УДК
ББК
КТК
О

Рецензенты:
кафедра «Системы управления экономическими объектами» Московского государственного авиационного института — технического университета (заведующий кафедрой, доктор экономических наук, профессор В.Д. Калачанов), заместитель директора Института проблем управления РАН член-корреспондент РАН Д.А. Новиков

Орлов А.И.
О Эконометрика : учебник для вузов / А.И. Орлов. — Ростов н/Д : Феникс, 2009. — 000, [1] с. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-222-

На современном уровне представлена эконометрика — наука, изучающая конкретные количественные и качественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей. В учебник включены основные эконометрические методы: выборочные исследования, проверка однородности двух независимых выборок, метод наименьших квадратов, анализ динамики цен, экспертные технологии, теория измерений и средние величины, статистика нечисловых данных, теория нечетких множеств.

Включенный в учебник материал дает представление об эконометрике, соответствующее общепринятому в мире. Изложение доведено до современного уровня научных исследований в этой области. Большое внимание уделено практическому применению методов и результатов эконометрики. Четвертое издание учебника соответствует односеместровому курсу эконометрики для студентов факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов и преподавателей вузов, слушателей бизнес-школ, программ MBA, институтов повышения квалификации и структур второго образования, менеджеров, экономистов, инженеров, научных и практических работников, связанных с анализом экономических и управленческих данных.

УДК
ББК

ISBN 978-5-222-

Предисловие

Эконометрика — наука, изучающая конкретные количественные и качественные взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей.

Во вводных монографиях по экономической теории, как правило, выделяют в качестве ее разделов макроэкономику, микроэкономику и эконометрику. Статистические методы анализа экономических данных называют эконометрикой, что буквально означает: наука об экономических измерениях. Действительно, термин «эконометрика» состоит из двух частей: «эконо-» — от «экономика» и «-метрика» — от «измерение». О месте эконометрики среди экономических наук ярко говорит то, что восьми эконометрикам присуждены нобелевские премии по экономике.

Эконометрика — эффективный инструмент научного анализа и моделирования в профессиональной деятельности экономиста, менеджера и инженера. Настоящий учебник дает этот инструмент в руки будущим специалистам.

Содержание учебника. В учебник включены основные эконометрические методы. Глава 1 посвящена организации выборочных исследований и методам анализа собранных данных. Построены модели случайных выборок, разобраны процедуры доверительного оценивания доли и проверки однородности двух биномиальных выборок. Проанализированы прикладные выборочные исследования, в том числе оценивание функции спроса и маркетинговые опросы потребителей.

Система моделей проверки однородности двух независимых выборок — предмет главы 2. Рассмотрены методы проверки согласия и однородности для признаков с конечным числом градаций. Для проверки равенства математических ожиданий обосновано применение непараметрического критерия Крамера-Уэлча (вместо критерия Стьюдента). Установлены границы применимости двухвыборочного критерия Вилкоксона. Из состоятельных критериев проверки однородности независимых выборок разобраны критерии Смирнова и Лемана — Розенблатта (типа омега-квадрат). Сопоставлены реальные и номинальные уровни значимости в задачах проверки статистических гипотез.

Непараметрический метод наименьших квадратов в главе 3 позволяет восстановить линейную зависимость между двумя переменными. Рассмотрены коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена и основы линейного регрессионного анализа. Пример применения — прогнозирование в отрасли лома черных металлов. Обсуждаются и более глубокие проблемы — выбор вида регрессионной модели, непараметрическое оценивание точки пересечения регрессионных прямых, модель с периодической составляющей (последние две темы основаны на научных публикациях 2008 г.).

Эконометрическому анализу инфляции посвящена глава 4. Рассмотрены практически используемые потребительские корзины и соответствующие индексы инфляции, в том числе корзина Института высоких статистических технологий и эконометрики и результаты расчетов индексов инфляции по независимо собранной информации за 1993– 2008 гг. Проанализированы свойства индексов инфляции и возможности их использования в экономических расчетах. Обсуждается динамика цен на продовольственные товары в нашей стране.

Экспертные технологии стали неотъемлемой частью научного инструментария экономиста и менеджера. Им посвящена глава 5. Разобран ряд примеров процедур экспертных оценок, типовая организация работы экспертной комиссии, основания для классификации экспертных методов. Для обработки экспертных ранжировок предназначены методы средних арифметических рангов и медиан рангов, а также согласования кластеризованных ранжировок. Рассмотрена роль интуиции эксперта и информационных технологий.

Основные шкалы измерения (наименований, порядковая, интервалов, отношений, разностей, абсолютная) введены в главе 6. Поиск инвариантных алгоритмов анализа данных продемонстрирован на примере средних величин. Введены средние по Коши и средние по Колмогорову. Указаны все допустимые средние в порядковой шкале (среди средних по Коши), в шкалах интервалов и отношений (среди средних по Колмогорову).

Центральной области современной статистической науки — статистике нечисловых данных — посвящена глава 7. Среди видов статистических данных выделены объекты нечисловой природы, проанализированы связи между различными классами таких объектов и вероятностные модели порождения нечисловых данных. Рассмотрены расстояния в пространствах произвольной природы, их вывод из систем аксиом. Введены эмпирические и теоретические средние в пространствах произвольной природы и обоснованы законы больших чисел для них (сходимость эмпирических средних к соответствующим теоретическим при росте объемов выборок). В конце главы 7 введены и изучены непараметрические оценки плотности в пространствах нечисловых данных.

Сводка используемых в учебнике теоретических инструментов эконометрики дана в приложении 1. Приведены формулировки законов больших чисел, Центральных предельных теорем и теорем о наследовании сходимости. Рассмотрены метод линеаризации и принцип инвариантности.

Нечеткие множества — важный частный случай нечисловых данных. Однако основы теории нечетких множеств пока не являются общеизвестными. Для удобства читателей базовые факты этой теории приведены в приложении 2. Рассмотрены примеры практического применения нечетких множеств. Рассказано о сведении нечетких множеств к случайным, принципиально важном с методологической точки зрения. Дано представление о статистике нечетких множеств.

Методическому обеспечению учебной дисциплины «Эконометрика» посвящено приложение 3. Приведено типовое содержание лекций, практических занятий (семинаров), контрольных работ, домашних заданий.

Приложение 4 — это методическая разработка для студентов и преподавателей по выполнению домашнего задания «Функция спроса и метод наименьших квадратов» и проведению соответствующих практических занятий (семинаров).

В приложении 5 приведена краткая информация об авторе учебника.

В конце каждой главы и приложений 1 и 2 приведены списки литературных источников, контрольные вопросы и задачи, а также темы докладов, рефератов, исследовательских работ. Нумерация таблиц, рисунков, формул, теорем дана по главам и приложениям.

Методические комментарии. Теоретическую базу эконометрики составляют математические дисциплины — общий курс (математический анализ, линейная алгебра), теория вероятностей и математическая статистика, дискретная математика, исследование операций. Полезно знание основ экономической теории и статистики (общей теории статистики, экономической статистики). Чтобы полностью овладеть материалом, представленным в учебнике, желательно знать базовые понятия и результаты указанных выше типовых учебных курсов.

Целью изучения учебной дисциплины «Эконометрика» является овладение современными эконометрическими методами анализа конкретных экономических и управленческих данных на уровне, достаточном для использования в практической деятельности менеджера, экономиста, инженера. В учебник включены как классические научные результаты, так и недавно полученные. В качестве примеров применения эконометрических методов описан ряд конкретных прикладных работ, выполненных под руководством автора. Можно утверждать, что учебник позволяет выйти на современный уровень теоретических и прикладных эконометрических исследований.

Учебник адресован в первую очередь студентам дневных отделений экономических и управленческих специальностей. Они найдут весь необходимый материал для изучения различных вариантов эконометрических курсов. Особенно хочется порекомендовать учебник тем, кто получает наиболее ценимое в настоящее время образование — на экономических факультетах в технических вузах. Слушатели вечерних отделений, в том числе получающие второе образование по экономике и менеджменту, смогут изучить основы эконометрики и познакомиться с основными вопросами ее практического использования. Менеджерам, экономистам и инженерам, изучающим эконометрику самостоятельно или в бизнес-школах и институтах повышения квалификации, в том числе по программам МВА («Мастер делового администрирования»), учебник позволит познакомиться с ее ключевыми идеями и выйти на мировой уровень образования. Специалистам по теории вероятностей и математической статистике эта книга также может быть интересна и полезна, в ней описан современный взгляд на статистические методы и их применение в экономике, основные подходы и результаты в этой области (касающиеся, в частности, непараметрических постановок и статистики нечисловых данных), открывающие большой простор для дальнейших математических исследований. Преподаватели эконометрики найдут в учебнике как теоретические результаты, так и примеры их практического использования — в объеме, достаточном для разработки собственных программ обучения. Материалы учебника можно использовать также при чтении и изучении курсов «Организационно-экономическое моделирование», «Математические методы прогнозирования», «Теория принятия решений» и др.

В отличие от учебной литературы по математическим дисциплинам, в настоящей книге практически отсутствуют доказательства. В нескольких случаях мы сочли целесообразным их привести. При первом чтении доказательства теорем можно пропустить.

О роли литературных ссылок в учебнике необходимо сказать достаточно подробно. Прежде всего, эта книга представляет собой замкнутый текст, не требующий для своего понимания ничего, кроме знания стандартных учебных курсов высшей математике. Зачем же нужны ссылки? Доказательства всех приведенных в учебнике теорем приведены в ранее опубликованных статьях и монографиях. Дотошный читатель, в частности, при подготовке рефератов и при желании глубже проникнуть в материал учебника, может обратиться к приведенным в каждой главе спискам цитированной литературы. Каждая глава учебника — это введение в большую область эконометрики. Приведенные литературные ссылки помогут читателям выйти на передний край теоретических и прикладных работ, познакомиться с доказательствами теорем, включенных в учебник. За многие десятилетия накопились большие книжные богатства, и их надо активно использовать.

Включенные в учебник материалы прошли многолетнюю и всестороннюю проверку. Кроме МГТУ им. Н.Э. Баумана, они использовались при преподавании во многих других отечественных и зарубежных образовательных структурах, в частности, в Академии народного хозяйства при Правительстве Российской Федерации, в Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова, Рижском институте мировой экономики. Наряду с дневным образованием, преподавание велось в структурах второго образования, повышения квалификации, бизнес-школах (программы MBA).

Первое издание учебника «Эконометрика» было выпущено издательством «Экзамен» в 2002 г., второе, переработанное и дополненное — в 2003 г., третье — в 2004 г. Книга широко представлена в Интернете. Только с сайта «Высокие статистические технологии» http://orlovs.pp.ru ее скачали около 20 тысяч пользователей. Все это говорит о востребованности учебника.

В 2006 г. издательство «Экзамен» выпустило наши учебники «Прикладная статистика» и «Теория принятия решений». В эти книги (а также в ряд иных, перечисленных в приложении 5) была включена часть материала из первых трех изданий учебника «Эконометрика». Поэтому мы сочли необходимым существенно переработать учебник.

В четвертое издание «Эконометрики» включены разделы, соответствующие семестровому учебному курсу. Такой курс читается в МГТУ им. Н.Э. Баумана на факультете «Инженерный бизнес и менеджмент» под названием «Эконометрика — 1» (к нему близок по содержанию курс «Организационно-экономическое моделирование — 1»). В следующий за ним курс «Эконометрика — 2» входят разделы, посвященные эконометрическим методам управления качеством, теории и методам классификации, статистике интервальных данных, временным рядам, эконометрике прогнозирования и риска и др. Соответствующий материал содержится в первых трех изданиях учебника, но исключен из четвертого, поскольку перенесен в другие наши учебники.

Включенные в четвертое издание разделы существенно доработаны. Укажем наиболее существенные изменения. Расширена глава 2 — добавлены разделы, посвященные состоятельным критериям проверки однородности независимых выборок и взаимосвязи реальных и номинальных уровней значимости в задачах проверки статистических гипотез. На основе недавних разработок существенно дополнена глава 3, в том числе рассмотрены модель с периодической составляющей и методы непараметрического оценивания точки пересечения регрессионных прямых, а также примеры практического использования метода наименьших квадратов. Заново написана глава 4, посвященная эконометрическим методам анализа динамики цен, в частности, в неё включены данные по инфляции в 2004– 2008 гг. В главе 7 «Статистика нечисловых данных» рассмотрены расстояния в пространствах произвольной природы и подходы к их аксиоматическому введению. Заметной доработке подверглись и другие разделы учебника.

Благодарности. Автор выражает признательность заведующему кафедрой «Экономика и организация производства» факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана профессору, доктору экономических наук С.Г. Фалько за постоянную поддержку проекта по разработке и внедрению эконометрических курсов. Хотелось бы сказать «спасибо» всему коллективу кафедры и факультета в целом, прежде всего декану факультета, профессору, доктору экономических и технических наук И.Н. Омельченко, заведующему кафедрой «Промышленная логистика» профессору, доктору технических наук, заслуженному деятелю науки РФ А.А. Колобову — своим соавторам по ряду работ.

Автор относится к отечественной вероятностно-статистической научной школе, созданной академиком АН СССР А.Н. Колмогоровым, и искренне благодарен своим учителям — ушедшим от нас академику АН УССР Б.Г. Гнеденко, члену-корреспонденту АН СССР Л.Н. Большеву, проф. В.В. Налимову.

Настоящий учебник разработан в соответствии с рекомендациями созданной в 1990 г. Всесоюзной статистической ассоциации и ее наследников — Российской ассоциации статистических методов и Российской академии статистических методов, а также разработками Всесоюзного центра статистических методов и информатики.

По ряду причин исторического характера основное место публикаций научных работ по статистическим методам анализа технических и технико-экономических данных в нашей стране — раздел «Математические методы исследования» журнала «Заводская лаборатория». Многие статьи этого раздела пригодились при подготовке учебника. Автор искренне благодарен руководству и сотрудникам журнала, коллегам по секции редколлегии «Математические методы исследования».

Спасибо коллегам и ученикам, работы которых были использованы при подготовке учебника (В.С. Муравьевой, Е.М. Крюковой, Л.А. Орловой и др.). Автор пользуется возможностью выразить признательность за совместную работу своим более чем 200 соавторам по различным публикациям, прежде всего сотрудникам Института высоких статистических технологий и эконометрики и Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге НУК ИБМ МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Автор благодарен рецензентам — заместителю директора Института проблем управления РАН члену-корреспонденту РАН Д.А. Новикову и заведующему кафедрой «Системы управления экономическими объектами» Московского государственного авиационного института — технического университета, профессору, доктору экономических наук В.Д. Калачанову. Спасибо сотрудникам издательства «Феникс» за поддержку нашего научного направления и большую работу по подготовке рукописи к изданию.

С базовыми публикациями (более 20 книг и 200 статей) и текущей научной информацией по эконометрике можно познакомиться на сайте «Высокие статистические технологии» http://orlovs.pp.ru и его форуме http://forum.orlovs.pp.ru/, а также на странице Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге http://www.ibm.bmstu.ru/nil/lab.html (на сайте научно-учебного комплекса «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана). Достаточно большой объем информации содержит еженедельник «Эконометрика» http://subscribe.ru/catalog/science.humanity.econometrika, выпускаемый с июля 2000 г. Автор искренне благодарен разработчику сайтов и редактору электронного еженедельника А.А. Орлову за многолетний энтузиазм.

Условия для написания книги создала моя любимая жена Л.А. Орлова. Спасибо!

Включенный в учебник материал дает представление об эконометрике, соответствующее общепринятому в мире. Изложение доведено до современного уровня научных исследований в этой области. Конечно, возможны различные точки зрения по тем или иным частным вопросам. Автор будет благодарен читателям, если они направят свои вопросы и замечания по адресу издательства или непосредственно автору по электронной почте E-mail: prof-orlov@mail.ru (или поместят их на форуме http://forum.orlovs.pp.ru/ сайта «Высокие статистические технологии»).

