Математические методы исследования
Mathematical methods of investigation

DOI: https://doi.org/10.26896/1028-6861-2024-90-5-69-78

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКОСТИ (обобщающая статья)

© **Александр Иванович Орлов**

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; e-mail: prof-orlov@mail. ru

Статья поступила 21 июля 2023 г. Поступила после доработки 10 августа 2023 г. Принята к публикации 31 августа 2023 г.

Теория нечеткости — важная область современной теоретической и прикладной математики. Методология теории нечеткости — это учение об организации деятельности в области разработки и применения научных результатов этой теории. В работе рассмотрены некоторые методологические вопросы теории нечеткости, т.е. отдельные составляющие методологии в данной области. Теория нечеткости — наука о прагматических (размытых) числах и множествах. Древнегреческий философ Евбулид показал, что понятия «Куча» и «Лысый» нельзя описать с помощью натуральных чисел. Определять нечеткое множество с помощью функции принадлежности предложил Э. Борель. В 1965 г. Л. А. Заде дал основные определения алгебры нечетких множеств — ввел операции пересечения, произведения, объединения, суммы, отрицания нечетких множеств. Главное, он продемонстрировал возможности расширения («удвоения») математики. Другими словами, заменяя используемые в математике числа и множества на их нечеткие аналоги, получаем новые математические постановки. В статистике нечисловых данных развиты методы статистического анализа нечетких множеств. Часто используют конкретные виды функций принадлежности — интервальные и треугольные нечеткие числа. Теория нечетких множеств в определенном смысле сводится к теории случайных множеств. Мы мыслим нечетко и только поэтому понимаем друг друга. Парадокс теории нечеткости — нельзя последовательно реализовать тезис «все в мире нечетко». У обычных нечетких множеств аргумент и значения функции принадлежности являются четкими. Если их заменить на нечеткие аналоги, то для их описания понадобятся свои четкие аргументы и функции принадлежности, и так — до бесконечности. Системная нечеткая интервальная математика исходит из необходимости учета размытости исходных данных и предпосылок математической модели. Одним из вариантов ее практической реализации является автоматизированный системно-когнитивный анализ и интеллектуальная система «Эйдос».

Ключевые слова: математические методы исследования; теория нечетких множеств; методология; парадокс «Куча»; функция принадлежности; интервальная математика; треугольные нечеткие числа; случайные множества; парадокс теории нечеткости; системная нечеткая интервальная математика.

METHODOLOGICAL ISSUES OF THE FUZZY SET THEORY (generalizing article)

© **Alexander I. Orlov**

Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-ya Baumanskaya ul., Moscow, 105005, Russia; e-mail: prof-orlov@mail.ru

Received July 21, 2023. Revised August 10, 2023. Accepted August 31, 2023.

The theory of fuzziness is an important area of modern theoretical and applied mathematics. The methodology of the theory of fuzziness is a doctrine of organizing activities in the field of development and application of the scientific results of this theory. We discuss some methodological issues of the theory of fuzziness, i.e., individual components of the methodology in the area under consideration. The theory of fuzziness is a science of pragmatic (fuzzy) numbers and sets. The ancient Greek philosopher Eubulides showed that the concepts “Heap” and “Bald” cannot be described using natural numbers. E. Borel proposed to define a fuzzy set using a membership function. A fundamentally important step was taken by L. A. Zadeh in 1965. He gave the basic definitions of the algebra of fuzzy sets and introduced the operations of intersection, product, union, sum, negation of fuzzy sets. The main thing he did was demonstration of the possibilities of expanding (“doubling”) mathematics: by replacing the numbers and sets used in mathematics with their fuzzy counterparts, we obtain new mathematical formulations. In the statistics of non-numerical data, methods of statistical analysis of fuzzy sets have been developed. Interval and triangular fuzzy numbers are often used specific types of membership functions. The theory of fuzzy sets in a certain sense is reduced to the theory of random sets. We think fuzzy and that is the only reason we understand each other. The paradox of the fuzzy theory is that it is impossible to consistently implement the thesis “Everything in the world is fuzzy.” For ordinary fuzzy sets, the argument and values of the membership function are crisp. If they are replaced by fuzzy analogues, then their description will require their own clear arguments and membership functions, and so on ad infinitum. System fuzzy interval mathematics proceeds from the need to take into account the fuzziness of the initial data and the prerequisites of the mathematical model. One of the options for its practical implementation is an automated system-cognitive analysis and the intellectual system “Eidos.”

Keywords: mathematical research methods; theory of fuzzy sets; methodology; “Heap” paradox; membership function; interval mathematics; triangular fuzzy numbers; random sets; fuzzy theory paradox; system fuzzy interval mathematics.

Введение

Теория нечеткости — область современной теоретической и прикладной математики. Ряд математических методов исследования, рассмотренных в нашем журнале, основан на ее применении [1 – 6].

Обсуждения заслуживают не только отдельные модели, методы, алгоритмы, но и вся теория нечеткости, включая ее становление и развитие. Это обусловлено, в частности, тем, что распространены неадекватные представления об этой области математики. Мы включаем теорию нечеткости в системную нечеткую интервальную математику [5]. Нечеткие множества — объекты нечисловой природы, которые изучает статистика объектов нечисловой природы (статистики нечисловых данных, нечисловой статистики). Развитие и содержание этой научной области неоднократно обсуждалось в нашем журнале.

Методология — учение об организации деятельности [7, с. 20], следовательно, методология теории нечеткости — это учение об организации деятельности в области разработки и применения научных результатов этой теории. В данной работе рассмотрены некоторые методологические вопросы теории нечеткости, т.е. отдельные составляющие методологии в рассматриваемой области. Основные понятия теории нечетких множеств предполагаются известными. Они приведены во многих публикациях, в том числе в учебниках автора по прикладной статистике, теории принятия решений, эконометрике, организационно-экономическому моделированию, в монографиях по системной нечеткой интервальной математике. Однако рассматриваемые ниже методологические вопросы ранее подробно не обсуждались.

