y_{t-1}),\ \dots,$$
$$P(A = Y(m)) = \mu_B(y_m) - \mu_B(y_{m-1}),$$
$$P(A = \varnothing) = 1 - \mu_B(y_m).$$

Для всех остальных подмножеств X множества Y положим $P(A = X) = 0$. Поскольку элемент y_t входит во множества $Y(1)$, $Y(2)$, …, $Y(\mathrm{t})$ и не входит во множества $Y(t + 1)$, …, $Y(m)$, то из приведенных выше формул следует, что $P(y_t \in A) = \mu_B(y_t)$. Если $y \notin Y_1$, то, очевидно, $P(y \in A) = 0$. Теорема П.2.3 доказана.

Распределение случайного множества с независимыми элементами, как показано выше в гл. 7 настоящего учебника, полностью определяется его проекцией. Для конечного случайного множества общего вида это не так. Для уточнения сказанного понадобится следующая теорема.

Теорема П.2.4. Для случайного подмножества A множества Y из конечного числа элементов наборы чисел $P(A = X)$, $X \subseteq Y$, и $P(X \subseteq A)$, $X \subseteq Y$, выражаются один через другой.

Доказательство. Второй набор выражается через первый следующим образом:

$$P(X \subseteq A) = \sum_{X':X \subseteq X'} P(A = X').$$

Элементы первого набора выразить через второй можно с помощью формулы включений и исключений из формальной логики, в соответствии с которой

$$P(A = X) = P(X \subseteq A) - \sum P(X \bigcup \{y\} \subseteq A) +$$
$$+ \sum P(X \bigcup \{y_1, y_2\} \subseteq A) - ... \pm P(Y \subseteq A).$$

В этой формуле в первой сумме переменная суммирования y пробегает все элементы множества $Y \setminus X$, во второй сумме переменные суммирования y_1 и y_2 не совпадают и также пробегают это множество, и т. д. Ссылка на формулу включений и исключений завершает доказательство теоремы П.2.4.

В соответствии с теоремой П.2.4 случайное множество A можно характеризовать не только распределением, но и набором чисел $P(X \subseteq A)$, $X \subseteq Y$. В этом наборе $P(\varnothing \subseteq A) = 1$, а других связей типа равенств нет. В этот набор входят числа $P(\{y\} \subseteq A) = P(y \in A)$, следовательно, фиксация проекции случайного множества эквивалентна фиксации $k = Card(Y)$ параметров из $(2^k - 1)$ параметров, задающих распределение случайного множества A в общем случае.

При обосновании возможности сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств будет применяться следующая теорема.

Теорема П.2.5. Если $Proj\ A = B$, то $Proj\overline{A} = \overline{B}$.

Для *доказательства* достаточно воспользоваться тождеством из теории случайных множеств $P(\overline{A} = X) = P(A = \overline{X})$, формулой для вероятности накрытия $P(y \in A)$, определением отрицания нечеткого множества и тем, что сумма всех $P(A=X)$ равна 1. При этом под формулой для вероятности накрытия имеется в виду следующее утверждение: чтобы найти вероятность накрытия фиксированного элемента q случайным подмножеством S конечного множества Q, достаточно вычислить:

$$P(q \in S) = P(\{\omega : q \in S(\omega)\}) = \sum_{A: q \in A,\ A \subseteq 2^Q} P(S = A),$$

где суммирование идет по всем подмножествам A множества Q, содержащим q.

Пересечения и произведения нечетких и случайных множеств. Выясним, как операции над случайными множествами соотносятся с операциями над их проекциями. В силу законов де Моргана (теорема П.2.1 в разд. П.2.1) и теоремы П.2.5 достаточно рассмотреть операцию пересечения случайных множеств.

Теорема П.2.6. Если случайные подмножества A_1 и A_2 конечного множества Y независимы, то нечеткое множество $Proj(A_1 \cap A_2)$ является произведением нечетких множеств $Proj\, A_1$ и $Proj\, A_2$.

Доказательство. Надо показать, что для любого $y \in Y$

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = P(y \in A_1)P(y \in A_2). \quad \text{(П.2.9)}$$

По формуле для вероятности накрытия точки случайным множеством (см. выше):

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \sum_{X: y \in X} P((A_1 \cap A_2) = X). \quad \text{(П.2.10)}$$

Легко проверить, что распределение пересечения случайных множеств $A_1 \cap A_2$ можно выразить через их совместное распределение следующим образом:

$$P(A_1 \cap A_2 = X) = \sum_{X_1,\, X_2: X_1 \cap X_2 = X} P(A_1 = X_1,\, A_2 = X_2). \quad \text{(П.2.11)}$$

Из соотношений (П.2.10) и (П.2.11) следует, что вероятность накрытия для пересечения случайных множеств можно представить в виде двойной суммы:

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \sum_{X: y \in X} \; \sum_{X_1,\, X_2: X_1 \cap X_2 = X} P(A_1 = X_1,\, A_2 = X_2). \quad \text{(П.2.12)}$$

Заметим теперь, что правую часть формулы (П.2.12) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{X_1,\, X_2: y \in X_1,\, y \in X_2} P(A_1 = X_1,\, A_2 = X_2). \quad \text{(П.2.13)}$$

Действительно, формула (П.2.12) отличается от формулы (П.2.13) лишь тем, что в ней сгруппированы члены, в которых пересечение переменных суммирования $X_1 \cap X_2$ принимает постоянное значение. Воспользовавшись определением независимости случайных множеств и правилом перемножения сумм, получаем, что из (П.2.12) и (П.2.13) вытекает равенство:

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \left(\sum_{X_1 : y \in X_1} P(A_1 = X_1) \right) \left(\sum_{X_2 : y \in X_2} P(A_2 = X_2) \right).$$

Для завершения доказательства теоремы 4 достаточно еще раз сослаться на формулу для вероятности накрытия точки случайным множеством.

Определение П.2.3. Носителем случайного множества C называется совокупность всех тех элементов $y \in Y$, для которых $P(y \in C) > 0$.

Теорема П.2.7. Равенство

$$Proj(A_1 \cap A_2) = (Proj A_1) \cap (Proj A_2)$$

верно тогда и только тогда, когда пересечение носителей случайных множеств $\overline{A_1} \cap A_2$ и $A_1 \cap \overline{A_2}$ пусто.

Доказательство. Необходимо выяснить условия, при которых

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \min(P(y \in A_1),\ P(y \in A_2)). \qquad \text{(П.2.14)}$$

Положим

$$p_1 = P(y \in A_1 \cap A_2),\ p_2 = P(y \in \overline{A_1} \cap A_2),\ p_3 = P(y \in A_1 \cap \overline{A_2}).$$

Тогда равенство (П.2.14) сводится к условию

$$p_1 = \min(p_1 + p_2,\ p_1 + p_3). \qquad \text{(П.2.15)}$$

Ясно, что соотношение (П.2.15) выполнено тогда и только тогда, когда $p_2 p_3 = 0$ при всех $y \in Y$, т. е. не существует ни одного элемента $y_0 \in Y$, такого, что одновременно $P(y_0 \in \overline{A_1} \cap A_2) > 0$ и $P(y_0 \in A_1 \cap \overline{A_2}) > 0$, а это эквивалентно пустоте пересечения носителей случайных множеств $\overline{A_1} \cap A_2$ и $A_1 \cap \overline{A_2}$. Теорема П.2.7 доказана.

Сведение последовательности операций над нечеткими множествами к последовательности операций над случайными множествами. Выше получены некоторые связи между нечеткими и случайными множествами. Изучение этих связей в работе [17] началось с введения случайных множеств с целью развития и обобщения аппарата нечетких множеств Л. Заде. Дело в том, что математический аппарат нечетких множеств не позволяет в должной мере учитывать различные варианты зависимости между понятиями (объектами), моделируемыми с его помощью, т. е. не является достаточно гибким.

Так, для описания «общей части» двух нечетких множеств есть лишь две операции: произведение и пересечение. Если применяется первая из них, то фактически предполагается, что множества ведут себя как проекции независимых случайных множеств (см. выше теорему П.2.6). Операция пересечения также накладывает вполне определенные ограничения на вид зависимости между множествами (см. выше теорему П.2.7), причем в этом случае найдены даже необходимые и достаточные условия. Желательно иметь более широкие возможности для моделирования зависимости между множествами (понятиями, объектами). Использование математического аппарата случайных множеств предоставляет такие возможности.

Цель сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств в том, чтобы за любой конструкцией из нечетких множеств увидеть конструкцию из случайных множеств, определяющую свойства первой, аналогично тому, как за плотностью распределения вероятностей мы видим случайную величину. Рассмотрим результаты по сведению алгебры нечетких множеств к алгебре случайных множеств.

Определение П.2.4. Вероятностное пространство $\{\Omega, G, P\}$ назовем делимым, если для любого измеримого множества $X \in G$ и любого положительного числа α, меньшего $P(X)$, можно указать измеримое множество $Y \subset X$, такое, что $P(Y) = \alpha$.

Пример. Пусть Ω — единичный куб конечномерного линейного пространства, G есть сигма-алгебра борелевских множеств, а P — мера Лебега. Тогда $\{\Omega, G, P\}$ — делимое вероятностное пространство.

Таким образом, делимое вероятностное пространство — это не экзотика. Обычный куб — пример такого пространства.

Доказательство сформулированного в примере утверждения проводится стандартными математическими приемами, основанными на том, что измеримое множество можно сколь угодно точно приблизить открытыми множествами. Последние представляются в виде суммы не более чем счетного числа открытых шаров, а для шаров делимость проверяется непосредственно (от шара X тело объема $\alpha < P(X)$ отделяется соответствующей плоскостью).

Теорема П.2.8. Пусть даны случайное множество A на делимом вероятностном пространстве $\{\Omega, G, P\}$ со значениями во множестве всех подмножеств множества Y из конечного числа элементов и нечеткое множество D на Y. Тогда существуют случайные множества C_1, C_2, C_3, C_4 на том же вероятностном пространстве, такие, что

$$Proj(A \cap C_1) = B \cap D,\ Proj(A \cap C_2) = BD,$$

$$Proj(A \cup C_3) = B \cup D,\ Proj(A \cup C_4) = B + D,$$

$$Proj C_i = D,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

где $B = Proj\, A$.

Доказательство. В силу справедливости законов де Моргана для нечетких (см. теорему П.2.1 в разд. П.2.1 выше) и для случайных множеств, а также теоремы П.2.5 выше (об отрицаниях) достаточно доказать существование случайных множеств C_1 и C_2.

Рассмотрим распределение вероятностей на множестве всех подмножеств множества Y, соответствующее случайному множеству C, такому, что $Proj\ C = D$ (оно существует в силу теоремы П.2.3).

Построим случайное множество C_2 с указанным распределением, независимое от A. Тогда $Proj(A \cap C_2) = BD$ по теореме П.2.6.

Перейдем к построению случайного множества C_1. По теореме П.2.7 необходимо и достаточно определить случайное множество $C_1(\omega)$ так, чтобы $Proj\ C_1 = D$ и пересечение носителей случайных множеств $A \cap \overline{C_1}$ и $\overline{A} \cap C_1$ было пусто, т. е.

$$p_3 = P(y \in A \cap \overline{C_1}) = 0$$

для $y \in Y_1 = \{y : \mu_B(y) \le \mu_D(y)\}$ и

$$p_2 = P(y \in \overline{A} \cap C_1) = 0$$

для $y \in Y_2 = \{y : \mu_B(y) \ge \mu_D(y)\}$.

Построим $C_1(\omega)$, исходя из заданного случайного множества $A(\omega)$. Пусть $y_1 \in Y_2$. Исключим элемент y_1 из $A(\omega)$ для стольких элементарных событий ω, чтобы для полученного случайного множества $A_1(\omega)$ было справедливо равенство:

$$P(y_1 \in A_1) = \mu_D(y_1)$$

(именно здесь используется делимость вероятностного пространства, на котором задано случайное множество $A(\omega)$). Для $y \neq y_1$, очевидно,

$$P(y \in A_1) = P(y \in A).$$

Аналогичным образом последовательно исключаем y из $A(\omega)$ для всех $y \in Y_2$ и добавляем y в $A(\omega)$ для всех $y \in Y_1$, меняя на каждом шагу $P(y \in A_i)$ только для $y = y_i$ так, чтобы

$$P(y_i \in A_i) = \mu_D(y_i)$$

(ясно, что при рассмотрении $y_i \in Y_1 \cap Y_2$ случайное множество $A_i(\omega)$ не меняется). Перебрав все элементы Y, получим случайное множество $A_k(\omega) = C_1(\omega)$, для которого выполнено требуемое. Теорема П.2.8 доказана.

Основной результат о сведении теории нечетких множеств к теории случайных множеств дается следующей теоремой.

Теорема П.2.9. Пусть $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_t$ — некоторые нечеткие подмножества множества Y из конечного числа элементов. Рассмотрим результаты последовательного выполнения теоретико-множественных операций:

$$B^m = ((\ldots((B_1 \circ B_2) \circ B_3) \circ \ldots) \circ B_{m-1}) \circ B_{\mathrm{m}},\ m = 1, 2, \ldots, t,$$

где $\circ$ — символ одной из следующих теоретико-множественных операций над нечеткими множествами: пересечение, произведение, объединение, сумма (на разных местах могут стоять разные символы). Тогда существуют случайные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_t$ того же множества Y, такие, что

$$Proj\ A_i = B_i,\ i = 1, 2, \ldots, t,$$

и, кроме того, результаты теоретико-множественных операций связаны аналогичными соотношениями:

$$Proj\{((\ldots((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes A_{m-1}) \otimes A_m\} = B^m,\ m = 1, 2, \ldots, t,$$

где знак $\otimes$ означает, что на рассматриваемом месте стоит символ пересечения $\cap$ случайных множеств, если в определении B^m стоит символ пересечения или символ произведения нечетких множеств, и соответственно символ объединения $\cup$ случайных множеств, если в B^m стоит символ объединения или символ суммы нечетких множеств.