Глава 1

ВЫБОРОЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Термин «выборочные исследования» применяют, когда невозможно изучить все единицы представляющей интерес совокупности. Приходится знакомиться с частью совокупности — с выборкой, а затем с помощью вероятностно — статистических методов и моделей переносить выводы с выборки на всю совокупность. Выборочные исследования — способ получения статистических данных и важный раздел эконометрики и прикладной статистики [5].

1.1. Организация выборочных исследований

В качестве примера рассмотрим выборочные исследования предпочтений потребителей, которые часто проводят специалисты по маркетингу (изучению рынка).

Оценивание функции спроса. Функция спроса часто встречается в учебниках по экономической теории, но при этом обычно не рассказывается, как она получена. Между тем оценить ее по эмпирическим данным не так уж трудно. Например, можно выяснять ожидаемый спрос с помощью следующего простого приема — спрашиваем потенциальных потребителей: «Какую максимальную цену Вы заплатили бы за такой-то товар?» Пусть для определенности выборка состояла из 20 опрошенных. Они назвали следующие максимально допустимые для них цены:

40, 25, 30, 50, 35, 20, 50, 32, 15, 40,
20, 40, 45, 30, 50, 25, 35, 20, 35, 40.

Сначала названные опрошенными величины упорядочим в порядке возрастания. Результаты представлены в табл.1.1. В первом столбце — номера различных численных значений (в порядке возрастания), названных потребителями. Во втором столбце приведены сами значения цены, названные ими. В третьем столбце указано, сколько раз названо то или иное значение.

Таблица 1.1

Эмпирическая оценка функции спроса и ее использование

№ п/п (i)	Цена p_i	Повторы N_i	Спрос $D(p_i)$	Прибыль $(p_i–10)D(p_i)$	Прибыль $(p_i–15)D(p_i)$	Прибыль $(p_i– 25)D(p_i)$
1	15	1	20	100	0	-
2	20	3	19	190	95	-
3	25	2	16	240	160	0
4	30	2	14	280	210	70
5	32	1	12	264	204	84
6	35	3	11	275	220	110
7	40	4	8	240	200	120
8	45	1	4	140	120	80
9	50	3	3	120	105	75

Таким образом, 20 потребителей назвали 9 конкретных значений цены (максимально допустимых, или приемлемых для них значений), каждое из значений, как видно из третьего столбца, названо от 1 до 4 раз. Теперь легко построить выборочную функцию спроса в зависимости от цены. Она будет представлена в четвертом столбце, который заполним снизу вверх. Спрос как функция от цены p обозначен $D(p)$ (от *demand* (англ.) — спрос). Если мы будем предлагать товар по цене свыше 50 руб., то его не купит никто из опрошенных.

При цене 50 руб. появляются 3 покупателя. Записываем 3 в четвертый столбец в девятую строку. А если цену понизить до 45? Тогда товар купят четверо — тот единственный, для кого максимально возможная цена — 45, и те трое, кто был согласен на более высокую цену — 50 руб. Таким образом, легко заполнить столбец 4, действуя по правилу: значение в клетке четвертого столбца равно сумме значений в находящейся слева клетке третьего столбца и в лежащей снизу клетке четвертого столбца. Например, за 30 руб. купят товар 14 человек, а за 20 руб. — 19.

Зависимость спроса от цены — это зависимость четвертого столбца от второго. Табл.1.1 дает нам девять точек такой зависимости. Зависимость можно представить на рисунке, в координатах «спрос — цена». Если абсцисса — это спрос, а ордината — цена, то девять точек на кривой спроса, перечисленные в порядке возрастания абсциссы, имеют вид:

(3; 50), (4; 45), (8; 40), (11; 35), (12; 32),
(14; 30), (16; 25), (19; 20), (20; 15).

Эти девять точек можно использовать для построения кривой спроса каким-либо графическим (сделайте чертеж!) или расчетным способом, например, методом наименьших квадратов (см. ниже главу 3). Кривая спроса, как и следует ожидать согласно учебникам экономической теории, убывает, имея направления от левого верхнего угла чертежа к правому. Однако заметны отклонения от гладкого вида функции, связанные, в частности, с естественным пристрастием потребителей к круглым числам. Заметьте, все опрошенные, кроме одного, назвали числа, кратные 5 руб.

Расчет оптимальной цены. Данные табл.1.1 могут быть использованы для выбора цены продавцом-монополистом. Или организацией, действующей на рынке монополистической конкуренции. Пусть расходы на изготовление или оптовую покупку единицы товара равны 10 руб. По какой цене ее продавать на том рынке, функцию спроса для которого мы только что нашли? Для ответа на этот вопрос вычислим суммарную прибыль, т.е. произведение прибыли на одной единице товара (p–10) на число проданных (точнее, запрошенных) экземпляров $D(p)$. Результаты приведены в пятом столбце табл.1.1. Видно, что максимальная прибыль, равная 280 руб., достигается при цене 30 руб. за единицу товара. При этом из 20 потенциальных покупателей окажутся в состоянии заплатить за книгу 14, т.е. 70% .

Если же удельные издержки производства, приходящиеся на одну единицу товара (или оптовая цена), повысятся до 15 руб., то данные столбца 6 табл.1.1 показывают, что максимальная прибыль, равная 220 руб. (она, разумеется, меньше, чем в предыдущем случае), достигается при более высокой цене — 35 руб. Эта цена доступна 11 потенциальным покупателям, т.е. 55% от всех возможных покупателей. При дальнейшем повышении издержек, скажем, до 25 руб., как вытекает из данных столбца 7 табл.1, максимальная прибыль, равная 120 руб., достигается при цене 40 руб. за единицу товара, что доступно 8 лицам, т.е. 40% покупателей. Отметьте, что при повышении оптовой цены на 10 руб. оказалось выгодным увеличить розничную лишь на 5, поскольку более резкое повышение привело бы к такому сокращению спроса, которое перекрыло бы эффект от повышения удельной прибыли (т.е. прибыли, приходящейся на одну проданную единицу товара).

Замечание. При более строгом подходе к использованию терминов надо вместо «прибыли» говорить о «маржинальной прибыли», а вместо «удельных издержек» — о «переменных издержках» (на одну единицу продукции), поскольку постоянные издержки не учитываем. Кроме того, спрос целесообразно выражать не в числе потребителей, а в процентах от общего числа потенциальных потребителей. Мы не сочли необходимым придерживаться подобных уточнений, поскольку цель настоящей главы — в демонстрации возможности использования в маркетинговых исследований подходов, основанных на организационно-экономическом моделировании.

Представляет интерес анализ оптимального объема выпуска при различных значениях удельных издержек (табл.1.2).

В табл.1.2 звездочками указаны максимальные значения прибыли при том или ином значении издержек, не включенном в табл.1.1. Для легкости обозрения результаты об оптимальных объемах выпуска и соответствующих ценах из табл.1.1 и табл.1.2 приведены в табл.1.3.

Таблица 1.2

Прибыль при различных значениях издержек

№ (i)	Цена (p_i)	Спрос $D(p_i)$	Прибыль $(p_i–5)D(p_i)$	Прибыль $(p_i–20)D(p_i)$	Прибыль $(p_i–30)D(p_i)$	Прибыль $(p_i–35)D(p_i)$	Прибыль $(p_i–40)D(p_i)$
1	15	20	200	—	—	—	—
2	20	19	285	0	—	—	—
3	25	16	320	80	—	—	—
4	30	14	350 *	140	0	—	—
5	32	12	324	144	24	—	—
6	35	11	330	165 *	55	0	—
7	40	8	280	160	80 *	40	0
8	45	4	160	100	60	40	20
9	50	3	135	90	60	45 *	30 *

Таблица 1.3

Зависимость оптимального выпуска и цены от издержек

Издержки	5	10	15	20	25	30	35	40
Оптимальный выпуск	14	14	11	11	8	8	3	3
Цена	30	30	35	35	40	40	50	50

Как видно из табл. 1.3, с ростом издержек оптимальный выпуск падает, а цена растет. При этом изменение издержек на 5 единиц может вызывать, а может и не вызывать повышения цены. В этом проявляется микроструктура функции спроса — небольшое повышение цены может привести к тому, что значительные группы покупателей откажутся от покупок, и прибыль упадет.

Этот эффект напоминает известное в экономической теории разделение налогового бремени между производителем и потребителем. Неверно говорить, что производитель перекладывает издержки или, конкретно, налоги, на потребителя, повышая цену на их величину, поскольку при этом сокращается спрос (и выпуск), а потому и прибыль производителя.

Дальнейшее ясно — если оптовая цена будет повышаться, то и дающая максимальную прибыль розничная цена также будет повышаться, и все меньшая доля покупателей сможет приобрести товар. Крайняя точка — оптовая цена, равная 45 руб. Тогда только трое (15%) купят товар за 50 руб., а прибыль продавца составит только 15 руб. Наглядно видно, что повышение издержек производства приводит к ориентации производителя на наиболее богатые слои населения. Но и повышение цен (до оптимального для монополиста-производителя уровня) не приводит к повышению прибыли, напротив, она снижается, и при этом большинство потенциальных потребителей не в состоянии купить товар.

Отметим, что рыночные структуры не в состоянии обеспечить всех желающих — это просто не выгодно. Так, из 20 опрошенных лишь 14, т.е. 70%, могут рассчитывать на покупку, даже при минимальных издержках и ценах. Если общество желает чем-либо обеспечить всех граждан, оно должно раздавать это благо бесплатно, как это делается, например, с учебниками в школах.

Описанный здесь метод оценивания спроса был разработан в Институте высоких статистических технологий и эконометрики (Москва) в 1993 г.

Для изучения предпочтений потребителей часто используют более изощренные методы. Рассмотрим некоторые из них.

Маркетинговые опросы потребителей. Потенциального покупателя интересует не только цена, но и качество товара, красота упаковки (например, для подарочных наборов конфет) и многое другое. Хочешь узнать, чего желает потребитель — спроси его. Эта простая мысль объясняет популярность маркетинговых опросов.

Бесспорно, что основная цель производственной и торговой деятельности — удовлетворение потребностей людей. Как получить представление об этих потребностях? Очевидно, необходимо опросить потребителей. В американском учебнике по рекламному делу [6] подробно рассматриваются различные методы опроса потребителей и обработки результатов с помощью методов эконометрики. Расскажем о результатах опроса потребителей растворимого кофе. Исследование проведено Институтом высоких статистических технологий и эконометрики по заказу АОЗТ «Д–2» в апреле 1994 г. в Москве.

Сбор данных. Один из важнейших разделов прикладной статистики — сбор данных. Обсудим постановку задачи в случае опроса потребителей растворимого кофе. Заказчика интересуют предпочтения как продавцов кофе (розничных и мелкооптовых), так и непосредственно потребителей. В результате совместного обсуждения было признано целесообразным использовать для опроса и тех, и других одну и ту же анкету из 14 основных и 4 социально-демографических вопросов с добавлением двух вопросов специально для продавцов. Анкета была разработана совместно представителями заказчика и исполнителя и утверждена заказчиком. В табл. 1.4 приведен несколько сокращенный вариант этой анкеты.

Таблица 1.4

Анкета для потребителей растворимого кофе (в сокращении)

Дорогой потребитель растворимого кофе,

Институт высоких статистических технологий и эконометрики просит Вас ответить на несколько простых вопросов о том, какой кофе Вы любите. Ваши ответы позволят составить объективное представление о вкусах российских любителей кофе и будут способствовать повышению качества этого товара на российском рынке.

1. Часто ли Вы пьете растворимый кофе: иногда, каждый день 1 чашку, 2–3 чашки, больше, чем 3 чашки.

(Здесь и далее подчеркните нужное.)

2. Что Вы цените в кофе: вкус, аромат, крепость, цвет, отсутствие вредных для здоровья веществ, что-либо еще (сообщите нам, что именно) ______________________________.

3. Как часто покупаете кофе: по мере надобности или по возможности?

4. Какую марку растворимого кофе Вы обычно покупаете? ______

5. Какой объем упаковки Вы предпочитаете: в пакетиках, маленькая банка, средняя банка, большая банка, обязательно стеклянная банка, все равно.

6. Где покупаете растворимый кофе: в ларьках, в продуктовых магазинах, в специализированных отделах и магазинах, все равно, где купить, где-либо еще (опишите, пожалуйста) ______________.

7. Были ли случаи, когда купленный Вами кофе оказывался низкого качества? Да, нет.

8. Согласны ли Вы, что за высокое и гарантированное качество продукта можно и заплатить несколько дороже? Да, нет.

9. На сколько дороже Вы готовы платить за экологически безопасный кофе? ____________________________________.

10. Считаете ли Вы нужным, чтобы вредные для здоровья вещества, в частности, ионы тяжелых металлов, не проникали из материала упаковки в растворимый кофе? Да, нет.

Мы планируем сравнить потребительские предпочтения различных категорий жителей нашей страны. Поэтому просим ответить еще на несколько вопросов.

11. Пол: женский, мужской.

12. Возраст: до 20, 20–30, 30–50, более 50.

13. Род занятий: учащийся, работающий, пенсионер, инженер, врач, преподаватель, служащий, менеджер, предприниматель, научный работник, рабочий, др. (пожалуйста, расшифруйте).

14. Вся Ваша семья любит растворимый кофе или же Вы — единственный любитель этого восхитительного напитка современного человека? Вся семья, я один (одна).

Спасибо за Ваше содействие работе по повышению качества продуктов на российском рынке!

Выбор метода опроса. Широко применяются процедуры опроса, когда респонденты (так социологи и маркетологи называют тех, от кого получают информацию, т.е. опрашиваемых) самостоятельно заполняют анкеты (розданные им или полученные по почте), а также личные и телефонные интервью. Из этих процедур нами было выбрано личное интервью по следующим причинам.

Возврат почтовых анкет сравнительно невелик (в данном случае можно было ожидать не более 5–10%), оттянут по времени и искажает структуру совокупности потребителей (наиболее динамичные люди вряд ли найдут время для ответа на подобную анкету).

Самостоятельное заполнение анкеты, как показали специально проведенные эксперименты, не позволяет получить полные ответы на поставленные вопросы. Респондент утомляется или отвлекается, отказывается отвечать на часть вопросов, иногда не понимает их или отвечает не по существу. Некоторые категории респондентов, например, продавцы в киосках, отказываются заполнять анкеты, но готовы устно ответить на вопросы.

Телефонный опрос искажает совокупность потребителей, поскольку наиболее активных индивидуумов трудно застать дома и уговорить ответить на вопросы анкеты. Репрезентативность нарушается также и потому, что на один номер телефона может приходиться различное количество продавцов и потребителей растворимого кофе, а некоторые из них не имеют телефонов вообще. Анкета достаточно длинна, и разговор по домашнему и тем более служебному телефону респондента может быть прекращен досрочно по его инициативе. Иногородних продавцов и потребителей растворимого кофе, приехавших в Москву, по телефону опросить практически невозможно.

Метод личного интервью лишен перечисленных недостатков. Соответствующим образом подготовленный интервьюер, получив согласие на интервью, удерживает внимание собеседника на анкете, добивается получения ответов на все её вопросы, контролируя при этом соответствие ответов реальной позиции респондента. Ясно, что успех интервьюирования зависит от личных качеств и подготовки интервьюера. Однако расходы на получение одной анкеты при использовании этого метода больше, чем для других рассмотренных методов.

Формулировки вопросов. В маркетинговых и социологических опросах используют три типа вопросов — закрытые, открытые и полузакрытые, они же полуоткрытые. При ответе на закрытые вопросы респондент может выбирать лишь из сформулированных составителями анкеты вариантов ответа. В качестве ответа на открытые вопросы респондента просят изложить свое мнение в свободной форме. Полузакрытые, они же полуоткрытые вопросы занимают промежуточное положение — кроме перечисленных в анкете вариантов, респондент может добавить свои соображения.

В социологических публикациях, посвященных выборочным исследованиям, продолжается дискуссия по поводу «мягких» и «жестких» форм сбора данных. Т.е. фактически о том, какого типа вопросы более целесообразно использовать — открытые или закрытые (см., например, статью известного социолога В.А. Ядова [7]).