Теория нечеткости — наука о прагматических числах и множествах

Кратко говоря, классическая математика — это наука о числах и фигурах (множествах) [8]. Однако свойства используемых в практической жизни чисел (их называют прагматическими) довольно часто отличаются от свойств математических чисел. Например, прагматические числа имеют лишь несколько значащих цифр, их число конечно, в то время как множество действительных чисел имеет мощность континуума. Из этого не следует, что необходимо отказаться от интеллектуальных инструментов, разработанных математиками за тысячелетия. Целесообразно полагать, что прагматические числа — это математические числа с погрешностями. Границы множеств, используемых на практике, также являются размытыми. Именно такой подход развивается в системной нечеткой интервальной математике (см. [5] и ссылки на монографии в списке Литературы этой публикации). В частности, из сказанного ясна необходимость изучения устойчивости выводов, полученных в математических моделях, по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей.

Теория нечеткости дает возможность разработать математические инструменты для работы с прагматическими числами и множествами. Часто за отправную точку берут работу Л. А. Заде [9], в которой появился термин fuzzy set. В отечественной традиции set переводится как множество, а вот для fuzzy имеется спектр терминов — нечеткий, размытый, расплывчатый, туманный, пушистый. Будем переводить fuzzy set как «нечеткое множество», а соответствующую область математики называть «теорией нечетких множеств» или «теорией нечеткости».

Основоположник теории нечеткости Л. А. Заде (1921 – 2017 гг.) рассматривал теорию нечетких множеств прежде всего как аппарат анализа и моделирования гуманистических систем, т.е. систем, в которых участвует человек. Его подход опирается на предпосылку о том, что «элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов, для которых переход от «принадлежности» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен» [10]. Теория нечеткости оказалась полезной также для анализа и моделирования технических систем [1 – 3], для оценки риска [6], в экономике [4] и менеджменте [11], т.е. практически во всех областях науки и практики. Этой теории посвящены десятки тысяч исследований, многочисленные журналы. В нашей стране издается журнал «Нечеткие системы и мягкие вычисления».

О развитии теории нечеткости

Первая монография отечественного автора по теории нечеткости — книга [12], выпущенная в 1980 г. В ней подведены итоги работ 1970-х годов, в частности, установлено, что истоки теории нечеткости относятся ко временам Древней Греции.

Философ Евбулид (IV век до н.э.) обсуждал два парадокса (апории, софизма) — «Куча» и «Лысый». Первый из них: «*Одно зерно — не куча. Если к зерну прибавлять по зернышку, с какого момента появится куча?*». Второй: «*Потеряв один волос, еще не становишься лысым; потеряв второй волос — тоже; когда же начинается лысина?*» [13]. Эти парадоксы близки к известным апориям Зенона Элейского. Их анализ проводили многие философы, в том числе Гегель [14]. Эти парадоксы показывают, что понятия «Куча» и «Лысый» нельзя описать с помощью натуральных чисел. Нельзя указать такое натуральное число N, что совокупность n зерен при $n < N$ не является кучей, а при $n \geq N$ уже признается кучей. Очевидно, граница между «Кучей» и «Не кучей» является размытой. Другими словами, для описания лингвистической переменной «Куча», принимающей два значения — «Это куча» и «Это не куча», надо применять не теорию натуральных чисел, а более сложную математическую конструкцию. В настоящее время такой конструкцией является теория нечетких множеств. В работах 1970-х годов мы использовали парадокс «Куча» как одно из обоснований необходимости развития и использования теории нечетких множеств (подробности и ссылки см. в [12]). Позже те же аргументы приводили и другие авторы (см., например, монографию [15]).

Описывать нечеткое множество с помощью функции принадлежности предложил французский математик Э. Борель (1871 – 1956 гг.), который вместе с Р. Бэром и А. Лебегом был одним из основоположников теории меры и ее приложений в теории вероятностей. В монографии «Вероятность и достоверность» [16], выпущенной на французском языке в 1956 г., т.е. за девять лет до появления основополагающей работы Л. А. Заде [9], Борель предложил описывать понятие «Куча» с помощью функции $f(n)$ (от натурального аргумента n), определенной как доля лиц, называющих совокупность из n зерен «Кучей», среди всех говорящих на французском языке (в русском переводе — на русском). Таким образом, Э. Борель не только ввел новый математический инструмент для описания лингвистической переменной, но и указал метод оценки функции принадлежности по экспериментальным данным (по результатам опроса) [12]. Методика применения этого метода оценки раскрыта в наших учебниках. Например, в маркетинге при изучении рынка используют понятие «богатый». Для описания этой лингвистической переменной, как и лингвистической переменной «Куча», целесообразно использовать функцию принадлежности, оценку которой можно получить, задавая респондентам серию вопросов типа «Считаете ли Вы, что человек, имеющий ежемесячный доход N рублей, является богатым?». Аналогичным образом можно описать различные лингвистические переменные, значениями которых являются слова естественного языка, например, «малый – средний – большой». Использование лингвистических переменных и соответствующих функций принадлежности для оценки рисков рассмотрено в [6].

Принципиально важный шаг в развитии теории нечеткости сделан Л. А. Заде в 1965 г. [9]. Он дал основные определения алгебры нечетких множеств — ввел операции пересечения, произведения, объединения, суммы, отрицания нечетких множеств. Сразу возникли математические задачи — дана формула алгебры (обычных) множеств (например, один из законов де Моргана), верна ли она в теории нечеткости? Важно, что аналогами операции пересечения в алгебре (обычных) множеств в теории нечеткости являются две операции — пересечения и произведения. В зависимости от того, какой из этих аналогов используется, формула алгебры множеств в теории нечеткости может оказаться как верной, так и неверной.