Комментарий. Поясним содержание теоремы. Например, если

$$B^5 = (((B_1 + B_2) \cap B_3)B_4) \cup B_5,$$

то

$$(((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes A_4) \otimes A_5 = (((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \cap A_4) \cup A_5.$$

Как совместить справедливость дистрибутивного закона для случайных множеств (вытекающего из его справедливости для обычных множеств) с теоремой П.2.2 разд. П.2.1 выше, в которой показано, что для нечетких множеств, вообще говоря, $(B_1 + B_2)B_3 \neq B_1B_3 + B_2B_3$? Дело в том, что хотя в соответствии с теоремой П.2.9 для любых трех нечетких множеств B_1, B_2 и B_3 можно указать три случайных множества A_1, A_2 и A_3, такие, что

$$Proj(A_i) = B_i,\ i = 1, 2, 3,\ Proj(A_1 \cup A_2) = B_1 + B_2;$$

$$Proj((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = B^3,$$

где

$$B^3 = (B_1 + B_2)B_3,$$

но при этом, вообще говоря,

$$Proj(A_1 \cap A_3) \neq B_1B_3$$

и, кроме случаев, указанных в теореме П.2.2 разд. П.2.1,

$$Proj((A_1 \cup A_1) \cap A_3) \neq B_1B_3 + B_2B_3.$$

Доказательство теоремы 7 проводится методом математической индукции. При $t = 1$ распределение случайного множества строится с помощью теоремы П.2.3. Затем конструируется само случайное множество A_1, определенное на делимом вероятностном пространстве (нетрудно проверить, что на делимом вероятностном пространстве можно построить случайное подмножество конечного множества с любым заданным распределением именно в силу делимости пространства). Далее случайные множества $A_2, A_3, \ldots, A_t$ строим по индукции с помощью теоремы П.2.8. Теорема П.2.9 доказана.

Замечание. Проведенное доказательство теоремы П.2.9 проходит и в случае, когда при определении B^m используются отрицания, точнее, кроме B^m ранее введенного вида используются также последовательности результатов теоретико-множественных операций, очередной шаг в которых имеет вид:

$$B_1^m = \overline{B^{m-1}} \circ B_m,\ B_2^m = B^{m-1} \circ \overline{B_m},\ B_1^m = \overline{B^{m-1}} \circ \overline{B_m}.$$

А именно, сначала при помощи законов де Моргана (теорема П.2.1 разд. П.2.1 выше) проводится преобразование, в результате которого в последовательности B^m остаются только отрицания отдельных подмножеств из совокупности $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_t$, а затем с помощью теоремы П.2.5 вообще удается избавиться от отрицаний и вернуться к условиям теоремы П.2.9.

Итак, в настоящем разделе описаны связи между такими объектами нечисловой природы, как нечеткие и случайные множества, установленные в нашей стране в первой половине 1970-х гг. (см. современное изложение в [18]). Через несколько лет, а именно в начале 1980-х гг., близкие подходы стали развиваться и за рубежом. Одна из работ [19] носит примечательное название «Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств».

В нечисловой статистике разработан ряд методов статистического анализа нечетких данных, в том числе методы классификации, регрессии, проверки гипотез о совпадении функций принадлежности по опытным данным и т. д. При этом оказались полезными общие подходы статистики объектов нечисловой природы (см. гл. 7 настоящего учебника). Методологические и прикладные вопросы теории нечеткости обсуждались и в научно-популярной литературе (см., например, статью [20], которая представляет интерес и в XXI в.).

П.2.4. СТАТИСТИКА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Нечеткие множества — частный вид объектов нечисловой природы. Поэтому при обработке выборки, элементами которой являются нечеткие множества, могут быть использованы различные методы анализа статистических данных произвольной природы: расчет средних, непараметрических оценок плотности, построение диагностических правил и т. д.

Среднее значение нечеткого множества. Однако иногда используются методы, учитывающие специфику нечетких множеств. Например, пусть носителем нечеткого множества является конечная совокупность действительных чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогда под средним значением нечеткого множества иногда понимают число. А именно, среднее значение нечеткого множества определяют по формуле:

$$M(A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)},$$

где $\mu_A(x_i)$ — функция принадлежности нечеткого множества A. Если знаменатель равен 1, то эта формула определяет математическое ожидание случайной величины, для которой вероятность попасть в точку x_i равна $\mu_A(x_i)$. Такое определение наиболее естественно, когда нечеткое множество A интерпретируется как нечеткое число.

Очевидно, наряду с $M(A)$ может оказаться полезным использование эмпирических средних, определяемых (согласно статистике в пространствах произвольной природы) путем решения соответствующих оптимизационных задач. Для конкретных расчетов необходимо ввести то или иное расстояние между нечеткими множествами.

Расстояния в пространствах нечетких множеств. Как известно, многие методы статистики нечисловых данных базируются на использовании расстояний (или показателей различия) в соответствующих пространствах нечисловой природы. Расстояние между нечеткими подмножествами A и B множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ можно определить как

$$d(A, B) = \sum_{j=1}^{k} | \mu_A(x_j) - \mu_B(x_j) |,$$

где $\mu_A(x_j)$ — функция принадлежности нечеткого множества A, а $\mu_B(x_j)$ — функция принадлежности нечеткого множества B. Может использоваться и другое расстояние:

$$D(A,B) = \frac{\sum_{j=1}^{k} | \mu_A(x_j) - \mu_B(x_j) |}{\sum_{j=1}^{k} (\mu_A(x_j) + \mu_B(x_j))}.$$

(Примем это расстояние равным 0, если функции принадлежности тождественно равны 0.)

В соответствии с аксиоматическим подходом к выбору расстояний (метрик) в пространствах нечисловой природы разработан обширный набор систем аксиом, из которых выводится тот или иной вид расстояний (метрик) в конкретных пространствах, в том числе в пространствах нечетких множеств (см. разд. 7.5 настоящего учебника). При использовании вероятностных моделей расстояние между случайными нечеткими множествами (т. е. между случайными элементами со значениями в пространстве нечетких множеств) само является случайной величиной, имеющей в ряде постановок асимптотически нормальное распределение [21].

Проверка гипотез о нечетких множествах. Пусть ответ эксперта — нечеткое множество. Естественно считать, что его ответ, как показание любого средства измерения, содержит погрешности. Если есть несколько экспертов, то в качестве единой оценки (группового мнения) естественно взять эмпирическое среднее их ответов. Но возникает естественный вопрос: действительно ли все эксперты измеряют одно и то же? Может быть, глядя на реальный объект, они оценивают его с разных сторон? Например, на научную статью можно смотреть как с теоретической точки зрения, так и с прикладной, и соответствующие оценки будут, скорее всего, различны (если они совпадают, то работа либо никуда не годится, либо является выдающейся).

Итак, возник вопрос: как проверить согласованность мнений экспертов? Надо сначала определить понятие согласованности. Пусть A — нечеткий ответ эксперта. Будем считать, что соответствующая функция принадлежности есть сумма двух слагаемых:

$$\mu_A(u) = \mu_{N(A)}(u) + \xi_A(u),$$

где $N(A)$ — «истинное» нечеткое множество, а $\xi_A(u)$ — «погрешность» эксперта как прибора. *Естественно рассмотреть две постановки:*

1. Мнения экспертов $A(1)$, $A(2)$, …, $A(m)$ будем считать согласованными, если

$$N(A(1)) = N(A(2)) = \ldots = N(A(m)).$$

2. Рассмотрим две группы экспертов. В первой у всех «истинное» мнение $N(A)$, а во второй у всех $N(B)$.

Две группы будем считать согласованными по мнениям, если

$$N(A) = N(B).$$

Согласованность определена. Как же ее проверить? Если экспертов достаточно много, то эти гипотезы можно проверять отдельно для каждого элемента множества — общего носителя нечетких ответов. Проверка последней гипотезы переходит в проверку однородности двух независимых выборок (см. гл. 2 настоящего учебника). Здесь ограничимся приведенными выше постановками основных гипотез (ср. с аналогичными гипотезами для люсианов, рассмотренными в [22, 23]).

Восстановление зависимости между нечеткими переменными. Рассмотрим две нечеткие переменные A и B. Пусть каждый из n испытуемых выдает в ответ на вопрос два нечетких множества A_i и B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Необходимо восстановить зависимость B от A, другими словами, наилучшим образом приблизить B с помощью A.

Для иллюстрации основной идеи ограничимся парной линейной регрессией нечетких множеств. Нечеткое множество C назовем линейной функцией от нечеткого множества A, если для любого x из носителя A функции принадлежности множеств A и C таковы, что $\mu_C(x) = \mu_A(y)$ при $x = \alpha y + \beta$. Другими словами,

$$\mu_C(x) = \mu_A((x - \beta) / \alpha)$$

для любого x из носителя A. В таком случае естественно писать:

$$C = \alpha A + \beta.$$

Однако нечеткие переменные, как и привычные статистикам числовые переменные, обычно несколько отклоняются от линейной связи. Наилучшее линейное приближение нечеткой переменной B с помощью линейной функции от нечеткой переменной A естественно искать, решая задачу минимизации по α, β расстояния от B до C. Пусть

$$\rho(B, \alpha_0 A + \beta_0) = \min \rho(B, \alpha A + \beta),$$

где ρ — некоторое расстояние между нечеткими множествами, а минимизация проводится по всем возможным значениям α и β. Тогда наилучшей линейной аппроксимацией B является $\alpha_0 A + \beta_0$. Если рассматриваемый минимум равен 0, то имеет место точная линейная зависимость.

Для восстановления зависимости по выборочным парам нечетких переменных естественно воспользоваться подходом, развитым в статистике в пространствах произвольной природы для параметрической регрессии (аппроксимации). В соответствии с рассмотрениями гл. 7 настоящего учебника в качестве наилучших оценок параметров линейной зависимости следует рассматривать

$$(\alpha^*,\ \beta^*) = Arg \min_{\alpha,\ \beta} \sum_{k=1}^{n} \rho(B_i,\ \alpha A_i + \beta).$$

Тогда наилучшим линейным приближением B является $C^* = \alpha^* A + \beta^*$.

Вероятностно-статистическая теория регрессионного анализа нечетких переменных [2] строится как частный случай аналогичной теории для переменных произвольной природы (гл. 7 настоящего учебника, подробнее — в [22, 23]). В частности, при обычных предположениях оценки α^*, β^* являются состоятельными, т. е. $\alpha^* \to \alpha_0$ и $\beta^* \to \beta_0$ при $n \to \infty$.

Кластер-анализ нечетких переменных. Строить группы сходных между собой нечетких переменных (кластеры) можно многими способами. Опишем два семейства алгоритмов.

Пусть на пространстве, в котором лежат результаты наблюдений, т. е. на пространстве нечетких множеств, заданы две меры близости ρ и τ (например, это могут быть введенные выше расстояния d и D). Берется один из результатов наблюдений (нечеткое множество) и вокруг него описывается шар радиуса R, определяемый мерой близости ρ. (Напомним, что шаром с центром в x относительно ρ называется множество всех элементов y рассматриваемого пространства, таких, что $\rho(x, y) \leq R$.) Берутся результаты наблюдений (элементы выборки), попавшие в этот шар, и находится их эмпирическое среднее относительно второй меры близости τ. Оно берется за новый центр, вокруг которого снова описывается шар радиуса R относительно ρ, и процедура повторяется. (Чтобы алгоритм был полностью определен, необходимо сформулировать правило выбора элемента эмпирического среднего в качестве нового центра, если эмпирическое среднее состоит более чем из одного элемента.)

Когда центр шара зафиксируется (перестанет меняться), попавшие в этот шар элементы объявляются первым кластером и исключаются из дальнейшего рассмотрения. Алгоритм применяется к совокупности оставшихся результатов наблюдений, выделяет из нее второй кластер и т. д.

Всегда ли центр шара остановится? При реальных расчетах в течение многих лет так было всегда. Соответствующая теория была построена лишь в 1978 г. [24]. Доказано, что описанный выше процесс всегда остановится через конечное число шагов. Причем число шагов до остановки оценивается через максимально возможное число результатов наблюдений в шаре радиуса R относительно ρ.

Обширное семейство образуют алгоритмы кластер-анализа типа «дендрограмма», известные также под названием «агломеративные иерархические алгоритмы средней связи». На первом шаге алгоритма из этого семейства каждый результат наблюдения рассматривается как отдельный кластер. Далее на каждом шагу происходит объединение двух самых близких кластеров. Название «дендрограмма» объясняется тем, что результат работы алгоритма обычно представляется в виде дерева. Каждая его ветвь соответствует кластеру, появляющемуся на каком-либо шагу работы алгоритма. Слияние ветвей соответствует объединению кластеров, а ствол — заключительному шагу, когда все наблюдения оказываются объединенными в один кластер.

Для работы алгоритмов кластер-анализа типа «дендрограмма» необходимо определить расстояние между кластерами. Естественно использовать ассоциативные средние (которыми, как известно, являются средние по Колмогорову (см. разд. 6.4 настоящего учебника)) всевозможных попарных расстояний между элементами двух рассматриваемых кластеров. Итак, расстояние между кластерами K и L, состоящими из n_1 и n_2 элементов соответственно, определяется по формуле:

$$\tau(K, L) = F^{-1}\left(\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{i\in K}\sum_{j\in L} F(\rho(X_i, X_j))\right),$$

где ρ — некоторое расстояние между нечеткими множествами; F — строго монотонная функция (строго возрастающая или строго убывающая).

Соображения теории измерений позволяют ограничить круг возможных алгоритмов типа «дендрограмма». Естественно принять, что единица измерения расстояния выбрана произвольно. Тогда согласно результатам гл. 6 настоящего учебника из всех средних по Колмогорову годятся только степенные средние и среднее геометрическое, т. е. $F(z) = z^\lambda$ при $\lambda \neq 0$ или $F(z) = \ln z$.

Чтобы получить разбиение на кластеры, надо «разрезать» дерево на определенной высоте, т. е. объединять кластеры лишь до тех пор, пока расстояние между ними меньше заранее выбранной константы. При альтернативном подходе заранее фиксируется число кластеров. Рассматривают и двухкритериальную постановку, когда минимизируют сумму (или максимум) внутрикластерных разбросов и число кластеров. Для решения задачи двухкритериальной минимизации либо один из критериев заменяют на ограничение, либо два критерия «свертывают» в один, либо применяют иные подходы (последовательная оптимизация, построение поверхности Парето и др.).