Преимущество открытых вопросов состоит в том, что респондент может свободно высказать свое мнение так, как сочтет нужным. Их недостаток — в сложности сопоставления мнений различных респондентов. Для такого сопоставления и получения сводных характеристик организаторы опроса вынуждены сами шифровать ответы на открытые вопросы, применяя разработанную ими схему шифровки.

Преимущество закрытых вопросов в том и состоит, что такую шифровку проводит сам респондент. Однако при этом организаторы опроса уподобляются древнегреческому мифическому персонажу Прокрусту. Как известно, Прокруст приглашал путников заночевать у него. Укладывал их на кровать. Если путник был маленького роста, он вытягивал его ноги так, чтобы они доставали до конца кровати. Если же путник оказывался высоким и ноги его торчали — он обрубал их так, чтобы достигнуть стандарта: «рост» путника должен равняться длине кровати. Так и организаторы опроса, применяя закрытые вопросы, заставляют респондента «вытягивать» или «обрубать» свое мнение, чтобы выразить его с помощью приведенных в формулировке вопроса возможных ответов.

Ясно, что для обработки данных по группам и сравнения групп между собой нужны формализованные данные, и фактически речь может идти лишь о том, кто — респондент или маркетолог (социолог, психолог и др.) — будет шифровать ответы. В проекте «Потребители растворимого кофе» практически для всех вопросов варианты ответов можно перечислить заранее, т.е. можно широко использовать закрытые вопросы. В отличие от опросов с вопросами типа: «Одобряете ли Вы идущие в России реформы?», в которых естественно просить респондента расшифровать, что он понимает под «реформами» (открытый вопрос). Поэтому в используемой в описываемом проекте анкете использовались в основном закрытые и полузакрытые вопросы. Как показали результаты обработки, этот подход оказался правильным — лишь в небольшом числе анкет оказались вписаны свои варианты ответов. Вместе с тем демонстрировалось уважение к мнению респондента, не выдвигалось требование обязательного выбора из заданного множества ответов — респондент мог добавить свое, но редко пользовался этой возможностью (не более чем в 5% случаев).

В последнем вопросе анкеты респонденту предлагалось стать постоянным участником опросов о качестве товаров народного потребления. Ряд респондентов откликнулся на это предложение, в результате стало возможным развертывание постоянной сети «экспертов по качеству», подобной аналогичным в США и других странах.

1.2. Модели случайных выборок

Статистические методы выборочных исследований основаны на вероятностных моделях, описывающих получение ответов опрашиваемых на вопросы анкет. В случае ответов типа «да» — «нет» наиболее распространенными являются две вероятностные модели—биномиальная и гипергеометрическая.

В биномиальной модели предполагается, что ответы n опрашиваемых можно рассматривать как совокупность n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_i = 1$, если i-ый респондент сказал «да», и $X_i = 0$, если его ответ — «нет». Тогда число X ответов «да» в выборке равно

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n . \qquad (1.1)$$

Из формулы (1.1) и Центральной предельной теоремы теории вероятностей (см. «Приложение 1» к настоящему учебнику) вытекает, что при увеличении объема выборки n распределение X сближается с нормальным распределением. Известно, что распределение X имеет вид

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad (1.2)$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k, а p — доля ответов «да» в генеральной совокупности, т.е. $p = P(X_i = 1)$. Формула (1.2) задает биномиальное распределение, часто используемое при вероятностном моделировании реальных явлений и процессов.

Гипергеометрическое распределение соответствует иной схеме — случайному отбору респондентов в выборку. Пусть среди N лиц, составляющих генеральную совокупность, имеется D лиц, чье мнение — «да». Случайность отбора респондентов в выборку означает, что каждое лицо имеет одинаковые шансы быть отобранным. Мало того, ни одна пара потенциальных респондентов не должна иметь при отборе в выборку преимущества перед любой другой парой. То же самое — для троек, четверок и т.д. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда каждое из C_N^n сочетаний по n лиц из N имеет одинаковые шансы быть отобранным в качестве выборки. Вероятность того, что будет отобрано заранее заданное сочетание, равна, очевидно, $1/C_N^n$.

Пусть Y — число сказавших «да» лиц в случайной выборке, организованной таким образом. Известно, что тогда $P(Y = k)$ — гипергеометрическое распределение, т. е.

$$P(Y = k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}. \qquad (1.3)$$

Отбор случайной выборки согласно описанным правилам организуют при проведении различных лотерей. Например, отбирают 6 номеров из 49. Тогда генеральная совокупность состоит из 49 единиц (номеров), а выборка — из 6. В этом случае отбирают номера, а не респондентов, но вероятностная модель — та же. Удобно говорить, что генеральная совокупность и выборка состоят из единиц. В одном случае единицы — это люди (лица, потенциальные респонденты), в другом — номера. В статистических метода управления качеством рассматриваются единицы продукции — детали или изделия.

Замечательный математический факт состоит в том, что биномиальная модель (1.2) и гипергеометрическая модель (1.3) *весьма близки* (с практической точки зрения совпадают), когда объем генеральной совокупности (партии) по крайней мере в 10 раз превышает объем выборки. Другими словами, можно принять, что

$$P(X = k) = P(Y = k), \tag{1.4}$$

если объем выборки мал по сравнению с объемом партии. При этом в качестве p в левой части формулы (1.4) берут D/N.

Близость результатов, получаемых с помощью биномиальной и гипергеометрической моделей, весьма важна не только с практической, но и с методологической точки зрения. Дело в том, что эти модели исходят из принципиально различных методологических предпосылок. В биномиальной модели случайность *присуща каждому респонденту*. Он с какой-то вероятностью отвечает «да», а с какой-то — «нет» (сумма этих вероятностей, очевидно, равна 1). В то же время в гипергеометрической модели ответ респондента полностью определен, а случайность проявляется лишь *в отборе*, вносится социологом или маркетологом при составлении выборки.

В науках о человеке противоречие между рассматриваемыми моделями выборки четко выражено. В среде специалистов, изучающих человека (маркетологов, социологов, психологов, политологов и др.) давно идет дискуссия о роли случайности в поведении человека. А именно, о том, есть ли случайность в поведении отдельно взятого человека или же случайность проявляется лишь в отборе выборки из генеральной совокупности.

Биномиальная модель предполагает, что поведение человека, в частности, выбор им определенного варианта при ответе на вопрос, определяется с участием случайных причин. Например, человек может случайно сказать «да», случайно — «нет». Некоторые философы отрицают случайность, присущую поведению человека согласно биномиальной модели. Они верят в причинность и считают поведение конкретного человека практически полностью детерминированным (его взглядами, психофизиологическими особенностями, прежним опытом и др.). Поэтому они принимают гипергеометрическую модель и считают, что случайность отличия ответов в выборке от ответов во всей генеральной совокупности определяется всецело случайностью, вносимой при отборе единиц наблюдения в выборку.

Сформулированные выше математические результаты (соотношение (1.4)) показывают, что позиция в этой давней дискуссии практически не влияет на алгоритмы обработки данных. Следовательно, во многих случаях нет необходимости принимать чью-либо сторону в этом споре, поскольку обе модели дают близкие численные результаты.

Отличия проявляются лишь при обсуждении вопроса о том, какую выборку считать *представительной*. В терминах контроля качества продукции — является ли таковой выборка, составленная из 20 изделий, лежащих сверху в первом вскрытом ящике? В биномиальной модели вполне допустим ответ «да», в гипергеометрической — только «нет».

Биномиальная модель легче для теоретического изучения, поэтому будем её рассматривать в дальнейшем. Однако при реальном опросе лучше формировать выборку, исходя из гипергеометрической модели. Это делают, выбирая респондентов из списка избирателей (для включения в выборку) с помощью датчиков псевдослучайных чисел на ЭВМ или с помощью таблиц псевдослучайных чисел. Алгоритмы формирования выборки встраивают во все современные программные продукты, предназначенные для поддержки проведения маркетинговых или социологических опросов, организации статистического контроля качества и др.

Обоснование объема выборки и проведение опроса. Вернемся к анализу результатов опроса потребителей растворимого кофе, о котором шла речь в предыдущем разделе. Как уже говорилось, модели выборочных исследований часто опираются на предположение о том, что реальную выборку можно описывать как «случайную выборку из конечной совокупности». Типа той, когда из списков избирателей с помощью датчика случайных чисел отбирается необходимое число номеров для формирования жюри присяжных заседателей. В рассматриваемом исследовании нельзя обеспечить формирование подобной выборки — не существует реестра потребителей растворимого кофе. Однако в этом и нет необходимости. Поскольку гипергеометрическое распределение хорошо приближается биномиальным, если объем выборки по крайней мере в 10 раз меньше объема всей совокупности (в рассматриваемом случае это так), то правомерно использование биномиальной модели, согласно которой мнение респондента (ответы на все вопросы анкеты) рассматривается как случайный вектор, а все такие вектора независимы между собой. Другими словами, можно использовать модель простой случайной выборки.

1.3. Доверительное оценивание доли

Зачем проводятся выборочные исследования? Чтобы получить необходимую информацию о генеральной совокупности. Для этого необходимо перенести выводы с выборки на генеральную совокупность. Как и с какой точностью можно это сделать?

Рассмотрим эту проблему для простейшего случая одного вопроса с двумя возможными ответами — «да» и «нет».

Напомним, что биномиальная модель выборки как раз и применяется для описания ответов на закрытые вопросы, имеющие две подсказки, например, «да» и «нет». Конечно, пары подсказок могут быть иными. Например, «согласен» и «не согласен». Или при опросе потребителей кондитерских товаров первая подсказка может иметь такой вид: «Больше люблю «Марс», чем «Сникерс»«. А вторая тогда такова: «Больше люблю «Сникерс», чем «Марс»«.

Пусть объем выборки равен n. Тогда ответы опрашиваемых можно представить как $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где $X_i = 1$, если i-й респондент выбрал первую подсказку, и $X_i = 0$, если i-й респондент выбрал вторую подсказку, $i=1,2,\ldots,n$. В вероятностной модели предполагается, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены. Поскольку эти случайные величины принимают два значения, то ситуация описывается одним параметром p — долей выбирающих первую подсказку во всей генеральной совокупности. Тогда

$$P(X_i = 1) = p,\ P(X_i = 0) = 1 - p,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Пусть $m = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Оценкой вероятности p является частота $p^* = m/n$. При этом математическое ожидание $M(p^*)$ и дисперсия $D(p^*)$ имеют вид

$$M(p^*) = p,\ D(p^*) = p(1-p)/n.$$

По Закону Больших Чисел (ЗБЧ) теории вероятностей (в данном случае — по теореме Бернулли) частота p^* сходится (т.е. безгранично приближается) к вероятности p при росте объема выборки (см. «Приложение 1»). Это означает, что оценивание проводится тем точнее, чем больше объем выборки. Точность оценивания можно указать. Займемся этим.

По теореме Муавра-Лапласа теории вероятностей

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где $\pi = 3{,}1415925\ldots$ — отношение длины окружности к ее диаметру, $e = 2{,}718281828\ldots$ — основание натуральных логарифмов. График плотности стандартного нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

был очень точно изображен на германской денежной банкноте в 10 немецких марок (до введения евро). Банкнота была посвящена великому немецкому математику Карлу Гауссу (1777–1855), среди основных работ которого есть относящиеся к нормальному распределению. Эта подробность демонстрирует, что в Германии (и тем более в англосаксонских странах) гораздо шире распространено знакомство с основами теории вероятностей и математической статистики, чем в нашей стране.

В настоящее время нет необходимости вычислять функцию стандартного нормального распределения и ее плотность по приведенным выше формулам, поскольку давно составлены подробные таблицы (см., например, [1]), а распространенные программные продукты содержат алгоритмы нахождения этих функций.

С помощью теоремы Муавра-Лапласа могут быть построены доверительные интервалы для неизвестной статистику вероятности. Сначала заметим, что из этой теоремы непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{-x \le \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \Phi(x) - \Phi(-x).$$

Поскольку функция стандартного нормального распределения симметрична относительно 0, т.е. $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, то справедливо полезное равенство $\Phi(x) - \Phi(-x) = 2\,\Phi(x) - 1$.

Зададим характеристику надежности переноса выводов с выборки на генеральную совокупность — доверительную вероятность γ, близкую к 1. Пусть функция $U(\gamma)$ удовлетворяет условию

$$\Phi(U(\gamma)) - \Phi(-U(\gamma)) = \gamma,$$

т.е.

$$U(\gamma) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right).$$

Из последнего предельного соотношения следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{p^* - U(\gamma)\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le p \le p^* + U(\gamma)\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

К сожалению, это соотношение нельзя непосредственно использовать для доверительного оценивания, поскольку верхняя и нижняя границы зависят от неизвестной вероятности. Однако с помощью метода наследования сходимости (см. «Приложение 1» к настоящему учебнику или [3, п.2.4]) можно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{p^* - U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}} \le p \le p^* + U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}\} = \gamma.$$

Следовательно, нижняя доверительная граница имеет вид

$$p_{нижн} = p^* - U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}},$$

в то время как верхняя доверительная граница такова:

$$p_{верх} = p^* + U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}.$$

Наиболее распространенным (в прикладных исследованиях) значением доверительной вероятности является $\gamma = 0{,}95$. Иногда употребляют термин «95% доверительный интервал». Тогда $U(\gamma) = 1{,}96$.

Пример 1. Пусть $n = 500$, $m = 200$. Тогда $p^* = 0{,}40$. Найдем доверительный интервал для $\gamma = 0{,}95$:

$$p_{нижн} = 0{,}40 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}4\times 0{,}6}}{\sqrt{500}} = 0{,}40 - 0{,}043 = 0{,}357, \quad p_{верх} = 0{,}40 + 0{,}043 = 0{,}443.$$

Таким образом, хотя в достаточно большой выборке 40% респондентов говорят «да», можно утверждать лишь, что во всей генеральной совокупности таких от 35,7% до 44,3% — крайние значения отличаются на 8,6%.

Замечание. С достаточной для практики точностью можно заменить 1,96 на 2.

Величина

$$U(\gamma)\frac{\sqrt{p^*(1-p^*)}}{\sqrt{n}}$$

называется ошибкой выборки. Обычно, как в примере 1, используют значение доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ и множитель $U(\gamma) = 1{,}96$.

Удобные для использования в практической работе специалиста по выборочным исследованиям, маркетолога и социолога таблицы точности оценивания разработаны во ВЦИОМ (Всероссийском центре по изучению общественного мнения). Приведем здесь несколько модифицированный вариант одной из них.

Таблица 1.5

Допустимая величина ошибки выборки (в процентах)

Объем группы n / Доля p*	1000	750	600	400	200	100
Около 10% или 90%	2	3	3	4	5	7
Около 20% или 80%	3	4	4	5	7	9
Около 30% или 70%	4	4	4	6	9	10
Около 40% или 60%	4	4	5	6	8	11
Около 50%	4	4	5	6	8	11

В условиях рассмотренного выше примера надо взять вторую снизу строку. Объема выборки 500 нет в таблице, но есть объемы 400 и 600, которым соответствуют ошибки в 6% и 5% соответственно. Следовательно, в условиях примера целесообразно оценить ошибку как ((5+6)/2)% = 5,5%. Эта величина несколько больше, чем рассчитанная выше (4,3%). С чем связано это различие? Дело в том, что таблица ВЦИОМ связана не с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$, а с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}99$, которой соответствует множитель $U(\gamma) = 2{,}58$. Расчет ошибки по приведенным выше формулам дает 5,65%, что практически совпадает со значением, найденным по табл. 1.5.

Необходимый объем выборки. В биномиальной модели выборки оценивание характеристик происходит тем точнее, чем объем выборки больше. Часто спрашивают: «Какой объем выборки нужен?» Разработан ряд методов определения необходимого объема выборки. Они основаны на разных подходах. Либо на задании необходимой точности оценивания параметров. Либо на явной формулировке альтернативных гипотез, между которыми необходимо сделать выбор. Либо на учете погрешностей измерений (методы статистики интервальных данных). Ни один из этих подходов нельзя применить в рассматриваемом случае.