Главное, Л. А. Заде продемонстрировал важные для теории и практики возможности расширения математики. Так, заменяя используемые в математике числа и множества на их нечеткие аналоги, получаем новые математические постановки (выше этот подход рассмотрен для алгебры множеств). Новые постановки можно изучать теоретически, а можно применять при решении разнообразных практических задач. Для реализации этой научной программы развернулось движение исследователей нечеткости, признанным вождем которого стал Л. А. Заде. Он сам активно проводил большую научно-организационную работу, выступая на конференциях, привлекая и стимулируя новых исследователей проблем нечеткости. Как уже отмечалось, за прошедшие с 1965 г. десятилетия теория нечеткости стала развитой областью теоретической и прикладной математики.

Одним из разделов математики является математическая логика, посвященная формализации и математическому изучению положений логики — науки о формах и законах мысли. Как известно, Аристотель (384 – 322 гг. до н.э.) является подлинным создателем логики как науки. Началом математической логики считают работы Джорджа Буля (1815 – 1864 гг.). Его именем назван раздел математической логики — булева алгебра (алгебра логики). В ней рассмотрены правила установления истинности или ложности сложных высказываний на основе истинности или ложности простых высказываний, на основе которых строятся сложные. Булева алгебра соответствует алгебре множеств. Например, множество истинности выказывания «A и B» является пересечением множеств истинности высказываний A и B, а множество истинности выказывания «A или B» является объединением множеств истинности высказываний A и B.

В классической логике высказывание является либо истинным, либо ложным, т.е. его истинность принимает только два значения. Однако вполне естественно внести в рассмотрение теорию, в которой истинность высказывания принимает несколько значений (например, наверняка верно – скорее всего – возможно – маловероятно – наверняка ложно). Значений истинности может быть и бесконечно много. Таким образом, переходим к нечеткой логике, которая изучалась с 1920-х годов как бесконечнозначная логика, в частности, Я. Лукасевичем (1878 – 1956 гг.) и А. Тарским (1901 – 1983 гг.). Парадоксы Евбулида используются как одно из обоснований необходимости рассмотрения нечеткой логики.

Вполне естественно, что основоположник современной теории нечеткости Л. А. Заде в 1973 году обратился и к теории нечеткой логики. Это привело к неожиданным результатам — некоторые его последователи стали называть нечеткой логикой ВСЮ теорию нечеткости. Это явно нелепо, поскольку логика — это нормативная наука о законах, формах и приемах интеллектуальной деятельности. Она относится к мышлению человека, в то время как теория нечеткости может быть использована в любой области науки и отрасли народного хозяйства. Однако использование термина «нечеткая логика» (вместо «теория нечеткости» или «теория нечетких множеств») широко распространено, особенно среди тех авторов, которые недостаточно знакомы с историей теории нечеткости.

Статистический анализ нечетких данных

В системной нечеткой интервальной математике и центральной области статистики нечисловых данных — статистике в пространствах произвольной природы развиты методы анализа нечетких данных.

О том, как оценивать функцию принадлежности по выборочным данным, рассказано выше. С аналогичных постановок в теории толерантностей (рефлексивных симметричных бинарных отношений) начались наши работы по теории нечеткости (1975 г.). Оценивание нечеткой толерантности проводили на основе анализа выборки, элементами которой являлись независимые одинаково распределенные случайные толерантности, распределенные в соответствии с оцениваемой нечеткой толерантностью.

Статистика нечетких данных использует расстояния (метрики) в пространствах нечетких множеств. Поскольку нечеткие множества — частный вид объектов нечисловой природы, то при обработке выборки, элементами которой являются нечеткие множества, могут быть использованы различные методы анализа статистических данных произвольной природы — расчет средних, непараметрических оценок плотности, восстановление зависимостей (регрессионный анализ), построение диагностических правил и т.д.

Часто используют функции принадлежности конкретного вида. Приведем примеры. Простейшая функция принадлежности принимает значение 1 на некотором интервале и значение 0 — вне его. Нечеткое число описывается интервалом. Приходим к интервальной математике, в которой вместо чисел используются интервалы. Эту область математики называют также интервальным анализом, интервальной арифметикой или интервальными вычислениями. Начало развития интервальной математики, как и теории нечеткости, относится ко временам Древней Греции. Еще Архимед в III веке до н.э. рассчитал нижнюю и верхнюю границы для числа «пи». Во второй половине XX века потребности компьютерных вычислений вызвали бурное развитие интервального анализа практически одновременно и независимо в Советском Союзе, США, Японии и Польше. Статистика нечетких данных включает в себя статистику интервальных данных. Она подробно изложена в наших учебниках по прикладной статистике и ее центральной части — нечисловой статистике, по теории принятия решений, в монографиях по системной нечеткой интервальной математике. Работы по статистике интервальных данных постоянно публикуются в нашем журнале (см., например, [17 – 25]).

В статистике интервальных данных значения функции принадлежности при изменении аргумента меняются скачком, с 0 до 1 и обратно — с 1 до 0. Однако, хотя числовые данные являются размытыми, требование Л. А. Заде «переход от «принадлежности» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен» не выполнено. Поэтому для задания нечетких чисел естественно использовать непрерывные функции принадлежности. Среди различных видов нечетких чисел выделяются треугольные нечеткие числа. Они задаются тремя действительными числами: $a < b < c$. Функция принадлежности равна 0 при значении аргумента $x < a$, линейно возрастает от 0 до 1 при $a \le x < b$, линейно убывает от 1 до 0 при $b \le x < c$ и равна 0 при $c \le x$. Для треугольных нечетких чисел основная часть графика функции принадлежности имеет треугольный вид, отсюда и название. Арифметические операции над треугольными нечеткими числами определены в [6]. Важно, что результаты сложения, вычитания, умножения, деления треугольных нечетких чисел всегда являются треугольными нечеткими числами, другими словами, остаются в трехпараметрическом множестве треугольных нечетких чисел. Это их свойство значительно облегчает вычисления по сравнению со схемами, использующими функции принадлежности произвольного вида. Примером является оценка риска с помощью аддитивно-мультипликативной модели [6].