При классификации нечетких множеств полезны многие подходы, рассмотренные в [22, 23], а именно все подходы, основанные только на использовании расстояний.

Сбор и описание нечетких данных. Разработано большое количество процедур описания нечеткости. Так, согласно Э. Борелю [25], понятие «Куча» описывается с помощью функции распределения: при каждом конкретном x значение функции принадлежности — это доля людей, считающих совокупность из x зерен кучей. Результат подобного опроса может дать и кривую иного вида, например по поводу понятия «молодой» (слева будут отделены «дети», а справа — «люди зрелого и пожилого возраста»). Нечеткая толерантность может оцениваться с помощью случайных толерантностей (см. гл. 7 настоящего учебника и [22, 23]).

Целесообразно попытаться выделить наиболее практически полезные простые формы функций принадлежности. Видимо, наиболее простой является «ступенька»: внутри некоторого интервала функция принадлежности равна 1, а вне этого интервала равна 0. Это простейший способ «размывания» числа путем замены его интервалом. Нечеткое множество описывается двумя числами — концами интервала. Оценки этих чисел можно получить с помощью экспертов. Статистическая теория подобных нечетких множеств, т. е. статистика интервальных данных, рассмотрена в [22, 23, 26].

Тремя числами $a < b < c$ описывается функция принадлежности типа треугольника. При этом левее числа a и правее числа c функция принадлежности равна 0. В точке b функция принадлежности принимает значение 1. На отрезке $[a; b]$ функция принадлежности линейно растет от 0 до 1, а на отрезке $[b; c]$ — линейно убывает от 1 до 0. Оценки трех чисел $a < b < c$ получают при опросе экспертов. Такие математические объекты называются нечеткими треугольными числами. Они используются, в частности, в [12, 13].

Следующий по сложности вид функции принадлежности типа трапеции описывается четырьмя числами $a < b < c < d$. Левее a и правее d функция принадлежности равна 0. На отрезке $[a; b]$ она линейно возрастает от 0 до 1, на отрезке $[b; c]$ во всех точках равна 1, а на отрезке $[c; d]$ линейно убывает от 1 до 0. Для оценивания четверки чисел $a < b < c < d$ используют экспертов.

Ряд результатов статистики нечетких данных приведен в первой монографии российского автора по нечетким множествам [2] и во многих дальнейших публикациях, в частности в статье [27]. Проблемам использования нечетких моделей и методов при решении практических задач менеджмента посвящена книга А.С. Птускина [28].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zadeh, L.A.* Fuzzy sets / L.A. Zadeh // Information and Control. — 1965. — Vol. 8. — № 3. — P. 338–353.

2. *Орлов, А.И.* Задачи оптимизации и нечеткие переменные / А.И. Орлов. — Москва : Знание, 1980. — 64 с.

3. *Заде, Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. — Москва : Мир, 1976. — 166 с.

4. *Битюков, П.В.* Моделирование задач ценообразования на электронные обучающие курсы в области дистанционного обучения : автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата экономических наук / П.В. Битюков. — Москва : Изд-во МЭСИ, 2002. — 24 с.

5. *Загонова, Н.С.* Эконометрическая поддержка контроллинга инноваций. Нечеткий выбор / Н.С. Загонова, А.И. Орлов // Российское предпринимательство. — 2004. — № 4. — С. 54–57.

6. Контроллинг : учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 27.04.06 «Организация и управление наукоемкими производствами» / А.М. Карминский, С.Г. Фалько, А.А. Жевага, Н.Ю. Иванова. — 3-е изд., дораб. — Москва : Инфра-М, 2017. — 336 с.

7. *Подиновский, В.В.* Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В.В. Подиновский. — Москва : Наука, 2019. — 103 с.

8. *Орлов, А.И.* Определение приоритетности реализации НИОКР на предприятиях ракетно-космической отрасли / А.И. Орлов, А.Д. Цисарский // Контроллинг. — 2020. — № 2(76). — С. 58–65.

9. Оценка качества технических объектов с использованием нечетких множеств / И.В. Гермашев, В.Е. Дербишер, Т.Ф. Морозенко, С.А. Орлова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2001. — Т. 67. — № 1. — С. 65–68.

10. *Орлов, А.И.* Особенности оценки рисков при создании ракетно-космической техники / А.И. Орлов, А.Д. Цисарский // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. — 2013. — № 43(232). — С. 37–46.

11. *Орлов, А.И.* Аддитивно-мультипликативная модель оценки рисков при создании ракетно-космической техники / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2014. — № 102. — С. 78–111.

12. *Orlov, A.I.* Fuzzy and interval additive-multiplicative models of risk estimation / A.I. Orlov // Научный журнал КубГАУ. — 2022. — № 177. — С. 333–356.

13. *Орлов, А.И.* Обобщенная аддитивно-мультипликативная модель оценки рисков на основе нечетких и интервальных исходных данных / А.И. Орлов // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 2023. — Т. 89. — № 1. — С. 74–84.

14. *Орлов, А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях / А.И. Орлов. — Москва : Наука, 1979. — 296 с.

15. *Лебег, А.* Об измерении величин / А. Лебег. — 2-е изд. — Москва : Учпедгиз, 1960. — 204 с.

16. *Ефимов, Н.В.* Высшая геометрия / Н.В. Ефимов. — Москва : URSS. 2022. — 600 с.

17. *Орлов, А.И.* Основания теории нечетких множеств (обобщение аппарата Заде). Случайные толерантности / А.И. Орлов // Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. — Москва : ЦЭМИ АН СССР, 1975. — С. 169–175.

18. *Орлов, А.И.* Теория нечетких множеств — часть теории вероятностей / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2013. — № 92. — С. 51–60.

19. *Goodman, I.R.* Fuzzy sets as equivalence classes of random sets / I.R. Goodman // Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Developments. — New York : Oxford : Toronto : Sydney : Paris : Frankfurt : Pergamon Press, 1982. — P. 327–343.

20. *Орлов, А.И.* Математика нечеткости / А.И. Орлов // Наука и жизнь. — 1982. — № 7. — С. 60–67.

21. *Орлов, А.И.* Метрика подобия: аксиоматическое введение, асимптотическая нормальность / А.И. Орлов, Г.В. Раушенбах // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвузовский сборник научных трудов. — Пермь : Изд-во ПГУ, 1986. — С. 148–157.

22. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

23. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: нечисловая статистика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 446 с.

24. *Орлов, А.И.* Сходимость эталонных алгоритмов / А.И. Орлов // Прикладной многомерный статистический анализ. Ученые записки по статистике. Т. 33. — Москва : Наука, 1978. — С. 361–364.

25. *Борель, Э.* Вероятность и достоверность / Э. Борель. — Москва : ГИФМЛ, 1961. — 120 с.

26. *Орлов, А.И.* Системная нечеткая интервальная математика : монография / А.И. Орлов, Е.В. Луценко. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2014. — 600 с.

27. *Орлов, А.И.* Статистика нечетких данных / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2016. — № 119. — С. 75–91.

28. *Птускин, А.С.* Нечеткие модели и методы в менеджменте : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению 220700 «Организация и управление наукоемкими производствами» специальности 220 701 «Менеджмент высоких технологий» / А.С. Птускин. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. — 215 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

1. В каких случаях целесообразно применение нечетких множеств?

2. Справедливо ли для нечетких множеств равенство $(A + B)C = AC + BC$? А равенство $(AB)C = (AC)(BC)$?

3. Опишите с помощью нечеткого подмножества временной шкалы понятие «молодой человек» (на основе опроса 10–20 экспертов).

4. Опишите с помощью теории нечеткости понятие «куча зерен» (на основе опроса 10–20 экспертов).

5. Как с точки зрения нечетких множеств можно интерпретировать вероятность накрытия определенной точки случайным множеством?

6. На множестве $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ задано нечеткое множество B с функцией принадлежности $\mu_B(y)$, причем $\mu_B(y_1) = 0{,}1$, $\mu_B(y_2) = 0{,}2$, $\mu_B(y_3) = 0{,}3$. Постройте случайное множество A так, чтобы $Proj\ A = B$.

7. На множестве $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ задано нечеткое множество B с функцией принадлежности $\mu_B(y)$, причем $\mu_B(y_1) = 0{,}2$, $\mu_B(y_2) = 0{,}1$, $\mu_B(y_3) = 0{,}5$. Постройте случайное множество A так, чтобы $Proj\ A = B$.

8. На множестве $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ задано нечеткое множество B с функцией принадлежности $\mu_B(y)$, причем $\mu_B(y_1) = 0{,}5$, $\mu_B(y_2) = 0{,}4$, $\mu_B(y_3) = 0{,}7$. Постройте случайное множество A так, чтобы $Proj\ A = B$.

9. На множестве $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ задано нечеткое множество B с функцией принадлежности $\mu_B(y)$, причем $\mu_B(y_1) = 0{,}3$, $\mu_B(y_2) = 0{,}2$, $\mu_B(y_3) = 0{,}1$. Постройте случайное множество A так, чтобы $Proj\ A = B$.

10. Расскажите о расстояниях в пространствах нечетких множеств.

ТЕМЫ ДОКЛАДОВ, РЕФЕРАТОВ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Обсудите суждение: «Мы мыслим нечетко» (см. [20]). Почему нечеткость мышления помогает взаимопониманию?

2. Взаимосвязь теории нечеткости и теории вероятностей.

3. Методы оценивания функции принадлежности нечеткого множества.

4. Теория нечеткости и интервальная математика.

5. Описание данных для выборок, элементы которых — нечеткие множества.

6. Регрессионный анализ нечетких переменных (согласно [22, 23]).

7. Кластерный анализ нечетких данных.

8. Случайные толерантности и нечеткие толерантности (согласно [17, 14, 22, 23]).

9. Докажите, что для расстояний между нечеткими множествами, введенных в разд. П.2.4, справедливо неравенство треугольника.

10. Непараметрические оценки плотности распределения вероятностей в пространстве нечетких множеств.

11. Обсудите парадокс «Куча» древнегреческого философа Зенона и основанный на нем подход Э. Бореля к введению функции принадлежности для понятия «куча» [25]).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ЭКОНОМЕТРИКА»

Приведем ряд материалов, полезных преподавателям и студентам. Они отражают двадцатипятилетний опыт факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Примечание. В 2023 г. в МГТУ им. Н.Э. Баумана блок «Эконометрика и статистика» состоит из трех дисциплин (бакалавриат). Первая из них — «Прикладная статистика» (весенний семестр второго года обучения). Вторая — «Эконометрика» (весенний семестр третьего года обучения). Ее содержание раскрыто в настоящем учебнике. Третья — «Эконометрика-2», ранее преподавалась под названием «Организационно-экономическое моделирование» (осенний семестр четвертого года обучения). На младших курсах дается обширный блок математических дисциплин, в который входит, в частности, теория вероятностей и математическая статистика.

П.3.1. СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИЙ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЭКОНОМЕТРИКА»

Приводим ***типовое содержание лекций*** (34 аудиторных часа) с указанием разделов настоящего учебника:

1. Необходимость выборочных исследований. Построение выборочной функции ожидаемого спроса и расчет оптимальной розничной цены при заданной оптовой цене (издержках). Анкетное исследование (на примере маркетингового исследования потребителей растворимого кофе). Различные виды формулировок вопросов (открытый, закрытый, полузакрытый вопросы), их достоинства и недостатки. Биномиальная и гипергеометрическая модели выборки, их близость в случае большого объема генеральной совокупности по сравнению с выборкой.

Глава 1, разд. 1.1, 1.2.

2. Асимптотическое распределение выборочной доли (в случае ответов типа «да — нет»). Интервальное оценивание доли и метод проверки гипотезы о равенстве долей.

Глава 1, разд. 1.3–1.5.

3. Различные формулировки гипотезы однородности двух выборок. Случай конечного числа градаций. Критерий Крамера — Уэлча для проверки равенства математических ожиданий.

Глава 2, разд. 2.1–2.3.

4. Гипотеза однородности двух независимых выборок. Расчет статистики двухвыборочного критерия Вилкоксона (Манна — Уитни) и принятие решения на основе его асимптотической нормальности. Состоятельные критерии проверки однородности. Реальные и номинальные уровни значимости.

Глава 2, разд. 2.4–2.6.

5. Метод наименьших квадратов для линейной прогностической функции. Подход к оцениванию параметров. Критерий правильности расчетов. Оценка остаточной дисперсии. Точечный и интервальный прогноз. Модель с периодической составляющей.

Глава 3, разд. 3.1, 3.7.

6. Метод наименьших квадратов для модели, линейной по параметрам. Оценивание коэффициентов многочлена. Преобразования переменных. Случай нескольких независимых переменных (регрессоров). Коэффициенты корреляции. Оценивание параметров функции Кобба — Дугласа.

Глава 3, разд. 3.2–3.4.

7. Оценка остаточной дисперсии — критерий качества эконометрической модели (при фиксированном числе оцениваемых параметров). Коррекция на число параметров. Типовое поведение остаточной дисперсии при расширении множества регрессоров. Оценка степени полинома и описание асимптотического поведения этой оценки (геометрическим распределением со сдвигом).

Глава 3, разд. 3.5.

8. Инфляция как рост цен. Разброс цен во времени и пространстве. Потребительские корзины. Определение индекса инфляции. Расчет индекса инфляции. Теорема умножения и средний индекс (темп) инфляции. Теоремы умножения и сложения для индекса инфляции. Виды инфляции: спроса, издержек, административная.

Глава 4, разд. 4.1–4.3.

9. Применения индекса инфляции. Приведение к сопоставимым ценам. Прожиточный минимум. Вклады в банки и кредиты. Курс доллара в сопоставимых ценах. Международные сопоставления на основе паритета покупательной способности. Инфляция и бухгалтерская отчетность. Инфляция и стоимость основных фондов предприятия.

Глава 4, разд. 4.4, 4.5.