Минимальный из обычно используемых объемов выборки n в маркетинговых или социологических исследованиях — 100, максимальный — до 5000 (обычно в исследованиях, охватывающих ряд регионов страны, т.е. фактически разбивающихся на ряд отдельных исследований — как в ряде исследований ВЦИОМ). По данным Института социологии Российской академии наук [2], среднее число анкет в социологическом исследовании не превышает 700. Поскольку стоимость исследования растет, по крайней мере, как линейная функция объема выборки, а точность повышается как квадратный корень из этого объема, то верхняя граница объема выборки определяется обычно из экономических соображений. Объемы пилотных исследований (т.е. проводящихся впервые, предварительно или как первые в сериях подобных) обычно ниже, чем объемы исследований по обкатанной программе.

Нижняя граница определяется тем, что в минимальной по численности анализируемой подгруппе должно быть несколько десятков человек (не менее 30), поскольку по ответам попавших в эту подгруппу необходимо сделать обоснованные заключения, например, о предпочтениях соответствующей подгруппы в совокупности всех потребителей растворимого кофе. Учитывая деление опрашиваемых на продавцов и покупателей, на мужчин и женщин, на четыре градации по возрасту и восемь — по роду занятий, наличие 5– 6 подсказок во многих вопросах, приходим к выводу о том, что в рассматриваемом проекте объем выборки должен быть не менее 400– 500. Вместе с тем существенное превышение этого объема было признано нецелесообразным, поскольку исследование являлось пилотным.

Поэтому в проекте «Потребители растворимого кофе» объем выборки был выбран равным 500. Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что в соответствии с целями исследования выборку следует считать репрезентативной.

1.4. Два прикладных выборочных исследования

Продолжим обсуждение выборочного исследования потребителей растворимого кофе.

Организация опроса. Интервьюерами работали молодые люди — студенты первого курса экономико-математического факультета Московского государственного института электроники и математики (технического университета) и лицея No.1140, проходившие обучение по экономике, всего 40 человек, имеющих специальную подготовку по изучению рынка и проведению маркетинговых опросов потребителей и продавцов (в объеме 8 часов). Опрос продавцов проводился на рынках г. Москвы, действующих в Лужниках, у Киевского вокзала и в других местах. Опрос покупателей проводился на рынках, в магазинах, на улицах около киосков и ларьков, а также в домашней и служебной обстановке.

Большое внимание уделялось качеству заполнения анкет. Интервьюеры были разбиты на шесть бригад, бригадиры персонально отвечали за качество заполнения анкет. Второй уровень контроля осуществляла специально созданная «группа организации опроса», третий происходил при вводе информации в базу данных. Каждая анкета заверена подписями интервьюера и бригадира, на ней указано место и время интервьюирования. Поэтому необходимо признать высокую достоверность собранных анкет.

Обработка данных. В соответствии с целью исследования основной метод первичной обработки данных — построение частотных таблиц для ответов на отдельные вопросы. Кроме того, проводилось сравнение различных групп потребителей и продавцов, выделенных по социально-демографическим данным, с помощью критериев проверки однородности выборок (см. ниже). При более углубленном анализе применялись различные методы статистики объектов нечисловой природы (более 90% маркетинговых и социологических данных имеют нечисловую природу [4]). Использовались средства графического представления данных.

Итоги опроса. Итак, по заданию одной из торговых фирм были изучены предпочтения покупателей и мелкооптовых продавцов растворимого кофе. Совместно с представителями заказчика был составлен опросный лист (анкета типа социологической) из 16 основных вопросов и 4 дополнительных, посвященных социально-демографической информации. Опрос проводился в форме интервью с 500 покупателями и продавцами кофе. Места опроса — рынки, лотки, киоски, продуктовые и специализированные магазины. Другими словами, были охвачены все виды мест продаж кофе. Интервью проводили более 40 специально подготовленных (примерно по 8-часовой программе) студентов, разбитых на 7 бригад. После тщательной проверки бригадирами и группой обработки информация была введена в специально созданную базу данных. Затем проводилась разнообразная статистическая обработка, строились таблицы и диаграммы, проверялись статистические гипотезы и т.д. Заключительный этап — осмысление и интерпретация данных, подготовка итогового отчета и предложений для заказчиков.

Технология организации и проведения маркетинговых опросов лишь незначительно отличается от технологии социологических опросов, многократно описанной в литературе. Так, мы предпочли использовать полуоткрытые вопросы, в которых для опрашиваемого дан перечень подсказок, а при желании он может высказать свое мнение в свободной форме. Не уложившихся в подсказки оказалось около 5 % , их мнения были внесены в базу данных и анализировались дополнительно. Для повышения надежности опроса о наиболее важных с точки зрения маркетинга моментах спрашивалось в нескольких вопросах. Были вопросы — ловушки, с помощью которых контролировалась «осмысленность» заполнения анкеты. Например, в вопросе: «Что Вы цените в кофе: вкус, аромат, крепость, наличие пенки…» ловушкой является включение «крепости» — ясно, что крепость зависит не от кофе самого по себе, а от его количества в чашке. В ловушку никто из 500 не попался — никто не отметил «крепость». Этот факт свидетельствует о надежности выводов проведенного опроса. Мы считали нецелесообразным задавать вопрос об уровне доходов (поскольку в большинстве случаев отвечают «средний», что невозможно связать с определенной величиной). Вместо такого вопроса мы спрашивали: «Как часто Вы покупаете кофе: по мере надобности или по возможности?». Поскольку кофе не является дефицитным товаром, первый ответ свидетельствовал о наличии достаточных денежных средств, второй — об их ограниченности (потребитель не всегда имел возможность позволить себе купить банку растворимого кофе).

Стоимость подобных исследований — 5–10 долларов США на одного обследованного. При этом трудоемкость (и стоимость) начальной стадии — подготовки анкеты и интервьюеров, пробный опрос и др. — 30% от стоимости исследования. Стоимость непосредственно опроса — тоже 30%, ввод информации в компьютер и проведение расчетов, построение таблиц и графиков — 20%, интерпретация результатов, подготовка итогового отчета и предложений для заказчиков — 20%. Таким образом, стоимость собственно опроса в два с лишним раза меньше стоимости остальных стадий исследования. И в выполнении работы участвуют различные специалисты. На первой стадии — в основном нужны высококвалифицированные аналитики. На второй — многочисленные интервьюеры, в роли которых могут выступать студенты и школьники, прошедшие конкретный курс обучения в 8–10 часов. На третьей — работа с компьютером (надо уметь строить и обсчитывать электронные таблицы или базы данных, использовать статистические пакеты, составлять и печатать таблицы и диаграммы и т.п.). На четвертой — опять в основном нужны высококвалифицированные аналитики.

Приведем некоторые из полученных результатов.

а) В отличие от западных потребителей, отечественные не отдавали предпочтения стеклянным банкам по сравнению с жестяными. Поскольку жестяные банки дешевле стеклянных, то можно было порекомендовать (в 1994 г., когда проходил опрос) с целью снижения расходов закупку кофе в жестяных банках.

б) Отечественные потребители готовы платить на 10–20% больше за экологически безопасный кофе более высокого качества, имеющий сертификат Минздрава и символ экологической безопасности на упаковке.

в) Средний объем потребления растворимого кофе одной семьей — 850 г в месяц.

г) Потребители растворимого кофе могут быть разделены на классы (в другой терминологии — кластеры). Есть «продвинутые» потребители, обращающие большое внимание на качество и экологическую безопасность, марку и страну производства, терпимо относящиеся к изменению цены. Эти «тонкие ценители» — в основном женщины от 30 до 50 лет, служащие, менеджеры, научные работники, преподаватели, врачи (т.е. лица с высшим образованием), пьющие кофе как дома, так и на работе, причем «кофейный ритуал» зачастую входит в процедуру деловых переговоров или совещаний. Противоположный по потребительскому поведению класс состоит из мужчин двух крайних возрастных групп — школьников и пенсионеров. Для них важна только цена, что очевидным образом объясняется недостатком денег.

Результаты были использованы заказчиком в рекламной кампании. В частности, обращалось внимание на сертификат Минздрава и на экологическую безопасность упаковки.

Оценивание функции спроса и моделирование рынка. Выпускник программы «Топ-менеджер» Академии народного хозяйства при Правительстве Российской Федерации А.А. Пивень в 2003 г. оценил функцию спроса на продукцию своего предприятия. Расчет и установление оптимальной цены на изделие с точки зрения максимизации прибыли был произведен по описанному выше методу. В табл. 1.6 приведена функция ожидаемого спроса в зависимости от цены. Как подсчитал А.А. Пивень, уровень издержек на производство 1 изделия составляет 42824,7 руб. (1350 у.е.). Для удобства все расчеты будем производить в условных единицах.

Таблица 1.6

Функция ожидаемого спроса в зависимости от цены

№ п/п	Цена, у.е.	Объем продаж в год, шт.	Издержки на объем производства	Выручка, у.е.	Прибыль, у.е.
1	1 400	1 600	2 160 000	2 240 000	80 000
2	1 500	1 500	2 025 000	2 250 000	225 000
3	1 600	1 200	1 620 000	1 920 000	300 000
4	1 700	1 000	1 350 000	1 700 000	350 000
5	1 800	720	972 000	1 246 000	324 000
6	1 900	500	675 000	950 000	275 000
7	2 000	320	432 000	640 000	208 000
8	2 100	170	229 500	357 000	127 500
9	2 200	110	148 500	242 000	93 500

Как видно из приведенных расчетов, оптимальная цена на подъемник должна находиться в диапазоне 1600–1700 у.е.

На основе многомерной регрессионной зависимости методом наименьших квадратов (см. ниже главу 3) была построена математическая модель рынка. Она довольно точно отражает реальное положение дел. При исходной цене 1650 у.е. продажи ориентировочно должны составить 1010 шт. На рис. 1.1 приведена кривая спроса.

Эти расчеты были сделаны при допущении, что издержки не меняются в течение длительного промежутка времени. Однако, в реальных условиях постоянный рост стоимости энергоресурсов и непрекращающаяся инфляция издержек (рост затрат на сырье, материалы, комплектующие изделия, рабочую силу) приводит к увеличению издержек. Поэтому А.А. Пивень проанализировал оптимальный объем выпуска при их различных значениях. Данные его расчетов приведены в табл.1.7. Поскольку инфляция в нашей стране (см. ниже главу 4) заметно искажает стоимостные характеристики, используем для их описания условные единицы (у.е.).

Таблица 1.7

Прибыль в зависимости от цены и издержек

№ п/п	Цена, у.е.	Объем продаж, шт.	Прибыль (тыс. у.е.) при издержках на единицу продукции, у.е.							
			1350	1400	1450	1500	1550	1600	1650	1700
1	1 400	1600	80	0	-	-	-	-	-	-
2	1 500	1500	225	150	75	0	-	-	-	-
3	1 600	1200	300	240	180	120	60	0	-	-
4	1 700	1000	350	300	250	200	150	100	50	0
5	1 800	720	324	288	252	216	180	144	108	72
6	1 900	500	275	250	225	200	175	150	125	100
7	2 000	320	208	192	176	160	144	128	112	96
8	2 100	170		119		102	93,5	85	76,5	68
9	2 200	110	93,5	88	82,5	77	71,5	66	60,5	55

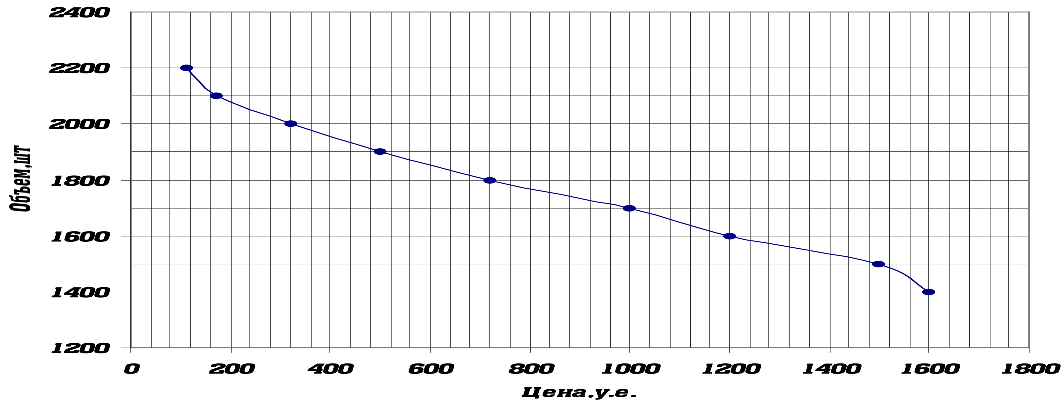

Рис.1.1. Кривая спроса на изделие

Для удобства рассмотренные результаты оптимальных объемов производства при соответствующих ценах приведены в табл.1.8.

Таблица 1.8

Оптимальные выпуск и цена в зависимости от издержек

Издержки	1350	1400	1450	1500	1550	1600	1650	1700
Оптимальный выпуск	1000	1000	720	720	720	500	500	500
Цена	1700	1700	1800	1800	1800	1900	1900	1900

Как видно из табл.1.8, увеличение издержек ведет к снижению оптимального выпуска при росте цены. Хотя изменение издержек на 50 у.е. может не сразу привести к изменению цены. Необоснованная цена может "переключить" большую группу потребителей на другое, аналогичное изделие, имеющее сходный по уровню набор технических характеристик, но более низкую рыночную цену.

По данным функции спроса (табл.1.7) проведем расчет эластичности спроса по цене. Под ценовой эластичностью спроса понимается степень реагирования рыночного спроса на изменение цен. В классическом понимании эластичность спроса по цене показывает, насколько изменится объем спроса при изменении цены на 1%. Спрос квалифицируется как эластичный, если понижение цены вызывает такой рост оборота, при котором увеличение объема продаж с лихвой компенсирует более низкие цены. Если же понижение цены, приводя к некоторому увеличению объема продаж, тем не менее, не ведет к увеличению оборота или даже уменьшает его, то такой спрос называется неэластичным. Коэффициент ценовой эластичности спроса определяется по формуле:

$$K_{ЦЭС} = \frac{(Q_1 - Q_2) / (Q_1 + Q_2)}{(P_1 - P_2) / (P_1 + P_2)},$$

где Q_1, Q_2 — значения объема продаж; P_1, P_2 — значения цены изделия.

В рассматриваемом случае $K_{ЦЭС}$ будет различен на протяжении всей функции спроса (рис.1.1). Однако, произведем расчет на той части кривой (в том диапазоне), где присутствует расчетная цена подъемника, а именно: $Q_1 = 1200$ шт.; $Q_2 = 720$ шт.; $P_1 = 1600$ у.е.; $P_2 = 1800$у.е. В этом случае

$$K_{ЦЭС} = \frac{(1200-720)/(1200+720)}{(1600-1800)/(1600+1800)} = -4,25.$$

Коэффициент $K_{ЦЭС}$ имеет отрицательный знак и абсолютную величину, значительно превышающую 1. Это говорит о сильной обратной зависимости объемов продаж от цены. Спрос на подъемник эластичен. Валовая выручка увеличивается при снижении цены и уменьшается при ее повышении. Компании необходимо быть готовой к тому, что покупатели очень чутко реагируют на всякое повышение цены на изделие значительным снижением объемов закупок. Как отмечает А.А. Пивень, снижение эластичности спроса на изделие возможно только при общем росте благосостояния населения страны и в частности, значительного роста доходной части бюджетов промышленных предприятий.

1.5. Проверка однородности двух биномиальных выборок

Проверка однородности — одна из базовых проблем, решаемых статистическими методами. Она часто обсуждается в литературе, а методы проверки однородности применяются при решении многих практических задач. Например, как сравнить две группы — мужчин и женщин, молодых и пожилых, и т.п.? В маркетинге это важно для сегментации рынка. Если две группы не отличаются по ответам, значит, их можно объединить в один сегмент и проводить по отношению к ним одну и ту же маркетинговую политику, в частности, осуществлять одни и те же рекламные воздействия. Если же две группы различаются, то и относиться к ним надо по-разному. Это — представители двух разных сегментов рынка, требующих разного подхода при борьбе за их завоевание.