Используют и другие функции принадлежности. Например, четырехпараметрическое семейство функций принадлежности, графики функций принадлежности которых имеют вид трапеции. Они задаются четырьмя действительными параметрами: $a < b < c < d$. Функция принадлежности равна 0 при значении аргумента $x < a$, линейно возрастает от 0 до 1 при $a \le x < b$, равна 1 при $b \le x < c$, линейно убывает от 1 до 0 при $c < x < d$ и равна 0 при $x > d$. Такая трапециевидная функция принадлежности имеет основные черты функции принадлежности общего вида, обычно используемой в прикладных задачах.

Теория нечеткости и теория вероятностей

С начала появления современной теории нечеткости в 1960-е годы началось обсуждение ее взаимоотношений с теорией вероятностей. Дело в том, что функция принадлежности нечеткого множества напоминает плотность распределения вероятностей. Отличие только в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины (или интеграл, если множество возможных значений несчетно) всегда равна 1, а сумма S значений функции принадлежности (в непрерывном случае — интеграл от функции принадлежности) может быть любым неотрицательным числом. Возникает искушение пронормировать функцию принадлежности, т.е. разделить все ее значения на S (при $S \ne 0$), чтобы свести ее к распределению вероятностей (или к плотности вероятности). Однако специалисты по нечеткости справедливо возражают против такого «примитивного» сведения, поскольку оно проводится отдельно для каждой размытости (нечеткого множества), и определения обычных операций над нечеткими множествами согласовать с ним нельзя. Последнее утверждение означает следующее. Пусть указанным образом преобразованы функции принадлежности нечетких множеств A и B. Как при этом преобразуются функции принадлежности $A \cap B$, $A \cup B$, $A + B$, AB? *Установить это невозможно в принципе.* Последнее утверждение становится совершенно ясным после рассмотрения нескольких примеров пар нечетких множеств с одними и теми же суммами значений функций принадлежности, но различными результатами теоретико-множественных операций над ними. Причем и суммы значений соответствующих функций принадлежности для этих результатов теоретико-множественных операций, например, для пересечений множеств, также различны.

В работах по нечетким множествам время от времени утверждается, что теория нечеткости — самостоятельный раздел прикладной математики и не имеет отношения к теории вероятностей. Некоторые авторы, обсуждавшие взаимоотношения теории нечеткости и теории вероятностей, подчеркивали различие между этими областями теоретических и прикладных исследований. Обычно сопоставляют аксиоматику и сравнивают области приложений.

Аргументы при втором типе сравнений не имеют доказательной силы, поскольку по поводу границ применимости даже такой давно выделившейся научной области, как вероятностно-статистические методы, имеются различные мнения. Более того, нет единства мнений об арифметике. Напомним, итог рассуждений одного из наиболее известных французских математиков Анри Лебега по поводу границ применимости арифметики: «Арифметика применима тогда, когда она применима» [26, с. 21, 22].

При сравнении различных аксиоматик теории нечеткости и теории вероятностей нетрудно увидеть, что списки аксиом различаются. Из этого отнюдь не следует, что между указанными теориями нельзя установить связь, например, типа известного сведения евклидовой геометрии на плоскости к арифметике, точнее — к теории числовой системы R^2 [27]. Эти две аксиоматики — евклидовой геометрии и арифметики — на первый взгляд, весьма сильно различаются.

Можно понять желание энтузиастов теории нечеткости подчеркнуть принципиальную новизну своего научного аппарата. Однако не менее важно установить связи этого подхода с ранее известными. Как оказалось, теория нечетких множеств тесно связана с теорией вероятностей, в определенном смысле сводится к теории случайных множеств, включается в нее.

Еще в 1975 г. показано, что нечеткие множества естественно рассматривать как «проекции» случайных множеств [12]. Функцию, равную вероятности накрытия элемента случайным множеством A, можно рассматривать как функцию принадлежности некоторого нечеткого множества B. В таком случае говорят, что B есть проекция A. Базовая теорема состоит в том, что для любого нечеткого множества B можно построить случайное множество A такое, что B есть проекция A.

Цель сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств состоит в том, чтобы за любой конструкцией из нечетких множеств увидеть конструкцию из случайных множеств, определяющую свойства первой. При этом проекциями нечетких множеств и результатом операций над ними являются соответствующие нечеткие множества и результаты операций над ними. За нечеткими множествами можно видеть случайные аналогично тому, как за плотностью распределения вероятностей мы видим случайную величину. В частности, найдены необходимые и достаточные условия, при которых проекция пересечения случайных множеств дает произведение либо пересечение нечетких множеств.

В начале 1980-х годов близкие подходы стали развиваться и за рубежом. Одна из работ носит примечательное название «Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств» [28].

Мы мыслим нечетко и только поэтому понимаем друг друга

Новые научные результаты могут быть получены при выполнении конкретных прикладных работ или при подготовке обобщающих публикаций (в том числе формально научно-популярных). Так, при разработке ГОСТ 11.011–83 «Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма-распределения» были сформулированы и применены основные идеи статистики интервальных данных, а также предложены одношаговые оценки параметров распределений, обладающие преимуществами перед оценками максимального правдоподобия, которые до сих пор по традиции включаются в учебники по теории вероятностей и математической статистике. Однако ГОСТ 11.011–83 как первооснова новых научных результатов был отменен в 1987 г. вместе со всей серией стандартов «Прикладная статистика», убран из библиотек и в настоящее время мало доступен.

Первая книга отечественного автора по нечетким множествам [12] была выпущена в научно-популярной серии «Математика. Кибернетика» издательства «Знание». Это была научная монография, подводящая итоги работ автора по рассматриваемой тематике в 1970-х годах. После ее выхода редакция журнала «Наука и жизнь» предложила опубликовать статью о теории нечеткости, что и было сделано [29]. В этой статье наряду с основами теории нечеткости был рассмотрен ряд методологических проблем этой теории. Из-за статуса научно-популярных работ научная общественность мало ссылалась на эти публикации, хотя подхватила и начала развивать выдвинутые в них идеи.