10. Примеры процедур экспертного оценивания. Их использование в соревнованиях, при выборе, распределении финансирования. Военный совет в Филях (1812 г.). Метод Дельфи и послевоенное развитие экспертных технологий. Экспертные оценки на современном этапе. Экологические экспертизы. Метод Дельфи. Мозговой штурм. Метод сценариев экспертного прогнозирования.

Глава 5, разд. 5.1.

11. Нахождение итогового мнения комиссии экспертов: методы средних арифметических и медиан рангов. Метод согласования кластеризованных ранжировок.

Глава 5, разд. 5.2, 5.3.

12. Основные стадии проведения экспертного исследования. Формирование целей экспертного исследования (сбор информации для ЛПР и/или подготовка проекта решения для ЛПР и др.). Роль диссидентов. Формирование состава экспертной комиссии: методы списков (реестров), «снежного кома», самооценки, взаимооценки. Проблема априорных предпочтений экспертов.

Глава 5, разд. 5.4.

13. Различные варианты организации экспертного исследования, различающиеся по числу туров (один, несколько, не фиксировано), порядку вовлечения экспертов (одновременно, последовательно), способу учета мнений (с весами, без весов), организации общения экспертов (без общения, заочное, очное с ограничениями («мозговой штурм», совет в Филях) или без ограничений). Интуиция эксперта и информационные технологии.

Глава 5, разд. 5.5, 5.6.

14. Основные понятия (репрезентативной) теории измерений. Определения, примеры, группы допустимых преобразований для шкал наименований, порядка, интервалов, отношений, абсолютной. Требование устойчивости стати-

стических выводов относительно допустимых преобразований шкал. Недопустимость использования среднего арифметического для данных, измеренных в порядковой шкале.

Глава 6, разд. 6.1, 6.2.

15. Различные виды средних. Пример с распределением доходов. Степенные средние. Структурные средние. Средние по Коши. Средние по Колмогорову.

Глава 6, разд. 6.2.

16. Описание средних, результат сравнения которых устойчив в порядковой шкале, в шкалах интервалов и отношений.

Глава 6, разд. 6.3, 6.4.

17. Нечисловые статистические данные. Бинарные отношения. Их свойства: рефлексивность, симметричность, транзитивность. Отношения эквивалентности, кластеризованные ранжировки. Отношения толерантности. Описание бинарных отношений матрицами из 0 и 1. Вероятностные модели порождения нечисловых данных.

Глава 7, разд. 7.1–7.3.

18. Расстояния в пространствах объектов нечисловой природы. Аксиоматическое введение расстояний. Расстояние Кемени. D-метрика. Расстояния между множествами — мера симметрической разности и D-метрика. Медиана Кемени.

Глава 7, разд. 7.4, 7.5.

19. Оптимизационный подход к определению средних величин. Примеры: математическое ожидание и среднее арифметическое, выборочная и теоретическая медианы, медиана Кемени, среднее множество.

Глава 7, разд. 7.6.

20. Эмпирические и теоретические средние в пространствах произвольной природы. Законы больших чисел для нечисловых данных и их интерпретация в терминах теории экспертного опроса. Непараметрические оценки плотности в пространствах произвольной природы.

Глава 7, разд. 7.7, 7.8.

П.3.2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ (СЕМИНАРЫ) И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Основное содержание семинаров — решение задач по тематике курса лекций. Отчетные мероприятия — контрольные (расчетные, самостоятельные) работы. Приводим содержание пяти типовых контрольных работ. Варианты работ различаются задаваемыми преподавателем конкретными параметрами: объемами выборок, значениями переменных, номерами продовольственных товаров и т. п.

Контрольная работа 1. Выборочные исследования

Нас интересуют доли объектов в двух выборках, обладающих определенным свойством.

Объем первой выборки $n_1 = 900$.

Из них обладают рассматриваемым свойством $m_1 = 600$.

Объем второй выборки $n_2 = 300$.

Из них обладают рассматриваемым свойством $m_2 = 150$.

1. Укажите доверительные границы для долей объектов в двух выборках, обладающих определенным свойством (с доверительной вероятностью 0,95).

2. Проверьте гипотезу о равенстве долей (уровень значимости $\alpha = 0{,}05$).

Контрольная работа 2. Метод наименьших квадратов

Исходные данные — набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции), даны в табл. П.3.1.

Таблица П.3.1

Исходные данные для восстановления функции

t_k	2	4	5	6	8	9
x_k	17	24	27	28	33	35

Предполагается, что переменные связаны зависимостью:

$$x_k = a\, t_k + b + e_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

где a и b — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость.

1. Методом наименьших квадратов оцените параметры a и b линейной зависимости. Выпишите восстановленную зависимость.

2. Вычислите восстановленные значения зависимой переменной, сравните их с исходными значениями (найдите разности) и проверьте условие точности вычислений (при отсутствии ошибок в вычислениях сумма исходных значений должна равняться сумме восстановленных).

3. Найдите остаточную сумму квадратов и оцените дисперсию погрешностей.

4. Выпишите точечный прогноз как функцию от t, а также верхнюю и нижнюю доверительные границы для него (для доверительной вероятности 0,95).

5. Рассчитайте прогнозное значение и доверительные границы для него для момента $t = 12$.

6. Как изменятся результаты, если доверительная вероятность будет увеличена? А если она будет уменьшена?

Контрольная работа 3. Индекс инфляции

1. По данным табл. П.3.2 рассчитайте индекс инфляции с 14.03.1991 по 14.03.2001 на основе потребительской корзины из продуктов № 2, 7, 14, 18, 19, 25.

Таблица П.3.2

Номенклатура, годовые нормы потребления и цены (руб.)

№ п/п	Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 14.03.1991	Цена на 14.03.2001
1	Хлеб пшеничный	59,8	0–50	12
2	Хлеб ржаной	65,3	0–20	10
3	Мука пшеничная	18,5	0–46	10
4	Картофель	124,22	0–10	9

№ п/п	Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 14.03.1991	Цена на 14.03.2001
5	Капуста	30,4	0–20	8
6	Помидоры	2,8	0–85	80
7	Столовые корнеплоды	40,6	0–20	9
8	Прочие (лук)	27,9	0–50	8
9	Яблоки свежие	15,1	1–50	20
10	Сахар	19,0	0–90	21
11	Говядина	4,4	2–00	85
12	Субпродукты (печень)	0,5	1–40	45
13	Птица	16,1	2–40	52
14	Колбаса докторская	0,4	2–30	95
15	Копчености	0,3	3–70	200
16	Рыба свежая (минтай)	10,9	0–37	80
17	Сельди	0,8	1–40	40
18	Молоко, кефир	110,0	0–32	17
19	Сметана, сливки	1,6	1–70	50
20	Масло животное	2,5	3–60	70
21	Творог	9,8	1–00	45
22	Сыр и брынза	2,3	3–60	70
23	Яйца, десяток	15,2	0–90	20
24	Масло растительное	3,8	1–80	26
25	Маргарин	6,3	1–20	35

2. Гражданин Иванов в марте 1991 г. получил 200 руб., а в марте 2001 г. — 5 000 руб. Во сколько раз изменился его доход? Увеличился или уменьшился? (Использовать индекс инфляции из задачи 1.)

3. За январь индекс инфляции составил 50 %, а за февраль — 200 %. Чему равен индекс инфляции за два месяца? Каков средний темп (уровень) инфляции?

4. Выразите текущий курс доллара США в ценах марта 1991 г. (индекс инфляции на момент проведения контрольной работы сообщает преподаватель).

Контрольная работа 4. Нахождение итогового упорядочения комиссии экспертов методом средних рангов

В табл. П.3.3 приведены кластеризованные ранжировки — ответы 7 экспертов.

Таблица П.3.3

Кластеризованные ранжировки — ответы экспертов

Эксперты	Упорядочения
1	$1 < \{2, 3\} < 4 < 5 < \{6, 7\}$
2	$\{1, 3\} < 4 < 2 < 5 < 7 < 6$
3	$1 < 4 < 2 < 3 < 6 < 5 < 7$
4	$1 < \{2, 4\} < 3 < 5 < 7 < 6$
5	$2 < 3 < 4 < 5 < 1 < 6 < 7$
6	$1 < 3 < 2 < 5 < 6 < 7 < 4$
7	$1 < 5 < 3 < 4 < 2 < 6 < 7$

Найдите:

1) упорядочение по средним арифметическим рангов;
2) упорядочение по медианам рангов;
3) согласующую эти два упорядочения кластеризованную ранжировку.

Контрольная работа 5. Эмпирическое среднее как решение оптимизационной задачи

Дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний (мер различия) для множества из 9 элементов A_1, A_2, A_3, …, A_9 (табл. П.3.4). Найдите в этом множестве медиану для множества из 5 элементов $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_9\}$.

Таблица П.3.4

Попарные расстояния между бинарными отношениями

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	0	5	3	6	7	4	10	3	11
A_2	5	0	5	6	10	3	2	5	7
A_3	3	5	0	8	2	7	6	5	7
A_4	6	6	8	0	5	4	3	8	8
A_5	7	10	2	5	0	10	8	3	7
A_6	4	3	7	4	10	0	2	3	5

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_7	10	2	6	3	8	2	0	6	3
A_8	3	5	5	8	3	3	6	0	9
A_9	11	7	7	8	7	5	3	9	0

ФИО студента ____________________________________.

Группа _______.

П.3.3. ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Домашние задания связаны с выходом «в реальную экономическую жизнь» и нацелены на решение задач, имеющих практическую ценность для различных хозяйствующих субъектов.

Домашнее задание № 1. Оценивание функции спроса

Краткая формулировка. Соберите информацию о максимально возможной цене (в руб.), которую потребители готовы заплатить за _______ (конкретное название товара или услуги выберите из прилагаемого списка или самостоятельно). Опросите не менее 50 человек (не считая отказавшихся от ответа). Постройте выборочную функцию спроса. Найдите розничные цены, максимизирующие прибыль, для пяти различных значений оптовой цены.

Методом наименьших квадратов восстановите (теоретическую) функцию спроса, используя линейную аппроксимацию. Рассчитайте доверительные границы. На основе восстановленной зависимости найдите розничные цены, максимизирующие прибыль, для пяти различных значений оптовой цены и сопоставьте с результатами оптимизации на основе выборочной функции спроса.

Оформите полученные результаты в виде отчета.

Литература к домашнему заданию № 1: гл. 1 и 3 настоящего учебника.

Список товаров и услуг для использования в домашнем задании № 1:

1. Учебник по менеджменту.
2. Учебник по маркетингу.
3. Учебник по макроэкономике.
4. Учебник по микроэкономике.
5. Учебник по контроллингу.
6. Учебник по статистике.
7. Учебник по управлению инвестициями.

8. Учебник по философии.
9. Учебник по социологии.
10. Учебник по психологии.
11. Учебник по экологии.
12. Учебник по английскому языку.
13. Учебник по отечественной истории.
14. Учебник по экономике предприятия.
15. Учебник по управлению персоналом.
16. Учебник по управлению проектами.
17. Учебник по стратегическому менеджменту.
18. Учебник по инновационному менеджменту.
19. Учебник по прогнозированию.
20. Учебник по организации производства.
21. Чашка кофе.
22. Холодильник с морозильной камерой.
23. Цветок любимому человеку.
24. Доступ в Интернет в течение 1 ч.
25. Компьютер среднего уровня.
26. Сканер.
27. Телевизор.
28. Фотоаппарат типа «мыльница».
29. Фотоаппарат цифровой.
30. СВЧ-гриль.
31. Рюкзак/портфель/сумка.
32. Телефонный аппарат (проводная связь).
33. Телефонный аппарат мобильной (сотовой) связи.
34. За 1 мин телефонного разговора по мобильной связи.
35. За 1 ч телефонного разговора по проводной связи (внутри города).
36. Стиральная машина.
37. Стол (письменный).
38. Диван.
39. Видеокамера.
40. Часы наручные.
41. Калькулятор обычный.
42. Калькулятор инженерный.
43. Одна поездка в наземном городском транспорте.
44. Литр бензина.

45. Билет на хороший спектакль.
46. Батон хлеба.
47. Теплая зимняя куртка.
48. Обед в столовой МГТУ им. Н.Э. Баумана.
49. Пылесос.
50. Плеер переносной.
51. Костюм.
52. Килограмм яблок.
53. Обед в ресторане среднего уровня.
54. Килограмм сахара.
55. Пломба зуба (неосложненная).
56. Сутки в гостинице (при путешествиях).
57. Компьютерный журнал.
58. Молодежный журнал.
59. Билет в кино.
60. Оплата стрижки волос на голове.
61. Тетрадь.
62. Ручка для записей.
63. Подарок другу (подруге) на день рождения.
64. Плитка шоколада (200 г).
65. Литровая пластиковая бутылка минеральной воды (негазированной) подмосковного источника.
66. Малогабаритный «народный» автомобиль (типа автомобиля «Ока»).
67. Одна поездка в метро.
68. Одна пара осенней обуви.
69. Плата за посещение пляжа.
70. Любимая газета.
71. Килограмм бананов.
72. Учебник по экономической теории.
73. Бутылка «Пепси-Колы» (0,5 л).
74. Книга по истории МГТУ им. Н.Э. Баумана.
75. Мышь (для компьютера).
76. Коврик для мыши.
77. Лазерный принтер.
78. Тостер.
79. Поездка на пригородном поезде на 1 зону.
80. Переезд поездом из Москвы в Санкт-Петербург.

81. Поездка в Париж на неделю.
82. Автомобиль среднего уровня.
83. Месячное снабжение квартиры горячей водой.
84. Месячное пользование электроэнергией (в среднем).
85. Отопление квартиры за месяц.
86. Найм квартиры (в месяц).
87. Стол (обеденный).
88. Загородный деревянный дом + 6 соток.
89. Бутылка хорошего вина.
91. Комплект постельного белья.
92. Кресло.

Домашнее задание № 2. Расчет и прогнозирование индекса инфляции

Выберите места сбора информации о ценах. Соберите данные по ценам за четыре момента времени, отстоящие друг от друга не менее чем на две недели. Заполните табл. П.3.5. Рассчитайте индексы инфляции. По первым трем индексам методом наименьших квадратов рассчитайте точечный и интервальный прогноз на четвертый момент времени и сравните прогноз с реальным индексом инфляции.