Обсуждаемая далее постановка задачи в статистических терминах такова. Рассматривается вопрос с двумя возможными ответами, например, «да» и «нет». В первой группе из n_1 опрошенных m_1 человек сказали «да», а во второй группе из n_2 опрошенных m_2 сказали «да». В вероятностной модели предполагается, что m_1 и m_2 — биномиальные случайные величины $B(n_1, p_1)$ и $B(n_2, p_2)$ соответственно. Запись $B(n, p)$ означает, что случайная величина m имеет биномиальное распределение с параметрами n — объем выборки и p — вероятность определенного ответа (скажем, ответа «да»). Такая случайная величина может быть представлена в виде суммы $m = X_1 + X_2 + ... + X_n$, где случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы, одинаково распределены, принимают два значения 1 и 0, причем $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1-p$, $i=1,2,...,n$.

Однородность двух групп означает, что соответствующие им вероятности равны, неоднородность — что эти вероятности отличаются. В терминах прикладной математической статистики задача ставится так: необходимо проверить гипотезу однородности

$$H_0: p_1 = p_2$$

при альтернативной гипотезе о наличии эффекта

$$H_1: p_1 \neq p_2$$

(Иногда представляют интерес односторонние альтернативные гипотезы $H_1^{'} : p_1 > p_2$

и $H_1^{''} : p_1 < p_2$.)

Оценкой вероятности p_1 является частота $p_1^* = m_1/n_1$, а оценкой вероятности p_2 является частота $p_2^* = m_2/n_2$. Даже при совпадении вероятностей p_1 и p_2 частоты, как правило, различаются. Как говорят, «по чисто случайным причинам». Рассмотрим случайную величину $p_1^* - p_2^*$. Тогда

$$M(p_1^* - p_2^*) = p_1 - p_2,\ D(p_1^* - p_2^*) = \\ = p_1 (1 - p_1)/n_1 + p_2(1-p_2)/n_2.$$

Из теоремы Муавра-Лапласа и теоремы о наследовании сходимости (см. «Приложение 1» к настоящему учебнику или [3, п.2.4]) следует, что

$$\lim_{n_1\to\infty, n_2\to\infty} P\left\{\frac{p_1^* - p_2^* - M(p_1^* - p_2^*)}{\sqrt{D(p_1^* - p_2^*)}} \le x\right\} = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Для практического применения этого соотношения следует заменить неизвестную статистику дисперсию разности частот на оценку этой дисперсии:

$$D^*(p_1^* - p_2^*) = p^*_1\,(1 - p^*_1)/n_1 + p^*_2\,(1 - p^*_2)/n_2.$$

(Могут использоваться и другие оценки рассматриваемой дисперсии, например, при справедливости нулевой гипотезы — по объединенной выборке.) С помощью указанной выше математической техники можно показать, что при такой замене предельное распределение не меняется:

$$\lim_{n_1\to\infty, n_2\to\infty} P\left\{\frac{p_1^* - p_2^* - M(p_1^* - p_2^*)}{\sqrt{D^*(p_1^* - p_2^*)}} \le x\right\} = \Phi(x).$$

При справедливости гипотезы однородности (т.е. при отсутствии эффекта) $M(p_1^* - p_2^*) = 0$. Поэтому правило принятия решения при проверке однородности двух выборок выглядит так:

1. Вычислить статистику

$$Q = \frac{p_1^* - p_2^*}{\sqrt{\dfrac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \dfrac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}}.$$

2. Сравнить значение модуля статистика $|Q|$ с граничным значением K. Если $|Q| \leqslant K$, то принять гипотезу однородности H_0. Если же $|Q| > K$, то заявить об отсутствии однородности и принять альтернативную гипотезу H_1.

Граничное значение K определяется выбором уровня значимости статистического критерия проверки однородности. Из приведенных выше предельных соотношений следует, что при справедливости гипотезы однородности H_0 для уровня значимости $\alpha = P(|Q| > K)$ имеем (при $n_1 \to \infty$, $n_2 \to \infty$)

$$\alpha \to 1 - \Phi(K) + \Phi(-K) = 2 - 2F(K)$$

Следовательно, граничное значение в зависимости от уровня значимости целесообразно выбирать из условия

$$K = K(\alpha) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Здесь $\Phi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к функции стандартного нормального распределения. В социально-экономических исследованиях наиболее распространен 5% уровень значимости, т.е. $\alpha = 0{,}05$. Для него $K = 1{,}96$.

Пример 2. Пусть в первой группе из 500 опрошенных мужчин ответили «да» 200, а во второй группе из 700 опрошенных женщин сказали «да» 350. Есть ли разница по доле отвечающих «да» между генеральными совокупностями, представленными этими двумя группами?

Для установления взаимопонимания с маркетологом уберем из формулировки примера относящийся к теории статистики термин «генеральная совокупность». Получим следующую постановку.

Пусть из 500 опрошенных мужчин ответили «да, я люблю пепси-колу» 200, а из 700 опрошенных женщин 350 сказали «да, я люблю пепси-колу». Есть ли разница между мужчинами и женщинами по доле отвечающих «да» на вопрос о любви к пепси-коле?

В рассматриваемом примере нужные для расчетов величины таковы: $n_1 = 500$, $p^*_1 = 200/500 = 0{,}4$; $n_{21} = 700$, $p^*_2 = 350/700 = 0{,}5$.

Вычислим статистику

$$Q = \frac{0,4 - 0,5}{\sqrt{\dfrac{0,4 \cdot 0,6}{500} + \dfrac{0,5 \cdot 0,5}{700}}} = \frac{-0,1}{\sqrt{\dfrac{0,24}{500} + \dfrac{0,25}{700}}} = \frac{-0,1}{\sqrt{0,00048 + 0,0003571}}$$

$$= \frac{-0,1}{\sqrt{0,0008371}} = \frac{-0,1}{0,029} = -3,45.$$

Поскольку $|Q| = 3{,}45 > 1{,}96$, то необходимо отклонить нулевую гипотезу и принять альтернативную. Таким образом, мужчины и женщины отличаются по рассматриваемому признаку — любви к пепси-коле.

Необходимо отметить, что результат проверки гипотезы однородности зависит не только от частот, но и от объемов выборок. Предположим, что частоты (доли) зафиксированы, а объемы выборок растут. Тогда числитель статистики Q не меняется, а знаменатель уменьшается, значит, вся дробь возрастает. Поскольку знаменатель стремится к 0, то дробь возрастает до бесконечности и рано или поздно превзойдет любую границу. Есть только одно исключение — когда в числителе стоит 0. Следовательно, при строгом подходе к формулировкам вывод статистика должен выглядеть так: «различие обнаружено» или «различие не обнаружено». Во втором случае различие, возможно, было бы обнаружено при увеличении объемов выборок.

Как и для доверительного оценивания вероятности, во ВЦИОМ разработаны две полезные таблицы, позволяющие оценить вызванные чисто случайными причинами допустимые расхождения между частотами в группах. Эти таблицы рассчитаны при выполнении нулевой гипотезы однородности и соответствуют ситуациям, когда частоты близки к 50% (табл.1.9) или к 20% (табл.1.10). Если наблюдаемые частоты — от 30% до 70%, то рекомендуется пользоваться первой из этих таблиц, если от 10% до 30% или от 70% до 90% — то второй. Если наблюдаемые частоты меньше 10% или больше 90%, то теорема Муавра-Лапласа и основанные на ней асимптотические формулы дают не очень хорошие приближения, целесообразно применять иные, более продвинутые математические средства, в частности, приближения с помощью распределения Пуассона.

В условиях разобранного выше примера табл.1.9 дает допустимое расхождение 7%. Действительно, объем первой группы 500 отсутствует в таблице, но строки, соответствующие объемам 400 и 600, совпадают для первых двух столбцов слева. Эти столбцы соответствуют объемам второй группы 750 и 600, между которыми расположен объем 700, данный в примере. Он ближе к 750, поэтому берем величину расхождения, стоящую на пересечении первого столбца и второй (и третьей) строк, т.е. 7%. Поскольку реальное расхождение (10%) больше, чем 7%, то делаем вывод о наличии значимого различия между группами. Естественно, этот вывод совпадает с полученным ранее расчетным путем.

Таблица 1.9

Допустимые расхождения (в %) между частотами в двух группах, когда наблюдаются частоты от 30% до 70%

Объемы групп	750	600	400	200	100
750	6	7	7	10	12
600	7	8	8	11	13
400	7	8	10	11	14
200	10	11	11	13	16
100	12	13	14	16	18

Таблица 1.10

Допустимые расхождения (в %) между частотами в двух группах, когда наблюдаются частоты от 10% до30% или от 70% до 90%

Объемы групп	750	600	400	200	100
750	5	5	6	8	10
600	5	6	7	8	10
400	6	7	8	9	11
200	8	8	9	10	12
100	10	10	11	12	14

Как и в случае табл.1.5, значения в таблицах 1.9 и 1.10 несколько больше, чем рассчитанные по приведенным выше формулам. Дело в том, что таблицы ВЦИОМ связаны не с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$, а с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$, которому соответствует граничное значение 2,58.

Допустимое расхождение $\Delta = \Delta(\alpha)$ между частотами нетрудно получить расчетным путем. Для этого достаточно воспользоваться формулой для статистики Q и определить, при каком максимальном расхождении частот все еще делается вывод о том, что верна гипотеза однородности. Следовательно, допустимое расхождение $\Delta = \Delta(\alpha)$ находится из уравнения

$$K(\alpha) = \frac{\Delta(\alpha)}{\sqrt{\dfrac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \dfrac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}}.$$

Таким образом,

$$\Delta(\alpha) = K(\alpha)\sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}.$$

Для данных примера 2 $\Delta = \Delta(\alpha) = 1{,}96 \times 0{,}029 = 0{,}057$, или 5,7%, для уровня значимости 0,05.

Для других уровней значимости надо использовать другие коэффициенты $K(\alpha)$. Так, $K(0{,}01) = 2{,}58$ для уровня значимости 1% и $\mathrm{K}(0{,}10) = 1{,}64$ для уровня значимости 10%. Для данных примера $\Delta = \Delta(\alpha) = 2{,}58 \times 0{,}029 = 0{,}7482 \approx 0{,}075$, или 7,5%, для уровня значимости 0,01. Если округлить до ближайшего целого числа процентов, то получим 7%, как при использовании таблицы 9 выше.

Анализ таблиц 1.9 и 1.10 показывает, что для обнаружения эффекта (констатации различия генеральных совокупностей) частоты должны отличаться не менее чем на 6%. А при некоторых объемах выборок — более чем на 10%, например, при объемах выборок 100 и 100 — на 19%. Если же частоты отличаются на 5% или менее, можно сразу сказать, что статистический анализ приведет к выводу о том, что различие не обнаружено (для выборок объемов не более 750).

В связи со сказанным возникает вопрос: каково типовое отличие частот в двух выборках из одной и той же совокупности? Разность частот в этом случае имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию

$$p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)=\frac{p(1-p)(n_1+n_2)}{n_1 n_2}.$$

Величина $p(1\text{-}p)$ достигает максимума при $p = 1/2$, и этот максимум равен 1/4. Если $p = 1/2$, а объемы двух выборок совпадают и равны 500, то дисперсия разности частот равна

$$\sigma^2 = \frac{0,25\times 1000}{500\times 500} = \frac{250}{250\times 1000} = \frac{1}{1000}.$$

Следовательно, среднее квадратическое отклонение σ равно 0,032, или 3,2%. Поскольку для стандартной нормальной случайной величины в 50% случаев ее значение не превосходит по модулю 0,67 (а в 50% случаев — больше 0,67), то типовой разброс равен 0,67 σ, а в рассматриваемом случае — 2,1%.

Приведенные соображения дают возможность построить метод контроля правильности (корректности) проведения повторных опросов. Если частоты излишне устойчивы, значения при повторных опросах слишком близки — это подозрительно! Возможно, нарушены правила проведения опросов, выборки не являются случайными, ответы фальсифицированы, и т.д.

Литература

1. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В*. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

2. Опыт применения ЭВМ в социологических исследованиях. — М.: Институт социологических исследований АН СССР, Советская социологическая ассоциация, 1977. — 158 с.

3. *Орлов А.И*. Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

4. *Орлов А.И*. Общий взгляд на статистику объектов нечисловой природы. — В сб.: Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. — М.: Наука, 1985. — С.58–92.

5. *Орлов А.И*. Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

6. *Сэндидж Ч., Фрайбургер В., Ротцолл К*. Реклама: теория и практика: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1989. — 630 с.

7. Ядов В.А. Стратегии и методы качественного анализа данных. — Журнал «Социология: методология, методы, математические модели». 1991. №1. С.14–31.

Контрольные вопросы и задачи

1. Почему выборочные исследования необходимы для решения многих практических задач?

2. Из партии продукции объема N = 100 изделий, содержащей D = 10 дефектных изделий, извлекают выборку объема n = 5. Для биномиальной и гипергеометрической моделей выборки рассчитайте распределения числа дефектных изделий в выборке, постройте и сравните функции распределения.

3. Какова роль теоремы Муавра-Лапласа в теории выборочных исследований?

В задачах 4– 8 выберите наиболее подходящий вариант ответа.

4. При какой цене максимальна прибыль в условиях пункта 1.1, если издержки (оптовая цена товара) равны 12?

А) 30; Б) 32; В) 35.

5. При исследовании предпочтений потребителей открытые вопросы:

А) труднее для опрашиваемых, но легче для обработки;

Б) легче для опрашиваемых, но труднее для обработки.

6. Пусть из 657 опрошенных 289 сказали «да». Доверительный интервал для доли отвечающих «да» в генеральной совокупности, соответствующий доверительной вероятности 0,95, таков:

А) [0,245; 0,398]; Б) [0,435; 0,445]; В) [0,405; 0,556];

Г) [0,402; 0,478]; Д) [0,247; 0,633] .

7. Из 513 юношей 193 любят «Сникерс», а из 748 девушек — 327. Значение статистического критерия Q для проверки гипотезы о равенстве вероятностей равно:

А) 3,38; Б) –2,176; В) 0,25; Г) 12,56; Д) –0,173.

8. В условиях задачи 7 гипотеза об одинаковой привлекательности «Сникерса» для юношей и девушек (на уровне значимости 0,05):

А) принимается; Б) отклоняется.

9. Как понятие допустимого расхождения между частотами можно использовать при планировании выборочных исследований?

10. Рассчитайте коэффициент ценовой эластичности спроса по данным табл.1.1 при цене p = 35 и при цене p = 40.

Темы докладов, рефератов, исследовательских работ

1. Проведите выборочное исследование с целью построения оценки функции ожидаемого спроса на выбранный Вами товар (услугу).

2. Найдите адекватное приближение функции спроса в табл.1.1 с помощью метода наименьших квадратов.

3. Постройте экономико-математическую модель оптимизации цены при заданных функциях спроса (в зависимости о цены) и издержек (в зависимости от выпуска).

4. Сопоставьте теорию квотной выборки с теорией простой случайной выборки.

5. Рассмотрите статистическую теорию доверительного оценивания и проверки гипотез о равенстве вероятностей в случае нескольких возможных ответов (соответственно, с использованием мультиномиального распределения вместо биномиального).

6. В каких случаях может быть использована теория малых выборок (теорема Пуассона) для доверительного оценивания вероятности определенного ответа?

Глава 2

ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ

В последнем разделе предыдущей главы шла речь о проверке однородности двух биномиальных выборок. В настоящей главе продолжим обсуждать проблему однородности — рассмотрим систему эконометрических моделей и методов, предназначенных для проверки однородности двух независимых выборок. Подобные системы разработаны в прикладной статистике [21] для решения многих иных задач статистического анализа данных, однако объем настоящего учебника не позволяет провести подробный разбор всех таких задач и систем. Настоящую главу следует рассматривать как пример разработки системы эконометрических моделей и методов, предназначенной для решения определенной задачи.

2.1. Система моделей проверки однородности двух независимых выборок

В прикладных исследованиях часто возникает необходимость выяснить, различаются ли генеральные совокупности, из которых взяты две независимые выборки. Например, надо выяснить, зависят ли от способа упаковки потребительские качества подшипников, измеренные через год после хранения. Или: влияет ли система оплаты на производительность труда.