Одну из центральных идей статьи [29] можно кратко сформулировать так: «Мы мыслим нечетко и именно поэтому можем понимать друг друга». Это утверждение связано с проблемами терминологии. Многие авторы справедливо требуют, чтобы используемые термины были определены. Однако есть несколько проблем, связанных с реализацией этого требования.

Во-первых, конкретный термин определяется с помощью других терминов, а те, в свою очередь, также должны быть определены. Очевидно, рано или поздно мы приходим к базовым терминам, которые уже не могут быть определены. Точно так же в математике, раскрывая понятия и правила рассуждений, мы приходим к аксиомам. На чем основана уверенность в том, что базовые понятия и аксиомы понимаются всеми одинаково? В реальной исследовательской деятельности спасает то, что добираются до базовых понятий и аксиом крайне редко.

Во-вторых, авторы многочисленных публикаций приводят разные определения. Возникает естественное желание сопоставить, сравнить их между собой. Однако подобная деятельность трудоемка, есть опасность попасть в плен современным вариантам схоластики и уйти от решения реальных проблем, практически важных задач.

Важность рассматриваемой проблемы понимал уже Евбулид (см. выше). Использование людьми понятий «куча» и «лысый» обычно не встречает у них проблем, несмотря на нечеткость этих понятий, особенно проявляющуюся при переводе с одного языка на другой. Проблемы возникают при построении и применении систем искусственного интеллекта [5].

Парадокс теории нечеткости

В статье [29] обсуждается основной парадокс нечеткости. Рассмотрим его. В концепции размытости есть свой подход к познанию мира, к построению моделей реальных явлений. Согласно ему, все стремятся во всем увидеть нечеткость и смоделировать эту нечеткость с помощью подходящих расплывчатых объектов (здесь будем пользоваться вариантами перевода термина fuzzy).

Во многих теоретических и прикладных работах, выполненных на основе теории нечеткости, убедительно продемонстрировано, что такой подход разумен и полезен. Возникает искушение провозгласить тезис: «Все в мире нечетко». Он выглядит особенно привлекательно в связи с большой вредностью обманчивой четкости. Но можно ли этот тезис провести последовательно?

Нечеткое множество задается своей функцией принадлежности. Обратим внимание на аргумент и на значение этой функции. Четкие это объекты или размытые? Тезис «Все в мире нечетко» наталкивает на мысль, что они расплывчаты.

В качестве примера рассмотрим софизм «Куча». Сначала рассмотрим аргумент функции — число зерен, относительно совокупности которых решается вопрос: «Куча это или не куча?». Разве может быть известно абсолютно точно число зерен в достаточно большой совокупности? Как ни считай зерна — вручную, на вес, автоматически, всегда возможны ошибки (человек может ошибиться, автомат — сломаться...). Аналогична ситуация и для многих других примеров нечетких множеств.

Теперь обсудим значение функции принадлежности. Оно тем более нечетко! Разве имеет смысл выражать мнение человека хотя бы с тремя значащими цифрами? В социологи общепризнано, что человек в словесных оценках обычно не может различить больше трех, в лучшем случае — шести градаций. Отсюда с помощью соответствующего расчета можно получить, что функция принадлежности, отражающая мнение одного человека, может быть определена лишь с точностью 0,17 – 0,33. Мнения людей следовало бы представлять не обычными графиками (тонкими линиями), а довольно широкими полосами.

Если же функция принадлежности строится как среднее индивидуальных мнений, то и тогда ее значения отнюдь не абсолютно точны из-за того, что опрашиваемая совокупность людей обычно не включает и малой доли тех, кого можно было бы опросить. Доверительные границы для результатов выборочных опросов разработаны в прикладной статистике. При числе опрошенных до 100 оценить вероятность определенного ответа (одного из двух) в генеральной совокупности можно лишь с точностью до 10 %.

И только если значения функции принадлежности вычисляются по определенным алгоритмам (например, по аналитическим формулам), они известны абсолютно точно. Но тогда возникает вопрос: насколько обоснованы сами эти алгоритмы (формулы)? Обычно оказывается, что обоснование у них довольно слабое...

Каков итог обсуждения? И аргумент, и значение функции принадлежности следует считать нечеткими.

Что из этого следует? Начнем опять с аргумента. Он сам является не строго определенной величиной, а некоторым нечетким множеством величин, значит, описывается некоторой функцией принадлежности, а она определяется по значениям какого-то своего аргумента — аргумента второго порядка. А этот новый аргумент ведь тоже нечеток! Опять появляется функция принадлежности от какого-то нового аргумента — аргумента третьего порядка. И так далее.

Остановимся ли мы когда-либо на этом пути? Если остановимся, то должны будем использовать четкие значения аргумента, а это противоречит тезису «Все в мире нечетко». В соответствии с этим тезисом четкие значения фиктивны, им ничто в реальном мире не соответствует. Если же не остановимся, то получим бесконечную последовательность нечетких моделей, в которой из каждого размытого множества, как из матрешки, вылезает новая расплывчатость.

Аналогичную бесконечную последовательность получаем при рассмотрении функции принадлежности нечеткого множества. Введем соответствующие обозначения. Нечеткие множества 1-го типа «работают» с фиксированной функцией принадлежности, в то время как для нечетких множеств 2-го типа функция принадлежности сама является размытой. Если расплывчатость, описывающая функцию принадлежности, сама является туманной, то вынуждены рассмотреть нечеткие множества 3-го типа, и т.д.

Конечно, описанный парадокс не мешает успешно использовать расплывчатую математику в конкретных приложениях. Обычно считают, что значения аргумента и функции принадлежности являются полностью определенными, четкими, т.е. используют нечеткие системы 1-го типа. В статье [30] Л. А. Заде рассмотрел нечеткие множества 2-го типа и отметил необходимость изучения расплывчатостей 3-го типа, 4-го типа, ..., n-го типа. Однако к настоящему времени накоплен опыт изучения и применения нечетких множеств только 1-го типа, в отдельных случаях — 2-го типа (см., например, [31 – 34]). Расплывчатости более высоких типов практически не рассматриваются. При этом значения аргументов всегда считаются четкими. Приходится констатировать, что в реализации тезиса «Все в мире нечетко» сделаны лишь первые шаги.