Результаты работы оформите в виде отчета.

Таблица П.3.5

Информация о нормах потребления и ценах

Наименование продукта питания	**Годовая норма, кг**	**Цена 14.03.1991**	**Место снятия цен**	**Цена __.__.20__**	**Цена __.__.20__**	**Цена __.__.20__**	**Цена __.__.20__**
1. Хлеб и хлебопродукты							
1.1. Мука пшеничная	18,5	0–46					
1.2. Рис	3,5	0–88					
1.3. Другие крупы	4,9	0–62					
1.4. Хлеб пшеничный	59,8	0–50					
1.5. Хлеб ржаной	65,3	0–20					
1.6. Макаронные изделия	4,9	0–70					
2. Картофель	124,2	0–10					
3. Овощи							
3.1. Капуста	30,4	0–20					
3.2. Огурцы и помидоры	2,8	0–85					
3.3. Столовые корнеплоды	40,6	0–20					
3.4. Прочие (лук и др.)	27,9	0–50					
4. Фрукты и ягоды							
4.1. Яблоки свежие	15,1	1–50					
4.2. Яблоки сушеные	1,0	3–00					
5. Сахар и кондитерские изделия							
5.1. Сахар	19,0	0–90					
5.2. Конфеты	0,8	4–50					

Наименование продукта питания	**Годовая норма, кг**	**Цена 14.03.1991**	**Место снятия цен**	**Цена __.__.20__**	**Цена __.__.20__**	**Цена __.__.20__**	**Цена __.__.20__**
5.3. Печенье и торты	1,2	1–40					
6. Мясо и мясопродукты							
6.1. Говядина	4,4	2–00					
6.2. Баранина	0,8	1–80					
6.3. Свинина	1,4	2–00					
6.4. Субпродукты (печень)	0,5	1–40					
6.5. Птица	16,1	2–40					
6.6. Сало	0,7	2–40					
6.7. Копчености	0,7	3–70					
7. Рыба и рыбопродукты							
7.1. Свежая (минтай)	10,9	0–37					
7.2. Сельди	0,8	1–40					
8. Молоко и молочные продукты							
8.1. Молоко, кефир, л	110,0	0–32					
8.2. Сметана, сливки	1,6	1–70					
8.3. Масло животное	2,5	3–60					
8.4. Творог	9,8	1–00					
8.5. Сыр и брынза	2,3	3–60					
9. Яйца, шт.	152,0	0–09					
10. Масло растительное, маргарин							
10.1. Масло растительное, л	3,8	1–80					
10.2. Маргарин	6,3	1–20					

Примечание. Пункт 1.3 — геркулес.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ФУНКЦИЯ СПРОСА И МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ[5]

Приложение 4 — это методическая разработка для студентов и преподавателей по выполнению домашнего задания № 1 (см. прил. 3, разд. П.3.3) и проведению соответствующих практических занятий (семинаров).

Рассмотрено оценивание функции спроса по эмпирическим данным табличным методом и методом наименьших квадратов. Разобраны два алгоритма обработки данных опроса с помощью метода наименьших квадратов (с учетом повторов пар и без такового), в том числе методы построения доверительных интервалов для прогностической функции. Дано обобщение на случай нелинейных зависимостей. Обсуждается критерий проверки правильности расчетов. Рассмотрены различные способы оценивания точности восстановления зависимости. Даны ответы на часто возникающие вопросы, в частности связанные с доверительными интервалами, понятиями «квантиль» и «квартиль».

П.4.1. ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИИ СПРОСА

При маркетинговых исследованиях полезно проводить опрос потребителей, например, при вводе товара на рынок. Полезно знать, сколько денег потребители готовы заплатить за тот или иной товар, чтобы установить оптимальную цену. Затем необходимо обработать эти данные. Обработка данных проводится с помощью оценивания функции спроса. Это можно сделать, построив выборочную функцию спроса графически, в виде таблицы или обработав данные с помощью метода наименьших квадратов.

Рассмотрим первый метод (табличный).

Пусть в результате опроса 50 человек мы получили 50 ответов в ответ на вопрос, какую максимальную цену потребитель готов заплатить за определенный товар. Пусть цена колеблется от 50 руб. до 200 руб. Сначала соберем все цены:

120, 75, 100, 75, 100, 170, 100, 120, 90, 100, 180, 100, 150,
100, 170, 100, 60, 100, 75, 50, 60, 90, 150, 50, 120, 200, 75,
100, 90, 100, 100, 90, 75, 120, 200, 100, 75, 150, 120, 100,
75, 150, 120, 170, 75, 100, 180, 120, 100, 150.

[5] Приложение 4 подготовлено Л.А. Орловой.

Теперь перейдем к анализу данных опроса. Для начала необходимо составить таблицу исходных данных — пар чисел (p, $D(p)$), где p — независимая переменная — цена; $D(p)$ — зависимая от p величина — спрос.

Упорядочиваем все значения в порядке возрастания. Затем строим табл. П.4.1. В первом столбце — номера различных значений цены в порядке возрастания (i). Во втором столбце приведены сами значения цены (p_i). В третьем столбце указано, сколько раз названо то или иное значение (N_i).

Таким образом, 50 опрошенных потребителей назвали 10 конкретных значений цены (максимально для них допустимых значений). Каждое из значений, как видно из третьего столбца табл. П.4.1, названо от 2 до 15 раз.

Теперь легко построить выборочную функцию спроса в зависимости от цены. Она представлена в четвертом столбце, который заполняется снизу вверх на основе следующих рассуждений.

Таблица П.4.1

Оценивание функции спроса и расчет оптимальной цены

i	**Цена p_i**	N_i	**Спрос $D(p_i)$**	**Прибыль (p_i – 10)$D(p_i)$**	**Прибыль (p_i – 30)$D(p_i)$**
1	50	2	50	40 × 50 = 2 000	20 × 50 = 1 000
2	60	2	48	50 × 48 = 2 400	30 × 48 = 1 440
3	75	8	46	65 × 46 = 2 990	45 × 46 = 2 070
4	90	4	38	80 × 38 = 3 040	60 × 38 = 2 280
5	100	15	34	90 × 34 = 3 060	70 × 34 = 2 380
6	120	7	19	110 × 19 = 2 090	90 × 19 = 1 710
7	150	5	12	140 × 12 = 1 680	120 × 12 = 1 440
8	170	3	7	160 × 7 = 1 120	140 × 7 = 980
9	180	2	4	170 × 4 = 680	150 × 4 = 600
10	200	2	2	190 × 2 = 380	170 × 2 = 340
i	**Цена p_i**	**Прибыль (p_i – 50)$D(p_i)$**	**Прибыль (p_i – 70)$D(p_i)$**	**Прибыль (p_i – 100)$D(p_i)$**	**Прибыль (p_i – 120)$D(p_i)$**
1	50	0	–	–	–
2	60	10 × 48 = 480	–	–	–
3	75	25 × 46 = 1 150	5 × 46 = 230	–	–
4	90	40 × 38 = 1 520	20 × 38 = 760	–	–
5	100	50 × 34 = 1 700	30 × 34 = 1 020	0	–

i	Цена p_i	Прибыль $(p_i - 50)D(p_i)$	Прибыль $(p_i - 70)D(p_i)$	Прибыль $(p_i - 100)D(p_i)$	Прибыль $(p_i - 120)D(p_i)$
6	120	70 × 19 = 1 330	50 × 19 = 950	20 × 19 = 380	0
7	150	100 × 12 = 1 200	80 × 12 = 960	50 × 12 = 600	30 × 12 = 360
8	170	120 × 7 = 840	100 × 7 = 700	70 × 7 = 490	50 × 7 = 350
9	180	130 × 4 = 520	110 × 4 = 440	80 × 4 = 320	60 × 4=240
10	200	150 × 2 = 300	130 × 2 = 260	100 × 2 = 200	80 × 2=160

Если будем предлагать товар по ценам свыше 200 руб., то его не купит никто. При цене 200 руб. появляются 2 покупателя. А если цену понизить до 180 руб., тогда товар купят четверо — те двое, для которых максимальная цена 180 руб., и те двое, кто был согласен на большую цену 200 руб. Таким образом, четвертый столбец заполняется по правилу: значение в клетке 4-го столбца равно сумме значений в находящейся слева клетке 3-го столбца и в лежащей снизу клетке 4-го столбца.

Зависимость спроса от цены — это зависимость 4-го столбца $D(p_i)$ от 2-го p_i. Зависимость можно представить на графике, в координатах «спрос — цена». Абсцисса — это спрос $D(p_i)$, а ордината — цена p_i (рис. П.4.1).

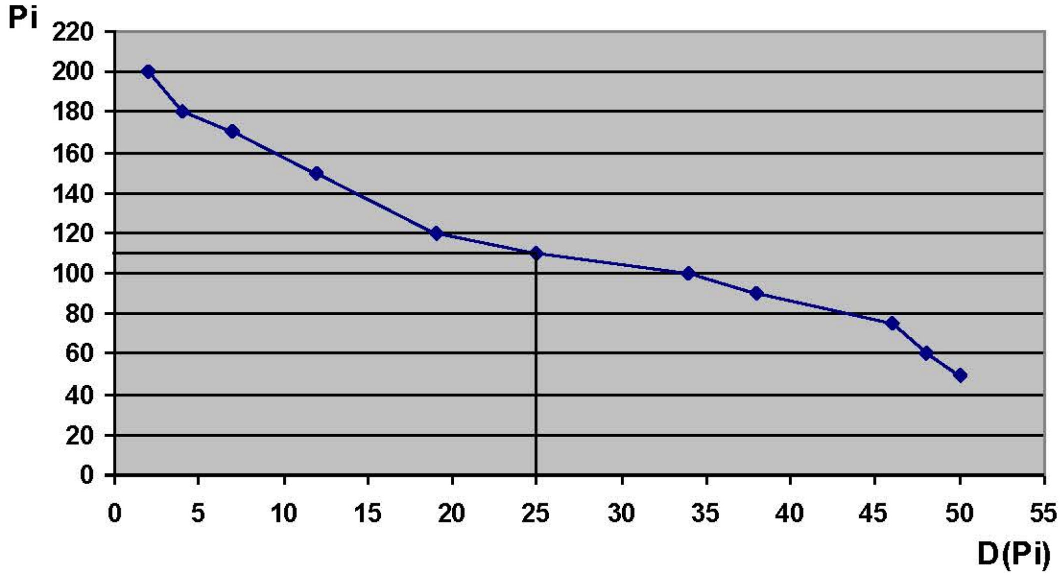


Рис. П.4.1. Выборочная оценка функции спроса

Из этого графика видно, что 50 % покупателей готовы купить товар за 110 руб. Действительно, задаем спрос 50 / 2 = 25, затем проводим вертикаль до пересечения с графиком, а от точки пересечения — горизонталь до оси ординат, получаем цену — 110 руб.

Давайте посчитаем прибыль при различных значениях издержек p_0. Издержки — это либо оптовая цена, если товар закупается, либо себестоимость единицы продукции, если товар производим сами.

Найдем для каждого значения издержек p_0 оптимальную розничную цену (см. табл. П.4.1). Предполагаемые издержки: 10, 30, 50, 70, 100, 120 (руб.). Для каждого i в табл. 4.1 приведены произведения $(p_i - p_0)D(p_i)$, где p_0 — это издержки.

Анализируя таблицу, видим, что при издержках от 10 до 70 руб. максимум прибыли приходится на цену 100 руб., что соответствует продажам лицам со средними возможностями (товар купят 34 человека из 50). Это 68 %, или около 2/3 всех возможных покупателей.

При повышении издержек максимум достигается на более обеспеченных покупателях. А именно, при цене 150 руб. купят 12 человек из 50, т. е. 24 %, или около 1/4 всех покупателей.

Таким образом, даже при значительном изменении издержек от 10 до 70 руб. выгоднее оставить розничную цену постоянной — 100 руб., так как при этом мы не только сохраняем покупателей (их количество), но и получаем большую прибыль, чем при переходе на более высокую розничную цену. Сравним.

Возьмем цену 100 руб. Даже при издержках 70 руб. получаем прибыль 1 020 руб. Купят 34 покупателя, т. е. 68 % от всех потенциальных покупателей. Если же увеличим цену до 150 руб., то при тех же издержках, равных 70 руб., получим прибыль 960 руб., но при этом потеряем покупателей, так как купят товар всего 12 человек, т. е. 24 % потенциальных покупателей (см. табл. П.4.1).

Рассмотренный пример построен на использовании тех значений цены, которые были названы при опросе. Пока мы не знаем, какой будет спрос при других значениях цены. Может быть, и оптимальная цена будет находиться вне названных при опросе значений.

Поэтому целесообразно восстановить функцию спроса при всех возможных значениях цены, а затем использовать эту восстановленную зависимость для расчета оптимальной цены при различных значениях издержек.

Восстановить зависимость можно с помощью метода наименьших квадратов.

П.4.2. ОБРАБОТКА ДАННЫХ ОПРОСА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Метод наименьших квадратов относится к важному разделу эконометрики и прикладной статистики — многомерному статистическому анализу.

В многомерном статистическом анализе исходные данные — это как минимум пара чисел (t_i, X_i) (а не одно число).

Предполагается, что переменная X линейно зависит от переменной t, т. е.

$$X(t) = a\,(t - t_{\text{ср}}) + b.$$

Это теоретическая модель, а практически известны исходные данные — набор пар чисел (t_i, X_i), i = 1, 2, 3, …, n, где t_i — независимая переменная (например, время, а в случае определения выборочной функции спроса — цена p_i); X_i — зависимая переменная (например, индекс инфляции, курс доллара, а в случае определения выборочной функции спроса это будет спрос $D(p_i)$).

Предполагается, что переменные связаны линейной зависимостью:

$$X_i = a(t_i - t_{\text{ср}}) + b + e_i,\ i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Это реальная зависимость, учитывающая погрешности (e_i), искажающие зависимость, параметры a и b нам неизвестны и подлежат оцениванию, а

$$t_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}.$$

Обычно параметры a и b оценивают методом наименьших квадратов.