В математико-статистических терминах постановка задачи такова: имеются две выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, требуется проверить их однородность. Напомним, что выборка моделируется как совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин. Термин «однородность» уточняется ниже.

Противоположным понятием является «различие» (или «наличие эффекта»). Можно переформулировать задачу: требуется проверить, есть ли различие между выборками. Если различия нет, то для дальнейшего изучения две рассматриваемые выборки часто объединяют в одну.

Например, в маркетинге важно выделить сегменты потребительского рынка. Если установлена однородность двух выборок мнений потребителей, то возможно объединение сегментов, из которых эти выборки взяты, в один. В дальнейшем это позволит осуществлять по отношению к ним одинаковую маркетинговую политику (проводить одни и те же рекламные мероприятия и т.п.). Если же установлено различие, то поведение потребителей в двух сегментах различно, объединять эти сегменты нельзя, и могут понадобиться различные маркетинговые стратегии, своя для каждого из этих сегментов.

Вероятностная модель порождения данных. Для обоснованного выбора и применения организационно-экономических (эконометрических, статистических) методов необходимо прежде всего построить и обосновать вероятностную модель порождения данных. При проверке однородности двух выборок общепринята модель, в которой $x_1, x_2, \ldots, x_m$ рассматриваются как результаты m независимых наблюдений некоторой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, неизвестной статистику, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — как результаты n независимых наблюдений, вообще говоря, другой случайной величины Y с функцией распределения $G(x)$, также неизвестной статистику. Предполагается также, что наблюдения в одной выборке не зависят от наблюдений в другой, поэтому выборки и называют независимыми.

Возможность применения модели в конкретной реальной ситуации требует обоснования. Независимость и одинаковая распределенность результатов наблюдений, входящих в выборку, могут быть установлены или исходя из методики проведения конкретных наблюдений, или путем проверки статистических гипотез независимости и одинаковой распределенности с помощью соответствующих критериев проверки статистических гипотез [2].

Если проведено $(m+n)$ измерений объемов продаж в $(m+n)$ торговых точках, то описанную выше модель, как правило, можно применять. Если же, например, x_i и y_i — объемы продаж одного и того же товара до и после определенного рекламного воздействия, то рассматриваемую модель применять нельзя, поскольку очевидно, что эти объемы продаж определяются не только и не столько рекламным воздействием, сколько особенностями конкретной торговой точки (ее расположением, продолжительностью работы, репутацией и т.д.). В последнем случае используют модель связанных выборок. В ней обычно строят новую выборку $z_i = x_i - y_i$ и используют статистические методы анализа одной выборки, а не двух. Методы проверки однородности для связанных выборок рассматриваются в [21].

При дальнейшем изложении принимаем описанную выше вероятностную модель двух выборок.

Классификация моделей по типам данных. В предыдущей главе рассматривались результаты измерений по альтернативным признакам. Каждое из чисел x_i и y_i принимало одно из двух значений, для определенности, 0 или 1. Если респондент дает ответ «да» на вопрос анкеты, то $x_i = 1$, если его ответ — «нет», то $x_i = 0$. Такие признаки называют также дихотомическими или бинарными. Распределение элементов первой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ описывается одним числом $P(x_i = 1) = p_1$. Распределение элементов второй выборки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ также описывается одним числом $P(y_i = 1) = p_2$. Проверка однородности двух независимых выборок состоит в проверке статистической гипотезы H_0: $p_1 = p_2$ при альтернативной гипотезе о наличии эффекта H_1: $p_1 \neq p_2$. Метод проверки гипотезы H_0 разобран в конце предыдущей главы. Есть и другие методы проверки этой гипотезы, основанные на использовании иных статистик [16].

Обобщением альтернативного признака является такой, значением которого является элемент некоторого конечного множества. Например, респондент выбирает не из двух ответов («да» или «нет»), а из трех («да», «нет», «может быть»). Пусть множество значений состоит из k элементов (их часто называют градациями признака). Занумеруем их натуральными числами $j = 1, 2, \ldots, k$. Для простоты записи будем считать, что элемент выборки — это *номер* значения (градации), которое принимает признак. Тогда распределение случайного элементов двух выборок со значениями в одном и том же конечном множестве описывается вероятностями

$$P(x_i = j) = p_j(1),\ P(y_i = j) = p_j(2),\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, в отличие от альтернативного признака каждое распределение задается не одном числом, а k числами, неотрицательными и в сумме составляющими 1, так что «свободных параметров» всего $(k - 1)$.

Подобные k-значные признаки обычно возникают при измерениях по качественным шкалам (наименований и порядковой — см. главу 6 ниже). Однако иногда они возникают в результате группировки значений количественных (числовых) признаков. Будем называть их «признаки с конечным числом градаций». Проверка однородности для таких признаков — это проверка сложной гипотезы

$$H_0 :\ p_j(1) = p_j(2), j = 1, 2, \ldots, k .$$

Альтернативную гипотезу наиболее общего вида можно записать так:

$$H_1 : \sum_{j=1}^{k} (p_j(1) - p_j(2))^2 > 0 .$$

Третий тип рассматриваемых здесь данных — количественные признаки, значения которых — действительные числа, а функции распределения непрерывны.

Уточнения понятия однородности для количественных данных. Понятие «однородность», т. е. «отсутствие различия», может быть формализовано в терминах вероятностной модели различными способами.

Наивысшая степень однородности (абсолютная однородность) достигается, если обе выборки взяты из одной и той же генеральной совокупности, т. е. справедлива нулевая гипотеза

$$H_0 : F(x) = G(x) \textit{ при всех } x.$$

Отсутствие абсолютной однородности означает, что верна альтернативная гипотеза, согласно которой

$$H_1 : F(x_0) \neq G(x_0)$$

хотя бы при одном значении аргумента x_0. Если гипотеза H_0 принята, то выборки можно объединить в одну, если нет — то нельзя.

В некоторых случаях целесообразно проверять не совпадение функций распределения, а лишь совпадение некоторых характеристик случайных величин X и Y — математических ожиданий, медиан, дисперсий, коэффициентов вариации и др. (однородность тех или иных характеристик). Например, однородность математических ожиданий означает, что справедлива гипотеза

$$H'_0 : M(X) = M(Y),$$

где $M(X)$ и $M(Y)$ — математические ожидания случайных величин X и Y, результаты наблюдений над которыми составляют первую и вторую выборки соответственно. Доказательство различия между выборками в рассматриваемом случае — это доказательство справедливости альтернативной гипотезы

$$H'_1 : M(X) \neq M(Y).$$

Если гипотеза H_0 верна, то и гипотеза H'_0 верна, но из справедливости H'_0, вообще говоря, не следует справедливость H_0. Математические ожидания могут совпадать для различающихся между собой функций распределения. В частности, если в результате обработки выборочных данных принята гипотеза H'_0, то отсюда *не следует,* что две выборки можно объединить в одну. Однако в ряде ситуаций целесообразна проверка именно гипотезы H'_0. Например, пусть функция спроса на определенный товар или услугу оценивается путем опроса потребителей (первая выборка) или с помощью данных о продажах (вторая выборка). Тогда маркетологу важно проверить гипотезу об отсутствии систематических расхождений результатов этих двух методов, т.е. гипотезу о равенстве математических ожиданий. Другой пример — из производственного менеджмента. Пусть изучается эффективность управления бригадами рабочих на предприятии с помощью двух организационных схем, результаты наблюдения — объем производства продукции или услуг на одного члена бригады (производительность), а показатель эффективности организационной схемы — средний (по предприятию) объем производства на одного рабочего. Тогда для сравнения эффективности препаратов достаточно проверить гипотезу H'_0.

Иногда нужно проверить однородность дисперсий. Например, различаются ли два способа измерения по величине случайной ошибки — т.е. по дисперсии случайных погрешностей.

Рассмотрим проверку однородности для признаков с конечным числом градаций, а затем — для количественных признаков.

2.2. Проверка согласия и однородности для признаков с конечным числом градаций

Проведем в качестве примера обработку данных, относящихся к известной всем тематике. Дональд А. Уиндзор подсчитал, сколько ученых родилось под каждым из знаков Зодиака (журнал «Химия и жизнь», 1976, №4, с.112–113). Им были взяты две научные специальности — таксономия (т.е. теория классификация биологических организмов) и молекулярная биология. Результаты приведены в табл.2.1.

Видно, что под знаком Овна родилось гораздо больше молекулярных биологов, чем под любым другим — почти в 1,5 раза больше, чем приходится в среднем на один знак Зодиака. Таксономисты чаще рождались под знаком Рака, а реже всего — под знаком Скорпиона. Для этой специальности среднее число рождений больше числа рождений под знаком Скорпиона почти в 1,6 раза, а отношение максимального числа в столбце таксономистов к минимальному равно 38/18 ≈ 2,1 (!). Разве все эти факты не доказывают, что специальность ученого и знак Зодиака, под которым он родился, связаны между собой, что молекулярные биологи, скажем, не случайно чаще всего рождаются под знаком Овна?

Таблица 2.1

Специальности ученых и знаки Зодиака их дней рождений

Номер (i)	Знак Зодиака	Количество таксонометристов ($m_i(1)$)	Количество молекулярных биологов ($m_{2i}(2)$)
1	Овен	28	58
2	Телец	30	32
3	Близнецы	31	39
4	Рак	38	41
5	Лев	32	32
6	Дева	31	42
7	Весы	25	41
8	Скорпион	18	41
9	Стрелец	27	40
10	Козерог	25	33
11	Водолей	26	35
12	Рыба	31	36
Всего (n_i)		342	470
В среднем на знак Зодиака ($n_i/12$)		28,5	39,17

Нет, не доказывают. Почему превышение над средним уровнем в 1,5 раза считать большим, а, к примеру, в 1,1 раза — малым? Может быть, и то, и другое вызывается число случайными причинами?

Как теория организационно-экономического моделирования рекомендует поступать? Прежде всего необходимо сформулировать гипотезу, которую будем проверять. Или несколько гипотез. А для этого построим вероятностно-статистическую модель, в терминах которой сформулируем гипотезу. Модель нужна, чтобы дальнейшие расчеты опирались на теорию математической статистики.

Принимаем, что для каждой из двух генеральных совокупностей ученых (таксономистов и молекулярных биологов) существуют 12 вероятностей событий, состоящих в рождении ученого под определенным знаком Зодиака. Обозначим $p_1(1)$ вероятность того, что таксономист родился под знаком Овна, $p_2(1)$ — что он родился под знаком Тельца, и так далее до $p_{12}(1)$ — вероятности рождения под знаком Рыбы (знаки Зодиака перенумерованы в табл.2.1). Кроме того, считаем, что n_1 = 342 изученных Дональдом А. Уиндзором таксономиста выбраны из всей совокупности ученых этой специальности таким способом, который никак не связан с днями и месяцами их рождений — ведь иначе мы не можем распространить выводы, полученные по выборке, на всю совокупность. Короче, рассматриваемая выборка является представительной.

Итак, вероятностно-статистическая модель такова. Считаем, что в столбце таксономистов табл.2.1 записаны результаты n_1 = 342 опытов, проведенных независимо друг от друга, в каждом из которых осуществляется одно из 12 событий — с вероятностью $p_1(1)$ качественный признак принимает значение 1 (интерпретируется как «родился под знаком Овна), с вероятностью $p_2(1)$ признак принимает значение 2 (т.е. «родился под знаком Тельца»), и так далее до значения 12 («родился под знаком Рыбы»), которое этот признак принимает с вероятностью $p_{12}(1)$. Модель для описания результатов n_2 = 470 опытов, приведенных в столбце молекулярных биологов, отличается только другими обозначениями вероятностей, а именно, $p_1(2)$, $p_2(2)$, …, $p_{12}(2)$ для рождений под знаками Овна, Тельца, …, Рыбы соответственно.

Самая простая гипотеза, которая приходит в голову, такова: шансы родиться под каждым знаком Зодиака одинаковы. Поскольку всего знаков 12, то имеется 1 шанс из 12 родиться под знаком Овна, 1 шанс из 12 — под знаком Тельца, и т.д. Значит, все вероятности равны между собой и потому равны 1/12. Речь идет о нулевых гипотезах

$$H_0(1) : p_1(1) = p_2(1) = \ldots = p_{12}(1) = \frac{1}{12},$$

$$H_0(2) : p_1(2) = p_2(2) = \ldots = p_{12}(2) = \frac{1}{12}.$$

При взгляде на табл.2.1 возникает, скажем, гипотеза, что для таксономистов $p_4(1)$ больше $p_8(1)$ (вероятность родиться под знаком Рака больше, чем вероятность родиться под знаком Скорпиона). Если эта гипотеза справедлива, то знаки Зодиака не являются равноправными, и реальный мир устроен более сложно, чем в случае равных вероятностей. По принципу экономии мышления (известен также как «бритва Оккама»*) необходимо сначала проверить, не соответствуют ли всё-таки данные табл.2.1 гипотезе равноправности шансов, и только в случае обнаружения противоречия переходить к более сложным гипотезам.

Итак, мы пришли к следующим задачам проверки статистических гипотез: не противоречат ли данные табл.2.1 гипотезам $H_0(1)$ и $H_0(2)$?

Критерий χ^2 (хи-квадрат) для проверки согласия с фиксированным распределением. В математической статистике со времен великого английского статистика Карла Пирсона (1857–1936) рассматривают задачу проверки согласия эмпирического распределения с теоретическим. А именно, пусть

* «Бритва (лезвие) О'ккама» — методологический принцип, получивший название по имени английского монаха-францисканца, философа-номиналиста Вильяма Оккама (Ockham, Ockam, Occam; ок. 1285–1349). В упрощенном виде он гласит: «*Не следует множить сущее без необходимости*» (либо «*Не следует привлекать новые сущности без самой крайней на то необходимости*»). Этот принцип формирует базис методологического редукционизма. Его называют также *принципом бережливости*, или *законом экономии*.

в результате опыта осуществляется один и только один из k исходов. Пусть эти исходы занумерованы натуральными числами от 1 до k, и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — вероятности этих исходов. Пусть проведены n опытов, в результате которых m_1 раз осуществился первый исход, m_2 раз — второй, ..., m_k раз — k-й исход. По этим статистическим данным требуется проверить статистическую гипотезу о том, что вероятности исходов опыта совпадают с заданными:

$$H_0 : p_j = p_{j0}, j = 1, 2, \ldots, k .$$

Альтернативная гипотеза, которую обычно рассматривают, состоит в том, что нарушается хотя бы одно из этих равенств. Ее можно записать так:

$$H_1 : \sum_{j=1}^{k} \left(p_j - p_{j0}\right)^2 > 0 .$$

Для проверки этой гипотезы согласия эмпирического распределения с теоретическим естественно исходить из того, что при ее справедливости случайная величина m_j имеет биномиальное распределение с вероятностью p_{j0} и числом опытов n, а потому ее математическое ожидание равно np_{j0}. Следовательно, отклонение эмпирического распределения от теоретического описывается величинами $m_j - np_{j0}$. С некоторой естественной точки зрения [13] наилучший способ проверки согласия основан на введенной Карлом Пирсоном статистике критерия хи-квадрат, рассчитываемой по формуле

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(m_j - np_{j0})^2}{np_{j0}} .$$

При росте объема выборки n распределение только что введенной статистики критерия хи-квадрат стремится к известному в теории вероятностей распределению хи-квадрат с $(k - 1)$ степенью свободы, т.е. к распределению суммы $(k - 1)$ независимых случайных величин, каждая из которых — квадрат стандартной нормальной случайной величины (с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1). Исходя из этого математического утверждения, для проверки гипотезы согласия по уровню значимости α находят квантиль $\chi^2(\alpha, k-1)$ порядка $(1-\alpha)$ распределения хи-квадрат с $(k-1)$ степенью свободы (с помощью распространенных таблиц, имеющихся, в частности, в сборнике [2], или с помощью различных программных продуктов). Правило принятия решений при проверке гипотезы согласия таково: если рассчитанное по эмпирическим данным значение статистики хи-квадрат таково, что

$$\chi^2 \leqslant \chi^2(\alpha, k-1),$$

то гипотезу согласия принимают на заданном уровне значимости (и констатируют, что эмпирические данные не противоречат гипотезе $H_0 : p_j = p_{j0}, j = 1, 2, \ldots, k$); если же

$$\chi^2 > \chi^2(\alpha, k-1),$$

то гипотезу согласия отклоняют (и принимают альтернативную гипотезу).