Концепция системной нечеткой интервальной математики

В области математических методов исследования происходят революционные изменения. Новая парадигма математических методов исследования идет на смену устаревшей парадигме середины XX в. Новая парадигма основана на системной нечеткой интервальной математике и ее важной составляющей — статистике нечисловых данных, известной также под названиями «статистика объектов нечисловой природы» и «нечисловая статистика». В настоящее время большинство статей нашего журнала по прикладной статистике относится к статистике нечисловых данных.

Системная нечеткая интервальная математика — основа современного инструментария математических методов исследования [5]. Она исходит из необходимости учета размытости исходных данных и предпосылок математической модели. Размытость описывается с помощью нечетких множеств (в настоящее время — прежде всего 1-го типа). Наиболее развита часть теории нечеткости, исходящая из функций принадлежности специального вида, соответствующих интервалам. Речь идет об интервальной математике и статистике интервальных данных. Термин «системная» имеет двоякий смысл. Во-первых, системная нечеткая интервальная математика предназначена для моделирования и анализа конкретных систем в различных областях науки и отраслях народного хозяйства. Во-вторых, подчеркивается необходимость системного подхода при изучении систем различной природы.

Одним из вариантов практической реализации системной нечеткой интервальной математики является автоматизированный системно-когнитивный анализ и его программная реализация — интеллектуальная система «Эйдос». Научные результаты, полученные за первые девять лет развития системной нечеткой интервальной математики (2014 – 2022 гг.), отражены в монографии [35].

Основные идеи системной нечеткой интервальной математики нашли отражение в научных и методических публикациях. Так, в учебнике под редакцией член-корр. РАН И. И. Елисеевой сказано: «Иногда к непараметрической эконометрике относят эконометрический анализ нечисловых математических понятий, принадлежащих к тем или иным классам объектов нечисловой природы, таким, как нечеткие множества, интервалы, распределения вероятностей и т.д. Так, в статистике интервальных данных, где элементами выборки являются не числа, а интервалы, изучены практически все задачи классической прикладной математической статистики, в частности задачи регрессионного анализа, планирования эксперимента, сравнения альтернатив и принятия решений в условиях интервальной неопределенности и т.д. Для данной отрасли науки разработана общая схема исследования, включающая расчет двух основных характеристик — максимально возможного отклонения статистики, вызванного интервальностью исходных данных, и рационального объема выборки (превышение которого не дает существенного повышения точности оценивания и статистических выводов, связанных с проверкой гипотез). Также разработаны подходы к учету интервальной неопределенности в основных постановках регрессионного, дискриминантного и кластерного анализа» [36, с. 15]. Все эти научные результаты давно опубликованы автором данной статьи, в том числе в учебниках «Эконометрика» (2002 г.), «Прикладная статистика» (2006 г.). Однако в цитированном учебнике [36] нет ссылок на первоисточники, даже не упоминается фамилия их автора.

Выводы

Рассмотрены основные методологические проблемы теории нечеткости. Их необходимо иметь в виду всем, кто развивает, применяет и преподает эту теорию.

Показано, что история нечетких теорий начинается с размышлений философов Древней Греции. Понятие функции принадлежности ввел Э. Борель. И только после этого появилась работа Л. Заде, давшая начало современному этапу развития теории нечеткости. Он ввел операции алгебры нечетких множеств и указал магистральную дорогу к «удвоению» математики, обусловленному возможностью заменить числа и множества структур классических областей математики на их нечеткие аналоги.

В настоящее время неопределенность можно моделировать тремя способами — на основе вероятностно-статистических моделей, с помощью теории нечетких множеств, путем применения интервальной математики. Между этими тремя способами есть связи. Теория нечетких множеств в определенном смысле сводится к теории случайных множеств и тем самым — к теории вероятностей. Интервалы — частный случай нечетких множеств, в котором функция принадлежности равна единице внутри некоторого интервала и нулю вне его.

Статистический анализ нечетких данных проводится методами статистики нечисловых данных, прежде всего с помощью алгоритмов, разработанных для объектов общей природы.

При обсуждении проблем определения терминов необходимо учитывать, что процесс определения одних терминов через другие рано иди поздно приводит к неопределяемым понятиям (их аналогом являются аксиомы в математике). Использование лингвистических переменных (слов естественного языка) основано на том, что мы мыслим нечетко и только поэтому понимаем друг друга.

Важно, что нельзя последовательно реализовать тезис «Все в мире нечетко». Мы всегда опираемся на четкие понятия. В этом состоит основной парадокс теории нечеткости. Например, для обычных нечетких множеств (т.е. нечетких множеств первого порядка) четкими являются значения аргумента и функции принадлежности.