Согласно этому методу для расчета наилучшей функции, приближающей линейным образом зависимость X от t, следует рассмотреть функцию двух переменных:

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [X_i - a(t_i - t_{\text{ср}}) - b]^2.$$

Фактически это есть сумма квадратов разностей между реальными значениями функции и теоретически определенными значениями функции от независимой переменной.

Оценки метода наименьших квадратов — это такие значения a и b, при которых функция $f(a, b)$ достигает минимума по всем значениям аргументов.

Чтобы найти эти оценки, надо вычислить частные производные от функции $f(a, b)$ по аргументам a и b, т. е. $\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}$ и $\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}$, и приравнять их к 0.

Из полученных уравнений путем внутриматематических преобразований получим оценки:

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i t_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n t_{ср.}^2};$$

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = X_{ср.}$$

Следовательно, восстановленная функция, с помощью которой можно прогнозировать, имеет вид:

$$X^*(t) = a^*(t - t_{ср.}) + b^*.$$

Это теоретическая функция, в которой вместо параметров подставлены их оценки, что позволяет проводить прогнозирование на какой-то интервал независимой переменной t вперед, а также интерполировать эти данные на моменты между наблюдениями.

Если взять другие обозначения, то линейная зависимость может выглядеть так:

$$X_i = ct_i + d + e_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (П.4.1)$$

Сравнивая выражения:

$$X_i = a(t_i - t_{\text{ср}}) + b + e_i = at_i - at_{\text{ср}} + b + e_i$$

и (П.4.1), легко перейти от одного к другому:

$$c = a,\ d = b - at_{\text{ср}}.$$

Аналогичные соотношения справедливы и для оценок:

$$c^* = a^*,\ d^* = b^* - a^* t_{\text{ср}};$$

$$X_i^* = c^* t_i + d^*.$$

Оценкой погрешности (невязки) e_i является кажущаяся невязка:

$$e_i^* = X_i - X_i^*.$$

Возникает вопрос, насколько точно оценивается зависимость. Чтобы ответить на него, надо ввести модель порождения данных:

$$X_i = ct_i + d + e_i,$$

где $e_1, e_2, \dots, e_n$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2.

Таким образом, модель описывается тремя параметрами: c, d и σ^2. Параметры c и d мы умеем оценивать, а для оценки σ^2 используется следующая формула:

$$\sigma^{*2} = \frac{SS}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_i^*)^2}{n},$$

где SS — так называемая остаточная сумма квадратов; σ^{*2} — оценка дисперсии.

Доверительные интервалы для прогностической функции записываются следующим образом (см. п. 3.1 гл/ 3 настоящего учебника):

$$X^*(t)_{верхн./нижн.} = [a^*(t - t_{ср.}) + b^*] \pm U(\gamma)\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t - t_{ср.})^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{ср.}^2}},$$

где $\sigma^* = \sqrt{\sigma^{*2}} = \sqrt{(SS / n)}$; $U(\gamma)$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $(1 + \gamma) / 2$.

При доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ находим из таблиц $U(\gamma) = 1{,}96$, при $\gamma = 0{,}99$ имеем $U(\gamma) = 2{,}58$, и $U(\gamma) = 1{,}64$ при $\gamma = 0{,}9$.

Теперь перейдем к обработке данных опроса с помощью метода наименьших квадратов. Для начала необходимо составить таблицу исходных данных — пар чисел (p, $D(p)$) также в порядке возрастания значений параметра p. При расчетах удобно использовать программу Microsoft Excel.

На основе приведенных в разд. П.4.1 данных рассчитаем прогностическую функцию и оптимальную цену при различных уровнях издержек. Удобно использовать табл. П.4.2, при построении которой обращено внимание на необходимость учета повторов названных при опросе значений цен.

Таблица П.4.2

Оценивание функции спроса методом наименьших квадратов

i	Цена p_i	N_i	$p_i N_i$	Спрос $D(p_i)$	$D(p_i)N_i$	$P_i^2 N_i$	$D(p_i)p_i N_i$	$D^*(p_i)$	$N_i[D(p_i) - D^*(p_i)]$	$N_i[D(p_i) - D^*(p_i)]^2$
1	50	2	100	50	100	5 000	5 000	52,36	–4,718	11,12976
2	60	2	120	48	96	7 200	5 760	48,52	–1,0456	0,54664
3	75	8	600	46	368	45 000	27 600	42,77	25,852	83,54074
4	90	4	360	38	152	32 400	13 680	37,01	3,9432	3,887207
5	100	15	1 500	34	510	150 000	51 000	33,18	12,33	10,13526
6	120	7	840	19	133	100 800	15 960	25,51	–45,5392	296,2598
7	150	5	750	12	60	112 500	9 000	14	–9,985	19,94005
8	170	3	510	7	21	86 700	3 570	6,325	2,0262	1,368495
9	180	2	360	4	8	64 800	1 440	2,488	3,0232	4,569869
10	200	2	400	2	4	80 000	800	–5,18	14,368	103,2197
Σ	–	50	5 540	–	1 452	684 400	133 810	–	0,2548	534,5975
Σ / n		–	110,8	–	29,04	–	–	–	–	*SS*

Примечание. Здесь n = 50 — число ответов участников опроса.

Перейдем к расчету теоретической функции спроса:

$$D^*(p_i) = a^*(p - p_{\text{ср}}) + b^*.$$

Необходимо найти оценки параметров a^* и b^*:

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} D(p_i)p_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} D(p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - np_{ср.}^2} =$$

$$= \frac{133810 - \frac{1}{50}5540 \times 1452}{684400 - 50 \times 110{,}8^2} = -0{,}38362;$$

$$b^* = 29{,}04;\ d^* = b^* - a^* p_{\text{ср}} = 29{,}04 - (-0{,}38362) \times 110{,}8 = 71{,}54.$$

Таким образом, теоретическая функция спроса имеет вид:

$$D^*(p) = (-0{,}38362)p + 71{,}54.$$

Из табл. П.4.2 видно, что остаточная сумма квадратов SS = 534,6 (после округления). Исходя из этого, найдем оценку среднего квадратического отклонения:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{N}} = \sqrt{\frac{534{,}6}{50}} = 3{,}27.$$

Затем найдем доверительные границы для функции спроса:

$$D^*(p)_{\text{верхн./нижн.}} = (-0{,}38362)p + 71{,}54 \pm 1{,}96\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(p - p_{ср..})^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - np_{ср..}^2}} =$$

$$= (-0{,}38362)p + 71{,}54 \pm 1{,}96 \times 3{,}27\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(p - 110{,}8)^2}{684400 - 50 \times 110{,}8^2}} =$$

$$= (-0{,}38362)p_i + 71{,}54 \pm 6{,}41\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{(p - 110{,}8)^2}{70568}}.$$

Например, при $p = 120$

$$D^*(120)_{\text{верхн.}} = 25{,}51 + 0{,}9333 = 26{,}44;$$

$$D^*(120)_{\text{нижн.}} = 25{,}51 - 0{,}9333 = 24{,}57.$$

Таким образом, при цене 120 руб. товар купят 25–26 человек.

Возьмем теперь другую цену, например 165 руб., тогда

$$D^*(165)_{\text{верхн.}} = (-0{,}38362)165 + 71{,}54 + 6{,}41\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{(165 - 110{,}8)^2}{70568}} =$$
$$= 8{,}2427 + 1{,}5913 = 9{,}83;$$

$$D^*(165)_{\text{нижн.}} = 8{,}2427 - 1{,}5913 = 6{,}65$$

Итак, при цене товара 165 руб. его купят от 7 до 10 человек.

Теперь перейдем к расчету оптимальной цены при различных уровнях издержек p_0. Для этого мы должны максимизировать прибыль:

$$(p - p_0)D^*(p) = (p - p_0)(a^*p + d^*).$$

Продифференцируем это выражение по p и приравняем к 0 производную:

$$\frac{d}{dp}[a^* p^2 - a^* pp_0 + d^* p - d^* p_0] = 0;$$

$$2a^*p_{\text{опт.}} - a^*p_0 + d^* = 0;$$

$$p_{\text{опт.}} = \frac{a^* p_0 - d^*}{2a^*} = \frac{p_0}{2} - \frac{d^*}{2a^*}.$$

Поскольку $a^* = -0{,}38362$, а $d^* = 71{,}54$, то

$$p_{\text{опт.}} = \frac{p_0}{2} - \frac{71{,}54}{2(-0{,}38362)} = \frac{p_0}{2} + 93{,}24.$$

Как видно из последней формулы, при возрастании издержек оптимальная розничная цена также возрастает, но вдвое медленнее.

Сравним (табл. П.4.3) оптимальные цены, найденные с помощью метода наименьших квадратов ($p_{опт.2}$) и рассчитанные ранее с помощью первого метода ($p_{опт.1}$).

Таблица П.4.3

Сравнение методов расчета оптимальной цены

p_0	$p_{опт.2}$	$p_{опт.1}$
10	98,24	100
30	108,24	100
50	118,24	100
70	128,24	100
100	143,24	150
120	153,24	150

Проанализируем результаты, представленные в табл. П.4.2 и П.4.3.

Согласно табл. П.4.2, при расчете восстановленной функции $D^*(p)$ при $p = 200$ получаем отрицательную величину (–5,18), что не имеет смысла, так как спрос не может быть отрицательным. Рассмотрим ситуацию подробнее. Функция спроса убывает, коэффициент a^* отрицателен, поэтому рано или поздно прямая уйдет в отрицательную область. Это значит, что приближение функции спроса линейной зависимостью может быть корректно лишь на некотором отрезке, а не на всей прямой. Выясним, при какой цене спрос достигает 0:

$$D^*(p) = (-0{,}38362)p + 71{,}54 = 0;$$

$$p = \frac{71{,}54}{0{,}38362} = 186{,}5.$$

То есть корректное приближение функции спроса линейной зависимостью может быть при цене p меньшей, чем 186,5 руб.

Общепринятых простых методов, позволяющих избежать отрицательных оценок функции спроса, нет. Если получаем отрицательные величины, то должны указать область, в которой линейная зависимость дает корректную оценку, что и сделали выше, когда $D^*(p)$ приравняли к 0.

Рассмотрим теперь табл. П.4.3. Здесь видим разницу между расчетной оптимальной ценой $p_{опт.2}$, полученной с помощью метода наименьших квадратов, и расчетной ценой $p_{опт.1}$, найденной исходя только из данных опроса. Это связано с тем, что потребитель всегда склонен к круглым числам (например, большинство назовет 100 руб., а не 102 руб. 27 коп.). Мы же при применении метода наименьших квадратов ищем максимум не только среди названных опрощенными значений, а по более обширному множеству.

П.4.3. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

Можно построить таблицу (метода наименьших квадратов) и провести все расчеты и без указания частот цен, т. е. чисел, показывающих, сколько раз названа та или иная цена. При таком подходе необходимо все данные ввести в таблицу в порядке неубывания, т. е. все 50 значений, а далее произвести расчеты аналогично предыдущему примеру (табл. П.4.4).

На основе результатов, приведенных в табл. П.4.4, получаем оценки:

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} D(p_i)p_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} D(p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - np_{ср.}^2} = \frac{133810 - \frac{1}{50}5540 \times 1452}{684400 - 50 \times 110{,}8^2} = -0{,}38362431;$$

$$b^* = 29{,}04;$$

$$d^* = b^* - a^* p_{ср} = 29{,}04 - (-0{,}383624) \times 110{,}8 = 71{,}54.$$

Оценка теоретической функции спроса имеет вид:

$$D^*(p) = -0{,}383624^* p + 71{,}54.$$

Оценка среднеквадратического отклонения такова:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}} = \sqrt{\frac{540{,}16}{50}} = 3{,}29.$$

Таблица П.4.4

Альтернативный метод расчета оценок параметров

i	p_i	$D(p_i)$	$D(p_i)p_i$	$(p_i)^2$	$a^*(p_i)$	$D^*(p_i)$	$D(p_i) - D^*(p_i)$	$[D(p_i) - D^*(p_i)]^2$
1	50	50	2 500	2 500	–19,1812153	52,3587847	–2,35878472	5,56386535
2	50	50	2 500	2 500	19,1812153	52,3587847	–2,3587847	5,56386526
3	60	48	2 880	3 600	–23,0174583	48,5225417	–0,52254166	0,27304979
4	60	48	2 880	3 600	23,0174583	48,5225417	–0,52254166	0,27304979
5	75	46	3 450	5 625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
6	75	46	3 450	5 625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
7	75	46	3 450	5 625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
8	75	46	3 450	5 625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
9	75	46	3 450	5 625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
10	75	46	3 450	5 625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
11	75	46	3 450	5 625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
12	75	46	3 450	5 625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
13	90	38	3 420	8 100	–34,5261875	37,0138125	0,986187507	0,9725658
14	90	38	3 420	8 100	–34,5261875	37,0138125	0,986187507	0,9725658
15	90	38	3 420	8 100	–34,5261875	37,0138125	0,986187507	0,9725658
16	90	38	3 420	8 100	–34,5261875	37,0138125	0,986187507	0,9725658
17	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
18	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203

i	p_i	$D(p_i)$	$D(p_i)p_i$	$(p_i)^2$	$a^*(p_i)$	$D^*(p_i)$	$D(p_i) - D^*(p_i)$	$[D(p_i) - D^*(p_i)]^2$
19	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
20	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
21	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
22	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
23	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
24	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
25	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
26	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
27	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
28	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
29	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
30	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
31	100	34	3 400	10 000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
32	120	19	2 280	14 400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
33	120	19	2 280	14 400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
34	120	19	2 280	14 400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
35	120	19	2 280	14 400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
36	120	19	2 280	14 400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
37	120	19	2 280	14 400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
38	120	19	2 280	14 400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
39	150	12	1 800	22 500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991
40	150	12	1 800	22 500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991

i	p_i	$D(p_i)$	$D(p_i)p_i$	$(p_i)^2$	$a^*(p_i)$	$D^*(p_i)$	$D(p_i) - D^*(p_i)$	$[D(p_i) - D^*(p_i)]^2$
41	150	12	1 800	22 500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991
42	150	12	1 800	22 500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991
43	150	12	1 800	22 500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991
44	170	7	1 190	28 900	–65,216132	6,32386804	0,676131958	0,45715442
45	170	7	1 190	28 900	–65,216132	6,32386804	0,676131958	0,45715442
46	170	7	1 190	28 900	–65,216132	6,32386804	0,676131958	0,45715442
47	180	4	720	32 400	–69,052375	2,48762499	1,512375014	2,28727818
48	180	4	720	32 400	–69,052375	2,48762499	1,512375014	2,28727818
49	200	2	400	40 000	–76,7248611	–5,18486113	7,184861127	51,6222294
50	200	2	400	40 000	–76,7248611	–5,18486113	7,184861127	51,6222294
Σ	5 540	1 452	133 810	684 400	–	–	0,278653232	540,161666
Σ / 50	110,8	29,04	–	–	–	–	–	–

Далее, доверительные границы функции спроса имеют вид:

$$D^{*}(p)_{\text{верхн./нижн.}} = (-0{,}383624) + 71{,}54 \pm$$

$$\pm 1{,}96 \times 3{,}29\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{(p-110{,}8)^2}{684400-50\times 110{,}8^2}} =$$

$$= (-0{,}383624)p + 71{,}54 \pm 6{,}45\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{(p-110{,}8)^2}{70568}}.$$

Например, при $p = 120$

$$D^{*}(120)_{\text{верхн.}} = 25{,}50 + 0{,}9391 = 26{,}44;$$

$$D^{*}(120)_{\text{нижн.}} = 25{,}50 - 0{,}9391 = 24{,}56.$$

Таким образом, при цене 120 руб. товар купят 25–26 человек.