Замечание 1. Чтобы можно было опираться на предельное соотношение, требуется, чтобы величины np_{j0} не были малыми. Для этого достаточно, чтобы $np_{j0} \geqslant 5$ при всех $j = 1, 2, \ldots, k$.

Замечание 2. В математической статистике еще несколько критериев проверки гипотез называются «критериями хи-квадрат», например, критерий для проверки однородности распределений значений конечнозначных признаков (см. ниже), критерий для проверки независимости признаков на основе таблицы сопряженности. Причина проста — распределения статистик этих критериев сходятся к распределению хи-квадрат.

Замечание 3. Если соответствующее опыту распределение мало отличается от теоретического, то при сравнительно небольшом объеме выборки скорее всего будет принята гипотеза согласия. При увеличении же объема выборки может быть обнаружено отличие распределения от теоретического. Поэтому в случае

$$\chi^2 \leqslant \chi^2(\alpha, k-1),$$

точнее формулировать вывод так: эмпирические данные не позволяют отклонить гипотезу согласия, в то время как в случае $\chi^2 > \chi^2(\alpha, k - 1)$ констатируем, что отклонение обнаружено.

Замечание 4. Если значение статистики χ^2 мало, то данные, возможно, фальсифицированы. Это утверждение основано на то, что при справедливости гипотезы согласия распределение статистики близко к хи-квадрат распределению, а потому осуществление маловероятных событий — слишком большого или слишком малого значения статистики χ^2 — практически невозможно.

Вернемся к данным табл.2.1. Соответственно числу знаков Зодиака $k = 12$. Проверяем гипотезу равновероятности, т.е. частный случай гипотезы согласия с $p_{j0} = 1/12$, $j = 1, 2, \ldots, 12$. Из последней строки табл.2.1 следует, что приведенное в замечании 1 условие выполнено.

Проведя расчеты по приведенной выше формуле, получаем, что для таксономистов $\chi^2 = 9{,}36$, а для молекулярных биологов $\chi^2 = 13{,}85$. По таблицам [2] (и любым другим) для числа степеней свободы $k - 1 = 12 - 1 = 11$ квантиль распределения хи-квадрат порядка 0,9 есть 17,3, а квантиль порядка 0,95 равен 19,7. Это значит, что гипотеза согласия принимается (не отклоняется) при уровнях значимости) 0,1, а также 0,05 и всех иных, используемых на практике. По тем же таблицам

$$P\left(\chi^2 \le 9{,}36\right) = 0{,}41, \quad P\left(\chi^2 \le 13{,}85\right) = 0{,}76\ ,$$

так что значения статистики попадают в среднюю часть распределения — они не слишком велики и не слишком малы.

Итак, данные табл.2.1 *идеально согласуются с равномерным распределением* моментов рождения по знакам Зодиака как для таксонометристов, так и для молекулярных биологов. Отклонения от равномерности, отмеченные в начале раздела, объясняются чисто случайными причинами.

Критерий χ^2 (хи-квадрат) проверки однородности распределений признаков с конечным числом градаций. Может быть, хотя гипотезу равноправности знаков Зодиака нельзя отвергнуть ни для одной группы ученых, но зато эти группы сильно различаются *между собой*, отклоняясь о среднего, как сказать, в разные стороны? Речь идет, очевидно, о проверке однородности распределений двух признаков с конечным числом градаций. Опишем соответствующую вероятностно-статистическую модель.

Пусть в результате опыта осуществляется один и только один из k исходов. Пусть эти исходы занумерованы натуральными числами от 1 до k. Пусть $p_1(1)$, $p_2(1)$, …, $p_k(1)$ — вероятности этих исходов для одной генеральной совокупности, а $p_1(2)$, $p_2(2)$, …, $p_k(2)$ — вероятности этих же исходов для другой генеральной совокупности. Другими словами, рассмотрим два признака (две случайные величины) X и Y, возможные значения которых — рассматриваемые k исходов. Распределения этих признаков таковы:

$$P(X = j) = p_i(1),\ P(Y = j) = p_i(2),\ j = 1, 2, \dots , k.$$

Пусть для признака X проведены $n(1)$ независимых опытов, в результате которых $m_1(1)$ раз осуществился первый исход, $m_2(1)$ раз — второй, …, $m_k(1)$ раз — k-ый исход. Другими словами, проведено $n(1)$ независимых испытаний, в результате которых получено $n(1)$ независимых значений случайной величины X, причем эта случайная величина $m_1(1)$ раз приняла значение 1, $m_2(1)$ раз — значение 2, …, $m_k(1)$ раз — значение k. Аналогичным образом получены статистические данные для случайной величины Y — проведено $n(2)$ независимых испытаний, в которых эта случайная величина $m_1(2)$ раз приняла значение 1, $m_2(2)$ раз — значение 2, …, $m_k(2)$ раз — значение k. Причем испытания для X проведены независимо от испытаний для Y.

По этим статистическим данным, т.е. по двум независимым выборкам значений двух конечнозначных случайных величин, требуется проверить статистическую гипотезу о том, что распределения этих случайных величин совпадают. Другими словами, проверить гипотезу однородности распределений, т.е. .сложную гипотезу

$$H_0 : p_j(1) = p_j(2),\ j = 1, 2, \dots , k.$$

В качестве альтернативной обычно рассматривают гипотезу о том, что хотя бы одно из этих k равенств не выполнено. Эту гипотезу наиболее общего вида можно записать так:

$$H_1 : \sum_{j=1}^{k} (p_j(1) - p_j(2))^2 > 0 .$$

Статистика критерия хи-квадрат имеет вид [22, с.275]

$$\chi^2 = \chi^2(n(1), n(2)) = n(1)n(2) \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{m_j(1) + m_j(2)} \left(\frac{m_j(1)}{n(1)} - \frac{m_j(2)}{n(2)} \right)^2 .$$

Известно, что при росте объемов выборок $n(1)$ и $n(2)$ распределение статистики $\chi^2(n(1), n(2))$ стремится к распределению хи-квадрат с $(k - 1)$ степенями свободы. Поэтому при больших $n(1)$ и $n(2)$ правило принятия решений при проверке гипотезы однородности таково: если рассчитанное по эмпирическим данным значение статистики хи-квадрат таково, что

$$\chi^2(n(1), n(2)) \le \chi^2(\alpha, k-1) ,$$

то гипотезу однородности принимают на заданном уровне значимости; если же

$$\chi^2(n(1), n(2)) > \chi^2(\alpha, k-1) ,$$

то гипотезу однородности отклоняют (и принимают альтернативную гипотезу). Здесь, как и ранее, $\chi^2(\alpha, k - 1)$ — это квантиль порядка $(1 - \alpha)$ распределения хи-квадрат с $(k - 1)$ степенью свободы.

Замечание. Более точно, в случае $\chi^2(n(1), n(2)) > \chi^2(\alpha, k - 1)$ можно констатировать, что обнаружено различие распределений (как говорят, доказано наличие эффекта (на данном уровне значимости), в том время как в случае случае $\chi^2(n(1), n(2)) \leqslant \chi^2(\alpha, k - 1)$ можно сказать лишь, что эффект не обнаружен (нет оснований отвергнуть предположение о совпадении распределений).

Расчет по данным табл. 2.1 дает, что

$$\chi^2 = 14{,}22 < (0{,}1;\ 11),\ P(\chi^2 \leqslant 14{,}22) = 0{,}78.$$

Таким образом, на любом из практически используемых уровней значимости констатируем однородность распределений. Наблюдаемое значение статистики (т.е. 14,22) попадает в среднюю часть распределения — при справедливости нулевой гипотезы значение статистики в 78% случаев меньше наблюдаемого и в 22% случаев больше наблюдаемого. Итак, не обнаружено никакой связи между специальностью ученого и знаком Зодиака, под которым он рожден.

2.3. Проверка однородности характеристик для количественных признаков

Перейдем к следующему элементу системы моделей, описанной в первом разделе настоящей главы — к моделям, нацеленным на проверку равенства характеристик двух распределений, из которых взяты две независимые выборки. Исходим из общепринятой базовой модели, в которой элементы первой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ рассматриваются как результаты m независимых наблюдений некоторой числовой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$, неизвестной статистику, а элементы второй выборки $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — как результаты n независимых наблюдений, вообще говоря, другой случайной величины Y с функцией распределения $G(x)$, также неизвестной статистику. Предполагается также, что наблюдения в одной выборке не зависят от наблюдений в другой, поэтому выборки и называют независимыми.

Замечание. Обратите внимание, что объемы выборок обозначены здесь не так, как в предыдущем разделе. Это сделано специально, а именно, для того, чтобы у читателя не создавался ложный стереотип, мешающий воспринимать многообразие литературных источников с соответствующим многообразием обозначений.

Традиционный метод проверки однородности (критерий Стьюдента). Для дальнейшего критического разбора опишем традиционный статистический метод проверки однородности. Он широко использовался в течение всего XX в. Хотя к настоящему времени этот метод устарел (см. ниже), но продолжает встречаться в учебной литературе, и потому и применяться для анализа конкретных данных.

При использовании традиционного метода проверки однородности вычисляют выборочные средние арифметические в каждой выборке

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i ,$$

затем выборочные дисперсии

$$s_x^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(x_i - \bar{x}\right)^2, \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2,$$

и статистику Стьюдента *t,* на основе которой принимают решение,

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{m(m+n-2)}{m+n}} . \tag{2.1}$$

По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $(m+n-2)$ из таблиц распределения Стьюдента (см., например, [2]) находят критическое значение $t_{кр}$. Если $|t| > t_{кр}$, то гипотезу однородности (отсутствия различия) отклоняют, если же $|t| \leqslant t_{кр}$, то принимают. (При односторонних альтернативных гипотезах вместо условия $|t| > t_{кр}$ проверяют, что $t > t_{кр}$; эту постановку рассматривать не будем, так как в ней нет принципиальных отличий от обсуждаемой здесь.)

В литературе зачастую описывается только приведенный выше алгоритм. Этого недостаточно для квалифицированного анализа статистических данных. Рассмотрим условия применимости традиционного метода проверки однородности, основанного на использовании статистики *t* Стьюдента, а также обсудим современные методы проверки однородности двух выборок.

Классические условия применимости критерия Стьюдента. Согласно математико-статистической теории должны быть выполнены два классических условия применимости критерия Стьюдента, основанного на использовании статистики t, заданной формулой (2.1):

а) результаты наблюдений имеют нормальные распределения:

$$F(x) = N(x;\, m_1,\, \sigma_1^2),\; G(x) = N(x;\, m_2,\, \sigma_2^2)$$

с математическими ожиданиями m_1 и m_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 в первой и во второй выборках соответственно;

б) дисперсии результатов наблюдений в первой и второй выборках совпадают:

$$D(X) = \sigma_1^2 = D(Y) = \sigma_2^2.$$

Если условия а) и б) выполнены, то нормальные распределения $F(x)$ и $G(x)$ отличаются только математическими ожиданиями, а поэтому *обе* гипотезы H_0 и H'_0 (см. раздел 2.1) сводятся к гипотезе

$$H''_0 : m_1 = m_2,$$

а *обе* альтернативные гипотезы H_1 и H'_1 сводятся к гипотезе

$$H''_1 : m_1 \neq m_2 .$$

Если условия а) и б) выполнены, то статистика t при справедливости H''_0 имеет распределение Стьюдента с $(m + n - 2)$ степенями свободы. Только в этом случае описанный выше традиционный метод обоснован безупречно. Если хотя бы одно из условий а) и б) не выполнено, то нет никаких оснований считать, что статистика t имеет распределение Стьюдента, поэтому применение традиционного метода, строго говоря, не обосновано. Обсудим возможность проверки этих условий и последствия их нарушений.

Имеют ли результаты наблюдений нормальное распределение? Как подробно показано в литературе (см., например, [21, гл.5.1], [20, гл.4.1]), априори нет оснований предполагать нормальность распределения результатов экономических, технико-экономических, технических, медицинских и иных наблюдений. Следовательно, нормальность надо проверять. Разработано много статистических критериев для проверки нормальности распределения результатов наблюдений [2]. Однако проверка нормальности — более сложная и трудоемкая статистическая процедура, чем проверка однородности (как с помощью статистики t Стьюдента, так и с использованием непараметрических критериев, рассматриваемых ниже).

Для достаточно надежного установления нормальности требуется весьма большое число наблюдений. В указанных выше литературных источниках показано, что для того, чтобы гарантировать, что функция распределения результатов наблюдений отличается от некоторой нормальной не более чем на 0,01 (при любом значении аргумента), требуется порядка 2500 наблюдений. В большинстве технических, экономических, медицинских и иных исследований число наблюдений существенно меньше.

Как отмечалось в литературе, есть и еще одна общая причина отклонений от нормальности: любой результат наблюдения записывается конечным (обычно 2– 5) количеством цифр, а с математической точки зрения вероятность такого события равна 0. Точнее, для случайной величины с непрерывной плотностью распределения вероятность попадания в счетное множество рациональных чисел равна 0. Следовательно, при статистической обработке данных в организационно-экономических исследованиях распределение результатов наблюдений практически всегда более или менее отличается от нормального распределения.

Последствия нарушения условия нормальности. Если условие а) не выполнено, то распределение статистики t не является распределением Стьюдента. Однако можно показать, используя Центральную предельную теорему теории вероятностей и теоремы о наследовании сходимости [21, гл.4], что при справедливости H'_0 и условия б) распределение статистики t при росте объемов выборок приближается к стандартному нормальному распределению $\Phi(x) = N(x; 0, 1)$. К этому же распределению приближается распределение Стьюдента при возрастании числа степеней свободы. Другими словами, несмотря на нарушение условия нормальности традиционный метод (критерий Стьюдента) можно использовать (при определенных условиях!) для проверки гипотезы H'_0 при больших объемах выборок. При этом вместо таблиц распределения Стьюдента достаточно пользоваться таблицами стандартного нормального распределения $\Phi(x)$.

Сформулированное в предыдущем абзаце утверждение справедливо для любых функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ таких, что $M(X) = M(Y)$, $D(X) = D(Y)$ и выполнены некоторые внутриматематические условия, обычно считающиеся справедливыми в реальных задачах. Если же $M(X) \neq M(Y)$, то нетрудно вычислить, что при больших объемах выборок

$$P(t \leqslant x) \approx \Phi(x - a_{mn}), \tag{2.2}$$

где

$$a_{nm} = \frac{\sqrt{nm}\left[M(X) - M(Y)\right]}{\sqrt{Dm(X) + Dn(Y)}}. \tag{2.3}$$

Формулы (2.2)–(2.3) позволяют приближенно вычислять мощность t-критерия (точность возрастает при увеличении объемов выборок m и n).

О проверке условия равенства дисперсий. Иногда условие б) вытекает из методики получения результатов наблюдений, например, когда с помощью одного и того же прибора или методики m раз измеряют характеристику первого объекта и n раз — второго, а параметры распределения погрешностей измерения при этом не меняются. Однако ясно, что в постановках большинства исследовательских и практических задач нет основании априори предполагать равенство дисперсий.

Целесообразно ли проверять равенство дисперсий статистическими методами, например, как это иногда предлагают, с помощью F-критерия Фишера? Этот критерий основан на нормальности распределений результатов наблюдений. А от нормальности неизбежны отклонения (см. выше). Причем хорошо известно, что в отличие от t-критерия распределение F-критерия Фишера сильно меняется при малых отклонениях от нормальности [3]. Кроме того, F-критерий отвергает гипотезу $D(X) = D(Y)$ лишь при большом различии выборочных дисперсий. Так, для данных [2] о двух группах результатов химических анализов отношение выборочных дисперсий равно 1,95, т.е. существенно отличается от 1. Тем не менее, гипотеза о равенстве теоретических дисперсий принимается при применении F-критерия на 1%-м уровне значимости. Следовательно, при проверке однородности применение F-критерия для предварительной проверки равенства дисперсий с целью обоснования возможности использования критерия Стьюдента нецелесообразно.