Новое направление теоретической и прикладной математики — системная нечеткая интервальная математика. Она является основой современного инструментария математических методов исследования. Системная нечеткая интервальная математика исходит из необходимости учета размытости исходных данных и предпосылок математической модели. Она разработана на основе новой парадигмы математических методов исследований. Ее важные составляющие — статистика нечисловых данных, включающая статистику интервальных данных, и теория нечеткости. По нашему мнению, системная нечеткая интервальная математика — основа математики XXI века.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Таранцев А. А.** О возможности построения регрессионных моделей при нечеткой исходной информации / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1999. Т. 65. № 1. С. 67 – 70.
2. **Хургин Я. И.** Четкие и нечеткие алгебраические средние и их использование / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т. 66. № 1. С. 64 – 66.
3. **Гермашев И. В., Дербишер В. Е., Морозенко Т. Ф., Орлова С. А.** Оценка качества технических объектов с использованием нечетких множеств / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 1. С. 65 – 68.
4. **Клементьева С. В.** Применение теории нечетких множеств для измерения и оценки эффективности реализации наукоемкой продуктовой инновации / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2006. Т. 72. № 11. С. 65 – 69.
5. **Орлов А. И.** Системная нечеткая интервальная математика — основа инструментария математических методов исследования / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2022. Т. 88. № 7. С. 5 – 7. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-7-5-7
6. **Орлов А. И.** Обобщенная аддитивно-мультипликативная модель оценки рисков на основе нечетких и интервальных исходных данных / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2023. Т. 89. № 1. С. 74 – 84. DOI: 10.26896/1028-6861-2023-89-1-74-84
7. **Новиков А. М., Новиков Д. А.** Методология. — М.: СИНТЕГ, 2007. — 668 с.
8. **Радемахер Г., Теплиц О.** Числа и фигуры. Опыты математического мышления. — М.: МЦНМО, 2020. — 276 с.
9. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets / Information and Control. 1965. Vol. 8. N 3. P. 338 – 353.
10. **Заде Л.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 166 с.
11. **Птускин А. С.** Нечеткие модели и методы в менеджменте. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. — 215 с.
12. **Орлов А. И.** Задачи оптимизации и нечеткие переменные. — М.: Знание, 1980. — 64 с.
13. **Диоген Лаэртский.** О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. — М.: Мысль, 1986. — 571 с.
14. **Ивин А. А.** Логика. Учебное пособие. Изд. 2-е. — М.: Знание, 2012. — 334 с.
15. **Bergmann M.** An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic: Semantics, Algebras, and Derivation Systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. — 313 p.
16. **Борель Э.** Вероятность и достоверность. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 120 с.
17. **Вощинин А. П.** Метод анализа данных с интервальными ошибками в задачах проверки гипотез и оценивания параметров неявных линейно параметризованных функций / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т. 66. № 3. С. 51 – 64.
18. **Вощинин А. П.** Интервальный анализ данных: развитие и перспективы / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2002. Т. 68. № 1. С. 118 – 126.
19. **Вощинин А. П., Скибицкий Н. В.** Интервальный подход к выражению неопределенности измерений и калибровке цифровых измерительных систем / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2007. Т. 73. № 11. С. 66 – 71.
20. **Скибицкий Н. В.** Построение прямых и обратных статических характеристик объектов по интервальным данным / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Т. 83. № 1. Ч. 1. С. 87 – 93.
21. **Левин В. И.** Интервальные уравнения в задачах обработки данных / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2018. Т. 84. № 3. С. 73 – 78. DOI: 1026896/1028-6861-2018-84-3-73-78
22. **Скибицкий Н. В.** Решение задачи аналитического описания статических характеристик в условиях интервальной неопределенности / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2019. Т. 85. № 3. С. 64 – 74. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-3-64-74
23. **Шарый С. П.** Задача восстановление зависимостей по данным с интервальной неопределенностью / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2020. Т. 86. № 1. С. 62 – 74. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-1-62-74
24. **Скибицкий Н. В.** Разработка паспортной статической характеристики системы на основе интервального подхода / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2021. Т. 87. № 1. С. 68 – 76. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-1-68-76
25. **Скибицкий Н. В.** Интервальные методы в задачах оптимального управления / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2022. Т. 88. № 5. С. 71 – 82. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-5-71-82
26. **Лебег А.** Об измерении величин. Изд. 2-е. — М.: Учпедгиз, 1960. — 204 с.
27. **Ефимов Н. В.** Высшая геометрия. — М.: URSS, 2022. — 600 с.
28. **Goodman I. R.** Fuzzy sets as equivalence classes of random sets / Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Developments. — New York – Oxford – Toronto – Sydney – Paris – Frankfurt: Pergamon Press, 1982. P. 327 – 343.
29. **Орлов А. И.** Математика нечеткости / Наука и жизнь. 1982. № 7. С. 60 – 67.
30. **Zadeh L. A.** The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning-1 / Information Sciences. 1975. Vol. 8. P. 199 – 249.

31. **Mendel J., Hagras H., Tan W.-W., Melek W. W., Ying H.** Introduction To Type-2 Fuzzy Logic Control: Theory and Applications. — New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2014. — 376 p.
32. **Григорьева Д. Р., Гареева Г. А., Басыров Р. Р.** Основы нечеткой логики. — Набережные Челны: Изд-во НЧИ КФУ, 2018. — 42 с.
33. **Гвоздик М. И., Абдулалиев Ф. А., Шилов А. Г.** Модели оценки рисков в нечеткой среде с использованием логического вывода на нечетких множествах первого порядка / Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России. 2017. № 2. С. 107 – 120.
34. **Гвоздик М. И., Абдулалиев Ф. А., Шилов А. Г.** Модели оценки рисков в нечеткой среде на нечетких множествах второго порядка / Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России. 2017. № 3. С. 93 – 106.
35. **Орлов А. И., Луценко Е. В.** Анализ данных, информации и знаний в системной нечеткой интервальной математике: научная монография. — Краснодар: КубГАУ, 2022. — 405 с.
36. **Елисеева И. И., Курышева С. В., Нерадовская Ю. В. и др.** Эконометрика: учебник для вузов. — М.: ЮРАЙТ, 2020. — 449 с.