Если сравним значения *SS* в табл. П.4.2 и П.4.4, то заметим некоторую разницу. Это связано с тем, что в табл. П.4.2 значения были округлены до пятого знака после запятой, а в табл. П.4.4 округления не производились. В данном случае на конечный результат это не повлияло, так как данные сами по себе выражены довольно большими числами. Чем меньше значения данных, тем аккуратнее необходимо подходить к процессу округления и сохранять в расчетах достаточное количество значащих цифр.

П.4.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Как проводить анализ данных, если функция спроса не является линейной? Есть два подхода: параметрический и непараметрический.

В первом случае подбираем подходящее семейство функций и по результатам измерения (опроса) оцениваем параметры. Пример: степенное семейство:

$$D(p) = cp^{\alpha}.$$

При этом полезно преобразование переменных, приводящее задачу к линейному виду. В случае степенного семейства необходимо прологарифмировать обе части последнего равенства. Тогда получим:

$$\ln D(\text{p}) = \ln c + \alpha \ln p.$$

Затем обозначим:

$$y = \ln D(p),\ x = \ln p,\ b = \ln c.$$

Исходя из введенных обозначений, имеем линейное уравнение:

$$y = \alpha x + b.$$

Задача оценивания параметров степенной зависимости сведена к ранее рассмотренной задаче оценивания параметров линейной функции.

Поясним связь между оценками параметров в этих двух задачах. Будем использовать звездочки для обозначения оценок соответствующих параметров. Допустим, получили выражение:

$$y^* = -5x + 3,$$

тогда, подставляя выражение исходных величин через логарифмы, получим

$$\ln D^*(p) = -5\ln p + 3.$$

Далее проводим потенцирование выражения:

$$e^{\ln D^*(p)} = e^{-5\ln p + 3} = e^{-5\ln p}e^3 = e^3(e^{\ln p})^{-5} = 20{,}086p^{-5},$$

т. е.

$$D^*(p) = 20{,}086\, p^{-5}.$$

Аналогично линейному случаю определим оптимальную розничную цену $p_{\text{опт.}}$ при различных значениях издержек. А именно, решим задачу:

$$(p - p_0)D^*(p) \to \max_p,$$

в случае степенной зависимости:

$$(p - p_0)c^* p^{\alpha^*} \to \max_p.$$

Точка, в которой достигается максимум, не меняется при умножении максимизируемой функции на константу.

Поэтому переходим к задаче:

$$(p-p_0)p^{\alpha^*}=f(p)\to\max_p .$$

Для нахождения максимума функции продифференцируем ее и приравняем производную к 0:

$$\frac{df(p)}{dp}=0 .$$

Продифференцируем $f(p)$, используя правило дифференцирования произведения функций:

$$f(p)=p^{\alpha^*}+\alpha^*(p-p_0)p^{\alpha^*-1}=0 .$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$p^{\alpha^*-1}[p+\alpha^*(p-p_0)]=0 .$$

Сократим на ненулевой множитель (p^{α^*-1}):

$$p+\alpha^*(p-p_0)=0 .$$

Итак, необходимо решить линейное уравнение относительно неизвестного p:

$$p+\alpha^*p-\alpha^*p_0=0 .$$

Сгруппируем члены с p:

$$(1+\alpha^*)p=\alpha^*p_0 .$$

Получим при $\alpha^*\neq-1$:

$$p_{опт}=\frac{\alpha^*p_0}{1+\alpha^*} .$$

Эта формула дает оптимальное значение розничной цены при $1 + \alpha^* < 0$, поскольку α^* отрицательно (поскольку функция спроса — убывающая функция). Если $1 + \alpha^* > 0$, т. е. $-1 < \alpha^* < 0$, то согласно рассматриваемой формуле $p_{опт}$ отрицательно, следовательно, необходимое условие экстремума не выполнено, функция $f(p)$ не достигает своего максимума в области $\{x: x > 0\}$. Нетрудно показать, что при $-1 < \alpha^* < 0$

$$\lim_{p \to +\infty} f(p) = +\infty .$$

Непараметрический подход применяется тогда, когда подходящее семейство функций подобрать не удается. Тогда используют подходы на основе непараметрических оценок плотности распределения (см. разд. 7.8 настоящего учебника).

П.4.5. КРИТЕРИЙ ПРАВИЛЬНОСТИ РАСЧЕТОВ

Как самостоятельно проконтролировать правильность расчетов? *Приведем две простые рекомендации:*

1. Примерное чередование знаков «+» и «–» в столбцах $N_i[D(p_i) - D^*(p_i)]$ (табл. П.4.2) и $N_i[D(p_i) - D^*(p_i)]$ (табл. П.4.4). В частности, если идут сначала только «+», а затем только «–» или наоборот, следует искать ошибку.

2. Из теории метода наименьших квадратов известно условие точности вычислений: при отсутствии ошибок в вычислениях сумма исходных значений должна равняться сумме восстановленных (см. разд. 3.1 настоящего учебника). На основе этого условия сформулируем приблизительный критерий проверки правильности расчетов:

$$\left|\sum_1^n [X_i - X^*(t_i)]\right| \approx 0 ,$$

т. е. имеет место близость сумм X_i с суммами $X^*(t_i)$. Это в общем случае. А в рассмотренном выше примере — близость $D(p_i)$ с $D^*(p_i)$.

В соответствии с данными табл. П.4.2:

$$\left|\sum_1^n N_i [D(p_i) - D^*(p_i)]\right| = 0{,}2548,$$

в соответствии с данными табл. П.4.4:

$$|\sum_{1}^{n}[D(p_i)-D^*(p_i)]|=0{,}2786\,.$$

Такие значения в рассматриваемом случае вполне приемлемы.

П.4.6. СПОСОБЫ ОЦЕНИВАНИЯ ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАВИСИМОСТИ

Рассмотрим три способа оценивания точности восстановления зависимости.

В точках t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеем по два значения функции — исходное x_i и восстановленное $x^*(t_i)$. При оценивании функции спроса это $D(p_i)$ и $D^*(p_i)$ соответственно. В табл. П.4.2 и П.4.4 приведены значения $D(p_i)$, $D^*(p_i)$ и $D(p_i) - D^*(p_i)$. Третье из этих чисел — абсолютная погрешность. Полезно рассмотреть и относительную погрешность:

$$\left|\frac{D(p_i)-D^*(p_i)}{D(p_i)}\right|,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

По данным табл. П.4.4 это такие числа (приведены без повторений):

$$\frac{2{,}359}{50},\ \frac{0{,}523}{48},\frac{3{,}232}{46},\frac{0{,}986}{38},\frac{0{,}822}{34},\frac{6{,}505}{19},\frac{1{,}996}{12},\frac{0{,}676}{7},\frac{1{,}512}{4},\frac{7{,}185}{2}\,.$$

Ясно, что из этих 10 чисел самыми большими являются шестое:

$$\frac{6{,}505}{19}=0{,}342,$$

девятое:

$$\frac{1{,}512}{4}=0{,}378$$

и десятое:

$$\frac{7{,}185}{2}=3{,}592\,.$$

При этом десятое значение находится в области, для которой оценка спроса $D^*(p)$ отрицательна (т. е. при цене p = 200 руб.), а девятое — при цене p = 180 руб., т. е. очень близко к границе p = 186,5 руб. — перехода в отрицательную область. Таким образом, относительная погрешность не превосходит 0,342 (34,2 %) при $p \leq 170$ руб. Причем такая большая относительная погрешность, очевидно, связана с тем, что 30 % опрошенных (15 человек) назвали одну и ту же цену p = 100 руб. Если это значение p = 100 руб. исключить, то при остальных значениях цены относительная погрешность не превышает:

$$1{,}996 / 12 = 0{,}166 \ (16{,}6\ \%).$$

Мы рассмотрели один из наихудших вариантов, когда одна треть опрошенных назвали одну и ту же «круглую цифру» — 100. По многочисленным данным работ студентов можно утверждать, что такая ситуация встречается крайне редко.

О достигаемой точности восстановления функции свидетельствует также ширина доверительного интервала. Выше показано, что при p = 120

$$D^*(120)_{\text{верхн.}} - D^*(120)_{\text{нижн.}} = 2 \times 0{,}9391 = 1{,}878.$$

Относительная погрешность такова:

$$\left| \frac{D^*(120)_{верхн.} - D^*(120)_{нижн.}}{D^*(120)} \right| = \frac{1{,}878}{25{,}51} = 0{,}074 \ (7{,}4\ \%).$$

При p = 165

$$\left| \frac{D^*(165)_{верхн.} - D^*(165)_{нижн.}}{D^*(165)} \right| = \frac{2 \times 1{,}5916}{8{,}2427} = 0{,}386 \ (38{,}6\ \%).$$

Таким образом, точность оценивания уменьшается по мере удаления от $p_{\text{ср}}$, особенно при увеличении p. То есть при приближении к области отрицательности $D^*(p)$ точность оценивания уменьшается.

Чтобы еще одним способом выявить роль погрешностей в прогностической формуле, рассмотрим формальный предельный переход, когда $p \to \infty$, тогда значения: 71,54; 1/50; 110,8 в выражении (см. выше):

$$D^*(p)_{\text{верхн./нижн.}} = (-0{,}38362)p + 71{,}54 \pm 6{,}41 \sqrt{\frac{1}{50} + \frac{(p - 110{,}8)^2}{70568}}$$

становятся малыми по сравнению с остальными составляющими, следовательно, ими можно пренебречь. Получаем:

$$D^*(p)_{\text{верхн./нижн.}} = (-0{,}38362)p \pm \frac{6{,}41}{\sqrt{70568}}p = [(-0{,}38362) \pm 0{,}024]p.$$

Таким образом, относительная погрешность составляет:

$$\left| \frac{0{,}024*100}{-0{,}38362} \right| = 6{,}26\ \%.$$

Итак, типовые относительные погрешности составляют 6–16 %, в исключительных случаях достигают 34–38 %.

Как показывает практика, в социально-экономических исследованиях метод наименьших квадратов во многих случаях позволяет получить прогноз с точностью 10–15 %.

П.4.7. ЧАСТО ВОЗНИКАЮЩИЕ ВОПРОСЫ

Далее рассмотрим наиболее часто встречающиеся вопросы студентов в связи с изучением данной темы.

Доверительные интервалы. Доверительная вероятность γ — вероятность того, что доверительный интервал накроет действительное значение параметра, оцениваемого по выборочным данным.

В математических рассуждениях в прил. 4 в формулах для границ доверительного интервала используют множитель:

$$U(\gamma) = \Phi^{-1}((1 + \gamma) / 2).$$

Если $\gamma = 0{,}95$, то

$$\Phi^{-1}((1 + 0{,}95) / 2) = \Phi^{-1}(0{,}975) = 1{,}96 = U(\gamma).$$

Если $\gamma = 0{,}99$, то

$$\Phi^{-1}((1 + 0{,}90) / 2) = \Phi^{-1}(0{,}995) = 2{,}58 = U(\gamma).$$

См. таблицы функции, обратной к функции стандартного нормального распределения.

При $n \to \infty$ имеем асимптотическое сближение распределения $x^*(t)$ с нормальным распределением, а потому ширина асимптотического доверительного интервала равна:

$$2\,U(\gamma)\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t - t_{ср.})^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n t_{ср.}^2}}\,.$$

Если выбрано $\gamma = 0{,}95$, то это значит, что в 95 % случаев математическое ожидание точечного прогноза $x^*(t)$, т. е. значение $x(t)$, будет находиться внутри доверительного интервала и только в 5 % случаев — вне его. Другими словами, с вероятностью 0,95 доверительный интервал накроет оцениваемое значение $x(t)$. При $\gamma = 0{,}95$ имеем $U(\gamma) = 1{,}96$.

Если мы хотим, чтобы в 99 случаях из 100 истинное значение функции $x(t)$ (математическое ожидание точечного прогноза $x^*(t)$) попадало в рассматриваемый интервал со случайными границами, необходимо этот интервал расширить (при $\gamma = 0{,}99$ имеем $U(\gamma) = 2{,}58$). Но при этом уменьшается точность прогнозирования.

Поясним на примере. Пусть задача — прогнозирование погоды в Москве через год. Рассмотрим прогноз: температура будет от –50 °С до 70 °С. Увеличили ширину доверительного интервала до 140 °С, и можно утверждать, что этот прогноз сбудется с вероятностью $\gamma = 1$, т. е. надежность этого прогноза 100 %. Но точность этого прогноза невелика.

Если уменьшим γ, то доверительный интервал можно сузить, при этом точность прогноза увеличится. Например, значению $\gamma = 0{,}9$ соответствует $U(\gamma) = 1{,}64$.

Надежность и точность прогноза меняются в противоположных направлениях: при увеличении надежности точность падает, при уменьшении — растет. Выбор значения доверительной вероятности — это компромисс между требованием повышения надежности и требованием повышения точности.

На основе опыта конкретных научных и прикладных работ принято в социально-экономических исследованиях использовать $\gamma = 0{,}95$ и $U(\gamma) = 1{,}96$.

Рассмотрим наиболее распространенные ошибки студентов при расчетах интервального прогноза:

1. При расчете доверительного интервала берут вместо коэффициента $U(\gamma)$ величину γ и не умножают на σ^* — оценку среднего квадратичного откло-

нения погрешности измерения. Напомним, что необходимо использовать выражение:

$$\delta = U(\gamma)\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t - t_{ср.})^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{ср.}^2}}\,.$$

То есть вместо произведения $U(\gamma)\sigma^*$ ошибочно берут просто доверительную вероятность γ.

2. Проверкой правильности вычислений можно считать равенство значений знаменателя в формуле, задающей оценку a^*, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{ср.}^2\,,$$

и знаменателя под корнем при расчете доверительных интервалов — тоже:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{ср.}^2\,.$$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} (t^i - t_{ср.})^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{ср.}^2\,.$$

Доказательство. Справедливо тождество:

$$\sum_{i=1}^{n} (t^i - t_{ср.})^2 = \sum_{i=1}^{n} (t_i^2 - 2t_i t_{ср.} + t_{ср.}^2) = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2t_{ср.} \sum_{i=1}^{n} t_i + nt_{ср.}^2\,.$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = nt_{ср.}\,,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{ср.})^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2nt_{ср.}^2 + nt_{ср.}^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{ср.}^2\,,$$

что и следовало доказать.

Квантиль и квартиль. Иногда студенты путают термины «квантиль» и «квартиль».

Квантиль (слово мужского рода) порядка a, где a — число от 0 до 1, функции распределения $F(x)$ — это число $x(a)$, такое, что

$$F(x(a)) = a.$$

Например, $U(\gamma) = 1,96$ при $\gamma = 0,95$ — это квантиль порядка 0,975 функции стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

В общем случае

$$U(\gamma) = \Phi^{-1}((1 + \gamma) / 2)$$

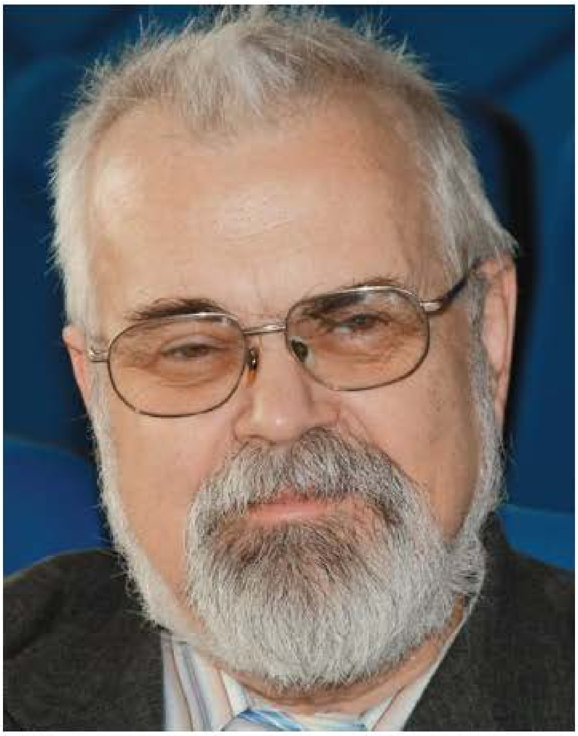
квантиль порядка $a = (1 + \gamma) / 2$ (см. выше) стандартного нормального распределения. При $\gamma = 0,95$ имеем

$$(1 + \gamma) / 2 = (1 + 0,95) / 2 = 0,975.$$

Термин «квартиль» (от «кварта» — одна четвертая часть) используют для обозначения квантиля порядка a, когда a кратно 1/4. Выделяют нижний квартиль при a =1/4 и верхний квартиль при a = 3/4. Квартиль, соответствующий a = 2/4 = 1/2, имеет собственное название — медиана.

В прил. 4 рассмотрен метод ценообразования на основе оценивания функции спроса. Связанным с ним проблемам, в том числе нерешенным вопросам математического моделирования, посвящена статья: *Орлов, А.И.* Метод ценообразования на основе оценивания функции спроса / А.И. Орлов // Научный журнал КубГАУ. — 2020. — № 158. — С. 250–267.

ОБ АВТОРЕ



Орлов Александр Иванович, 1949 г.р., профессор (1995 г. — по кафедре математической экономики), доктор экономических наук (2009 г. — по математическим и инструментальным методам экономики), доктор технических наук (1992 г. — по применению математических методов), кандидат физико-математических наук (1976 г. — по теории вероятностей и математической статистике).

Профессор кафедры экономики и организации производства факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, руководитель секции «Организационно-экономическое моделирование, эконометрика и статистика», директор Института высоких статистических технологий и эконометрики, заведующий Научно-исследовательской лабораторией «Экономико-математические методы в контроллинге».

Член редколлегий и редакционных советов журналов «Контроллинг», «Инновации в менеджменте», «Экономика космоса», «Заводская лаборатория. Диагностика материалов», Политематического сетевого электронного научного журнала Кубанского государственного аграрного университета (Научного журнала КубГАУ), Biocosmology — neo-Aristotelism, «Социология: методология, методы, математическое моделирование», «Управление большими системами: сборник трудов». Главный редактор электронного еженедельника «Эконометрика».

Академик Международной академии исследований будущего, Российской Академии статистических методов. Вице-президент Всесоюзной статистической ассоциации, президент Российской ассоциации статистических методов.

Основные направления научной и педагогической деятельности: теория принятия решений, прикладная статистика и другие статистические методы, эконометрика, экономико-математические методы, экспертные оценки, менеджмент, экономика предприятия, макроэкономика, экология.

Автор более 1 250 научных и методических публикаций в России и за рубежом, в том числе более 60 книг. Один из наиболее цитируемых математиков и экономистов России.

Более подробная информация приведена на сайте «Википедия», в статье «Орлов, Александр Иванович (ученый)».

Основные книги профессора А.И. Орлова

1. *Орлов, А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях / А.И. Орлов. — Москва : Наука,1979. — 296 с.

2. *Орлов, А.И.* Задачи оптимизации и нечеткие переменные / А.И. Орлов. — Москва : Знание, 1980. — 64 с.

3. *Орлов, А.И.* Анализ нечисловой информации (препринт) / А.И. Орлов, Ю.Н. Тюрин, Б.Г. Литвак [и др.]. – Москва : Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981. — 80 с.

4. *Гусев, В.А.* Внеклассная работа по математике в 6–8 классах / В.А. Гусев, А.И. Орлов, А.Л. Розенталь. — Москва : Просвещение, 1977. — 288 с. (2-е изд., испр. и доп. — Москва : Просвещение, 1984.). Переводы на казахский, литовский, молдавский, таджикский языки.

5. *Орлов, А.И.* Пакет программ анализа данных «ППАНД» : учебное пособие / А.И. Орлов, И.Л. Легостаева, О.М. Черномордик. Москва : Сотрудничающий центр Всемирной организации здравоохранения по профессиональной гигиене, 1990. — 93 с.

6. *Орлов, А.И.* Математическое моделирование процессов налогообложения (подходы к проблеме) / А.И. Орлов, В.Г. Кольцов, Н.Ю. Иванова. — Москва : Изд-во ЦЭО Министерства общего и профессионального образования РФ, 1997. — 232 с.

7. *Орлов, А.И.* Экология : учебное пособие / А.И. Орлов, С.А. Боголюбов. — Москва : Знание, 1999. — 288 с.

8. *Орлов, А.И.* Менеджмент : учебное пособие / А.И. Орлов, С.А. Боголюбов, Ж.В. Прокофьева [и др.]. — Москва : Знание, 2000. — 288 с.

9. *Орлов, А.И.* Управление качеством окружающей среды : учебник / А.И. Орлов, С.А. Боголюбов. — Т. 1. — Москва : Изд-во МГИЭМ (ТУ), 2000. — 283 с.

10. *Орлов, А.И.* Системы экологического управления : учебник / А.И. Орлов, С.А. Боголюбов. — Москва : Европейский центр по качеству, 2002. — 224 с.

11. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебник. — Москва : Экзамен, 2002 (1-е изд.), 2003 (2-е изд.), 2004 (3-е изд.). — 576 с.

12. *Орлов, А.И.* Управление промышленной и экологической безопасностью : учебное пособие / А.И. Орлов, В.Н. Федосеев, В.Г. Ларионов, А.Ф. Козьяков. — Москва : Изд-во УРАО, 2002 (1-е изд.), 2003 (2-е изд.). — 220 с.

13. *Орлов, А.И.* Менеджмент в техносфере : учебное пособие / А.И. Орлов, В.Н. Федосеев. — Москва : Академия, 2003. — 384 с.

14. *Орлов, А.И.* Теория и методы разработки управленческих решений : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : МарТ ; Ростов-на-Дону : МарТ, 2005. — 496 с.

15. *Орлов, А.И.* Прикладная статистика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Экзамен, 2006. — 672 с.

16. *Орлов, А.И.* Теория принятия решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Экзамен, 2006. — 576 с.

17. *Орлов, А.И.* Проектирование интегрированных производственно-корпоративных структур: эффективность, организация, управление / А.И. Орлов, С.Н. Анисимов, А.А. Колобов [и др.] ; под редакцией А.А. Колобова, А.И. Орлова. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 728 с.

18. *Колобов, А.А.* Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость / А.А. Колобов, И.Н. Омельченко, А.И. Орлов. — Москва : Экзамен, 2008. — 621 с.

19. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование : учебник. В 3 частях. Ч. 1. Нечисловая статистика / А.И. Орлов. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 542 с.

20. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование : учебник. В 3 частях. Ч. 2. Экспертные оценки / А.И. Орлов. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 486 с.

21. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование : учебник. В 3 частях. Ч. 3. Статистические методы анализа данных / А.И. Орлов. — Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. — 624 с.

22. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебник для вузов / А.И. Орлов. — 4-е изд., доп. и перераб. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2009. — 572 с.

23. *Орлов, А.И.* Менеджмент: организационно-экономическое моделирование : учебное пособие для вузов / А.И. Орлов. — Ростов-на-Дону : Феникс, 2009. — 475 с.

24. *Орлов, А.И.* Вероятность и прикладная статистика: основные факты : справочник / А.И. Орлов. — Москва : КноРус, 2010. — 192 с.

25. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : КноРус, 2011. — 568 с.

26. *Орлов, А.И.* Устойчивые экономико-математические методы и модели. Разработка и развитие устойчивых экономико-математических методов и моделей для модернизации управления предприятиями / А.И. Орлов. — Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2011. — 436 с.

27. *Орлов, А.И.* Проблемы управления экологической безопасностью. Итоги двадцати лет научных исследований и преподавания / А.И. Орлов. — Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2012. — 344 с.

28. *Орлов, А.И.* Системная нечеткая интервальная математика : монография / А.И. Орлов, Е.В. Луценко. — Краснодар : Изд-во КубГАУ. 2014. — 600 с.

29. *Орлов, А.И.* Перспективные математические и инструментальные методы контроллинга : монография / А.И. Орлов, Е.В. Луценко, В.И. Лойко ; под научной редакцией профессора С.Г. Фалько. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2015. — 600 с.

30. *Орлов, А.И.* Организационно-экономическое, математическое и программное обеспечение контроллинга, инноваций и менеджмента : монография / А.И. Орлов, Е.В. Луценко, В.И. Лойко ; под общей редакцией С.Г. Фалько. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2016. — 600 с.

31. *Лойко, В.И.* Современные подходы в наукометрии : монография / В.И. Лойко, Е.В. Луценко, А.И. Орлов ; под научной редакцией профессора С.Г. Фалько. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2017. — 532 с.

32. *Орлов, А.И.* Методы принятия управленческих решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : КНОРУС, 2018. — 286 с.

33. *Лойко, В.И.* Современная цифровая экономика / В.И. Лойко, Е.В. Луценко, А.И. Орлов. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2018. — 508 с.

34. *Лойко, В.И.* Высокие статистические технологии и системно-когнитивное моделирование в экологии : монография / В.И. Лойко, Е.В. Луценко, А.И. Орлов. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2019. — 258 с.

35. *Орлов, А.И.* Эконометрика : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Саратов : ИНТУИТ : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 676 с.

36. *Агаларов, З.С.* Эконометрика : учебник / З.С. Агаларов, А.И. Орлов. — Москва : Дашков и Ко, 2021. — 380 с.

37. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: нечисловая статистика : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 446 с.

38. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: статистические методы анализа данных : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 843 с.

39. *Орлов, А.И.* Искусственный интеллект: экспертные оценки : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 436 с.

40. *Орлов, А.И.* Основы теории принятия решений : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 66 с.

41. *Орлов, А.И.* Прикладной статистический анализ : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 812 с.

42. *Орлов, А.И.* Проблемы управления экологической безопасностью : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 224 с.

43. *Орлов, А.И.* Теория принятия решений : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 826 с.

44. *Орлов, А.И.* Устойчивые экономико-математические методы и модели : монография / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 337 с.

45. *Орлов, А.И.* Экспертные оценки : учебное пособие / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. — 57 с.

46. *Орлов, А.И.* Анализ данных, информации и знаний в системной нечеткой интервальной математике : научная монография / А.И. Орлов, Е.В. Луценко. — Краснодар : Изд-во КубГАУ, 2022. – 405 с.

48. *Агаларов, З.С.* Эконометрика : учебник / З.С. Агаларов, А.И. Орлов. — 2-е изд. — Москва : Дашков и Ко, 2023. — 380 с.

49. *Орлов, А.И.* Менеджмент: методы и инструменты : учебное пособие для СПО / А.И. Орлов. — Саратов : Профобразование, 2023. — 383 с.

50. *Орлов, А.И.* Методы и инструменты менеджмента : учебник / А.И. Орлов. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2023. — 403 с.