REFERENCES

1. **Tarantsev A.** A On the possibility of building regression models with fuzzy initial information / Industr. Lab. Mater. Diagn. 1999. Vol. 65. N 1. P. 67 – 70 [in Russian].
2. **Khurgin Ya. I.** Precise and fuzzy algebraic means and their uses / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2000. Vol. 66. N 1. P. 64 – 66 [in Russian].
3. **Germashev I. V., Derbisher V. E., Morozenko T. F., Orlova P. A.** Assessment of the quality of technical objects using fuzzy sets / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2001. Vol. 67. N 1. P. 65 – 68 [in Russian].
4. **Klement'eva P. V.** Application of the theory of fuzzy sets to measure and evaluate the effectiveness of the implementation of a science-intensive product innovation / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2006. Vol. 72. N 11. P. 65 – 69 [in Russian].
5. **Orlov A. I.** System fuzzy interval mathematics: the basis of tools of mathematical research methods / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2022. Vol. 88. N 7. P. 5 – 7 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-7-5-7
6. **Orlov A. I.** Generalized additive-multiplicative risk estimation model based on fuzzy and interval initial data / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2023. Vol. 89. N 1. P. 74 – 84 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2023-89-1-74-84
7. **Novikov A. M., Novikov D. A.** Methodology. — Moscow: SINTEG, 2007. — 668 p. [in Russian].
8. **Rademakher G., Teplits O.** Numbers and figures. Experiences of mathematical thinking. — Moscow: MTsNMO, 2020. — 276 p. [in Russian].
9. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets / Information and Control. 1965. Vol. 8. N 3. P. 338 – 353.
10. **Zadeh L.** The concept of a linguistic variable and its application to making approximate decisions. — Moscow: Mir, 1976. — 166 p. [Russian translation].
11. **Ptuskin A. P.** Fuzzy models and methods in management. — Moscow: MGTU im. N. É. Baumana, 2008. — 215 p. [in Russian].
12. **Orlov A. I.** Optimization Problems and Fuzzy Variables. — Moscow: Znanie, 1980. — 64 p. [in Russian].
13. **Diogen Laertskii.** About the life, teachings and sayings of famous philosophers. — Moscow: Mysl', 1986. — 571 p. [in Russian].
14. **Ivin A. A.** Logics. Tutorial. 2nd Edition. — Moscow: Znanie, 2012. — 334 p. [in Russian].
15. **Bergmann M.** An Introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic: Semantics, Algebras, and Derivation Systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. — 313 p.
16. **Borel' E.** Probability and certainty. — Moscow: GIFML, 1961. — 120 p. [in Russian].
17. **Voschinin A. P.** A Method for Analyzing Data with Interval Errors in Problems of Hypothesis Testing and Parameter Estimation of Implicit Linearly Parameterized Functions / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2000. Vol. 66. N 3. P. 51 – 64 [in Russian].
18. **Voschinin A. P.** Interval data analysis: development and prospects / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2002. Vol. 68. N 1. P. 118 – 126 [in Russian].
19. **Voschinin A. P., Skibitskiy N. V.** Interval approach to expression of measurement uncertainty and calibration of digital measuring systems / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2007. Vol. 73. N 11. P. 66 – 71 [in Russian].
20. **Skibitskiy N. V.** Construction of direct and inverse static characteristics of objects based on interval data / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2017. Vol. 83. N 1. Part 1. P. 87 – 93 [in Russian].
21. **Levin V. I.** Interval equations in problems of data processing / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2018. Vol. 84. N 3. P. 73 – 78 [in Russian]. DOI: 1026896/1028-6861-2018-84-3-73-78
22. **Skibitskiy N. V.** Solving the problem of analytical description of static characteristics in conditions of interval uncertainty / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2019. Vol. 85. N 3. P. 64 – 74 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-3-64-74
23. **Shary S. P.** Data fitting problem under interval uncertainty in data / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2020. Vol. 86. N 1. P. 62 – 74 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-1-62-74
24. **Skibitskiy N. V.** Construction of passport static characteristics of the system using the interval approach / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2021. Vol. 87. N 1. P. 68 – 76 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-1-68-76
25. **Skibitskiy N. V.** Interval methods in the problems of optimal control / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2022. Vol. 88. N 5. P. 71 – 82 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-5-71-82
26. **Lebeg A.** On the measurement of quantities. 2nd Edition. — Moscow: Uchpedgiz, 1960. — 204 p. [in Russian].
27. **Efimov N. V.** Higher geometry. — Moscow: URSS, 2022. — 600 p. [in Russian].
28. **Goodman I. R.** Fuzzy sets as equivalence classes of random sets / Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Developments. — New York – Oxford – Toronto – Sydney – Paris – Frankfurt: Pergamon Press, 1982. P. 327 – 343.
29. **Orlov A. I.** Fuzzy math / Nauka i zhizn'. 1982. N 7. P. 60 – 67 [in Russian].
30. **Zadeh L. A.** The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning-1 / Information Sciences. 1975. Vol. 8. P. 199 – 249.
31. **Mendel J., Hagras H., Tan W.-W., Melek W. W., Ying H.** Introduction To Type-2 Fuzzy Logic Control: Theory and Applications. — New Jersey: Wiley-IEEE Press, 2014. — 376 p.
32. **Grigor'eva D. R., Gareeva G. A., Basyrov R. R.** Fundamentals of Fuzzy Logic. — Naberezhnye Chelny: Izd. NChI KFU, 2018. — 42 p. [in Russian].
33. **Gvozdik M. I., Abdulaliev F. A., Shilov A. G.** Risk Assessment Models in a Fuzzy Environment Using Inference on First-Order Fuzzy Sets / Vestn. Sankt-Peterburg. Univ. Gos. Protivopozh. Sluzhby MChS Rossii. 2017. N 2. P. 107 – 120 [in Russian].
34. **Gvozdik M. I., Abdulaliev F. A., Shilov A. G.** Risk assessment models in a fuzzy environment on fuzzy sets of the second order / Vestn. Sankt-Peterburg. Univ. Gos. Protivopozh. Sluzhby MChS Rossii. 2017. N 3. P. 93 – 106 [in Russian].
35. **Orlov A. I., Lutsenko E. V.** Analysis of data, information and knowledge in system fuzzy interval mathematics: scientific monograph. — Krasnodar: KubGAU, 2022. — 405 p. [in Russian].
36. **Eliseeva I. I., Kurysheva P. V., Neradovskaya Yu. V., et al.** Econometrics: textbook for universities. — Moscow: YuRAIT, 2020. — 449 p. [in Russian].