Итак, в большинстве технических, экономических, медицинских и иных задач условие б) нельзя считать выполненным, а проверять его пред проверкой однородности нецелесообразно.

Последствия нарушения условия равенства дисперсий. Если объемы выборок m и n велики, то можно показать, что распределение статистики t описывается с помощью только математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$, дисперсий $D(X)$, $D(Y)$ и отношения объемов выборок, а именно:

$$P(t \leqslant x) \approx \Phi(b_{mn}x - a_{mn}), \tag{2.4}$$

где a_{mn} определено формулой (2.3),

$$b_{nm}^2 = \frac{\lambda D(X) + D(Y)}{D(X) + \lambda D(Y)}, \quad \lambda = \frac{m}{n}. \tag{2.5}$$

Если $b_{mn} \neq 1$, то распределение статистики t отличается от распределения, заданного формулой (2.2), полученной в предположении равенства дисперсий. Когда $b_{mn} = 1$? В двух случаях — при $m = n$ и при $D(X) = D(Y)$. Таким образом, при больших и равных объемах выборок требовать выполнения условия б) нет необходимости. Кроме того, ясно, что если объемы выборок мало различаются, то b_{mn} близко к 1. Так, для данных [2] о двух группах результатов химических анализов имеем $b^*_{mn} = 0,987$, где b^*_{mn} — оценка b_{mn}, полученная заменой в формуле (2.5) теоретических дисперсий на их выборочные оценки.

Область применимости традиционного метода проверки однородности с помощью критерия Стьюдента. Подведем итоги рассмотрения t-критерия. Он позволяет проверять гипотезу H'_0 о равенстве математических ожиданий, но не гипотезу H_0 о том, что обе выборки взяты из одной и той же генеральной совокупности. Классические условия применимости критерия Стьюдента в подавляющем большинстве технических, экономических, медицинских и иных задач не выполнены. Тем не менее, при больших и примерно равных объемах выборок его можно применять. При конечных объемах выборок традиционный метод носит неустранимо приближенный характер.

Критерий Крамера-Уэлча равенства математических ожиданий. Вместо критерия Стьюдента целесообразно для проверки H'_0 использовать критерий Крамера-Уэлча [12, с.492], основанный на статистике

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{m} + \dfrac{s_y^2}{n}}} = \frac{\sqrt{mn}\left(\overline{x} - \overline{y}\right)}{\sqrt{ns_x^2 + ms_y^2}} \,. \qquad (2.6)$$

Критерий Крамера-Уэлча имеет прозрачный смысл — разность выборочных средних арифметических для двух выборок делится на естественную оценку среднего квадратического отклонения этой разности. Естественность указанной оценки состоит в том, что неизвестные статистику дисперсии заменены их выборочными оценками. Из многомерной центральной предельной теоремы и из теорем о наследовании сходимости [21, гл.4] вытекает, что при росте объемов выборок распределение статистики T Крамера-Уэлча сходится к стандартному нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Итак, при справедливости H'_0 и больших объемах выборок распределение статистики T приближается с помощью стандартного нормального распределения $\Phi(x)$, из таблиц которого и следует брать критические значения.

При $m = n$, как следует из формул (2.1) и (2.6), $t = T$. При $m \neq n$ этого равенства нет. В частности, при s^2_x в формуле (2.1) стоит множитель $(m - 1)$, а в формуле (2.6)- множитель n.

Если $M(X) \neq M(Y)$, то при больших объемах выборок

$$P(T \leqslant X) \approx \Phi\,(x - c_{mn}), \tag{2.7}$$

где

$$c_{mn} = \frac{\sqrt{mn}\left[M(X) - M(Y)\right]}{\sqrt{nD(X) + mD(Y)}}. \tag{2.8}$$

При $m = n$ или $D(X) = D(Y)$, согласно формулам (2.3) и (2.8), $a_{mn} = c_{mn}$, в остальных случаях равенства нет.

Из асимптотической нормальности статистики T, формул (2.7) и (2.8) следует, что правило принятия решения для критерия Крамера-Уэлча выглядит так:

— если $|T| \leqslant \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, то гипотеза однородности (равенства) математических ожиданий принимается на уровне значимости α,

— если же $|T| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, то гипотеза однородности (равенства) математических ожиданий отклоняется на уровне значимости α.

В прикладной статистике наиболее часто применяется уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Тогда значение модуля статистики T Крамера-Уэлча надо сравнивать с граничным значением $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = 1{,}96$.

Из сказанного выше следует, что применение критерия Крамера-Уэлча при анализе организационно-экономических данных более обосновано, чем применение критерия Стьюдента. Дополнительное преимущество критерия Крамера-Уэлча по сравнению с критерием Стьюдента — не требуется равенства дисперсий $D(X) = D(Y)$. Распределение статистики T не является распределением Стьюдента, однако и распределение статистики t, как показано выше, не является таковым в реальных ситуациях.

Распределение статистики T при объемах выборок $m = n = 6, 8, 10, 12$ и различных функциях распределений выборок $F(x)$ и $G(x)$ изучено нами совместно с Ю.Э. Камнем и Я.Э. Камнем методом статистических испытаний (Монте-Карло). Рассмотрены различные варианты функций распределения $F(x)$ и $G(x)$. Результаты (частично опубликованы в статье [8]) показывают, что даже при таких небольших объемах выборок точность аппроксимации предельным стандартным нормальным распределением вполне удовлетворительна. Поэтому представляется целесообразным во всех тех случаях, когда в соответствии с устаревшими литературными источниками критерий Стьюдента, заменить его на критерий Крамера-Уэлча. Конечно, такая замена потребует переделки ряда нормативно-технических и методических документов, исправления учебников и учебных пособий для вузов.

Пример 1. Пусть объем первой выборки $m = 120$, $\bar{x} = 13{,}7$, $s_x = 5{,}3$. Для второй выборки $n = 540$, $\bar{y} = 14{,}1$, $s_y = 8{,}4$. Вычислим величину статистики Крамера-Уэлча

$$T = \frac{\sqrt{mn}(\bar{x}-\bar{y})}{\sqrt{ns_x^2 + ms_y^2}} = \frac{\sqrt{120 \times 541}(13,7-14,1)}{\sqrt{541 \times 5,3^2 + 120 \times 8,4^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{64920}(-0,4)}{\sqrt{541 \times 28,09 + 120 \times 70,56}} = \frac{254,79 \times (-0,4)}{\sqrt{15196,69 + 8467,2}} =$$

$$\frac{-101,916}{\sqrt{23663,89}} = \frac{-101,916}{153,83} = -0,66.$$

Поскольку полученное значение по абсолютной величине меньше 1,96, то гипотеза однородности математических ожиданий принимается на уровне значимости 0,05.

Непараметрические методы проверки однородности. В большинстве управленческих, технических, экономических, медицинских и иных задач представляет интерес не проверка равенства математических ожиданий или иных характеристик распределения, а обнаружение различия генеральных совокупностей, из которых извлечены выборки, т.е. проверка гипотезы H_0. Методы проверки гипотезы H_0 позволяют обнаружить не только изменение математического ожидания, но и любые иные изменения функции распределения результатов наблюдений при переходе от одной выборки к другой (увеличение разброса, появление асимметрии и т. д.). Как установлено выше, методы, основанные на использовании статистик t Стьюдента и T Крамера-Уэлча, не позволяют проверять гипотезу H_0. Априорное предположение о принадлежности функций распределения

$F(x)$ и $G(x)$ к какому-либо определенному параметрическому семейству (например, семействам нормальных, логарифмически нормальных, распределений Вейбулла-Гнеденко, гамма-распределений и др.), как также показано выше, обычно нельзя достаточно надежно обосновать. Поэтому для проверки H_0 следует использовать методы, пригодные при любом виде $F(x)$ и $G(x)$, т.е. непараметрические методы. (Напомним, что термин «непараметрический метод» означает, что при использовании этого метода нет необходимости предполагать, что функции распределения результатов наблюдений принадлежат какому-либо определенному параметрическому семейству.)

Для проверки гипотезы H_0 разработано много непараметрических методов — критерии Смирнова, типа омега-квадрат (Лемана — Розенблатта), Вилкоксона (Манна-Уитни), Ван-дер-Вардена, Сэвиджа, хи-квадрат и др. [5, 21, 24]. Распределения статистик всех этих критериев при справедливости H_0 не зависят от конкретного вида совпадающих функций распределения $F(x) \equiv G(x)$. Следовательно, таблицами точных и предельных (при больших объемах выборок) распределений статистик этих критериев и их процентных точек [21, 24] можно пользоваться при любых непрерывных функциях распределения результатов наблюдений.

Каким из непараметрических критериев пользоваться? Как известно [3], для выбора одного из нескольких критериев необходимо сравнить их мощности, определяемые видом альтернативных гипотез. Сравнению мощностей критериев посвящена обширная литература.

Хорошо изучены свойства критериев при альтернативной гипотезе сдвига

$$H_{1c} : G(x) = F(x-d),\ d \neq 0.$$

Критерии Вилкоксона, Ван-дер-Вардена и ряд других ориентированы для применения именно в этой ситуации. Если m раз измеряют характеристику одного объекта и n раз — другого, а функция распределения погрешностей измерения произвольна, но не меняется при переходе от объекта к объекту (это более жесткое требование, чем условие равенства дисперсий), то рассмотрение гипотезы H_{1c} оправдано. Однако в большинстве организационно-экономических, технических, медицинских и иных исследований нет оснований считать, что функции распределения, соответствующие выборкам, различаются только сдвигом.

2.4. Двухвыборочный критерий Вилкоксона

Рассмотрим подробнее часто используемый непараметрический критерий Вилкоксона. В частности, покажем (и это — основной теоретический результат настоящего раздела), что двухвыборочный критерий Вилкоксона (в литературе его называют также критерием Манна-Уитни) предназначен для проверки гипотезы

$$H_0: P(X < Y) = 1/2,$$

где X — случайная величина, распределенная как элементы первой выборки, а Y — случайная величина, распределенная как элементы второй выборки. Это — непараметрическая гипотеза. Но из нее не следует, что функции распределения двух выборок совпадают. Обратное, конечно, верно: если X и Y одинаково распределены, то $P(X < Y) = \mathrm{S}$.

В описанной выше вероятностной модели двух независимых выборок без ограничения общности можно считать, что объем первой из них не превосходит объема второй, $m \leqslant n$, в противном случае выборки можно поменять местами. Обычно предполагается, что функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны и строго возрастают. Из непрерывности этих функций следует, что с вероятностью 1 все $m + n$ результатов наблюдений различны. При рассмотрении реальных статистических данных иногда наблюдаются совпадения результатов наблюдений, но сам факт их наличия — свидетельство нарушений предпосылок только что описанной базовой математической модели.

Расчет значения статистики критерия Вилкоксона и правило принятия решений. Статистика S двухвыборочного критерия Вилкоксона определяется следующим образом. Все элементы объединенной выборки $X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ упорядочиваются в порядке возрастания. Элементы первой выборки $X_1, X_2, \ldots, X_m$ занимают в общем вариационном ряду места с номерами $R_1, R_2, \ldots, R_m$, другими словами, имеют ранги $R_1, R_2, \ldots, R_m$ (напомним, что ранг — это номер в упорядоченном ряду). Тогда статистика Вилкоксона — это сумма рангов элементов первой выборки

$$S = R_1 + R_2 + \ldots + R_m.$$

Статистика U Манна-Уитни определяется как число пар (X_i, Y_j) таких, что $X_i < Y_j$, среди всех mn пар, в которых первый элемент — из первой выборки, а второй — из второй. Как известно [5, с.160],

$$U = mn + m(m+1)/2 - S.$$

Поскольку S и U линейно связаны, то обычно говорят не о двух критериях — Вилкоксона и Манна-Уитни, а об одном — критерии Вилкоксона (Манна-Уитни).

Критерий Вилкоксона — один из самых известных инструментов непараметрической статистики (наряду с критериями на основе статистик типа Колмогорова-Смирнова, омега-квадрат и коэффициентами ранговой корреляции). Свойствам этого критерия и таблицам его критических значений уделяется место во многих монографиях по математической и прикладной статистике (см., например, [2, 5, 21, 24]).

Однако в литературе имеются и неточные утверждения относительно возможностей критерия Вилкоксона. Так, отдельные авторы полагают, что с его помощью можно обнаружить любое различие между функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$. По мнению других, этот критерий нацелен на проверку равенства медиан распределений, соответствующих выборкам. И то, и другое неверно. Это будет ясно из дальнейшего изложения.

Введем некоторые обозначения. Пусть $F^{-1}(t)$ — функция, обратная к функции распределения $F(x)$. Она определена на отрезке $[0; 1]$. Положим $L(t) = G(F^{-1}(t))$. Поскольку $F(x)$ непрерывна и строго возрастает, то $F^{-1}(t)$ и $L(t)$ обладают теми же свойствами. Важную роль в дальнейшем изложении будет играть величина $a = P(X < Y)$. Как нетрудно показать,

$$a = P\left(X < Y\right) = \int_0^1 t dL\left(t\right).$$

Введем также параметры

$$b^2 = \int_0^1 L^2\left(t\right) td - \left(1 - a\right)^2, \quad g^2 = \int_0^1 t^2 dL\left(t\right) - a^2.$$

Тогда математические ожидания и дисперсии статистик Вилкоксона и Манна-Уитни согласно [5, с.160] выражаются через введенные величины:

$M(U) = mna$, $M(S) = mn + m(m+1)/2 - M(U) = mn(1 - a) + m(m+1)/2$,

$$D(S) = D(U) = mn\,[(n - 1)\, b^2 + (m - 1)\, g^2 + a(1 - a)]. \quad (2.9)$$

Когда объемы обеих выборок безгранично растут, распределения статистик Вилкоксона и Манна-Уитни являются асимптотически нормальными (см., например, [5, гл. 5 и 6]) с параметрами, задаваемыми формулами (2.9).

Если выборки полностью однородны, т.е. их функции распределения совпадают, другими словами, справедлива гипотеза

$$H_0\colon F(x) = G(x) \text{ при всех } x, \quad (2.10)$$

то $L(t) = t$ для t из отрезка [0, 1], $L(t) = 0$ для всех отрицательных t и $L(t) = 1$ для $t > 1$, соответственно $a = 1/2$. Подставляя в формулы (2.9), получаем, что

$$M(S) = m(m+n+1)/2,\ D(S) = mn(m+n+1)/12. \quad (2.11).$$

Следовательно, распределение нормированной и центрированной статистики Вилкоксона

$$T = (S - m(m+n+1)/2)\ (mn(m+n+1)/12)^{-1/2} \quad (2.12)$$

при росте объемов выборок приближается к стандартному нормальному распределению (с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1).

Из асимптотической нормальности статистики T следует, что при больших объемах выборок правило принятия решения для критерия Вилкоксона выглядит так:

— если $|T| \leqslant \Phi^{-1}\left(1-\alpha/2\right)$, то гипотеза (2.10) однородности (тождества) функций распределений принимается на уровне значимости α,

— если же $|T| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$, то гипотеза (2.10) однородности (тождества) функций распределений отклоняется на уровне значимости α.

В прикладной статистике наиболее часто применяется уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Тогда значение модуля статистики T Вилкоксона надо сравнивать с граничным значением $\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = 1{,}96$.

Пример 1. Пусть даны две выборки. Первая содержит $m = 12$ элементов 17; 22; 3; 5; 15; 2; 0; 7; 13; 97; 66; 14. Вторая содержит $n = 14$ элементов 47; 30; 2; 15; 1; 21; 25; 7; 44; 29; 33; 11; 6; 15. Проведем проверку однородности функций распределения двух выборок с помощью критерия Вилкоксона.

Первым шагом является построение общего вариационного ряда для элементов двух выборок (табл.2.2). Общий вариационный ряд — в средней строке. Ниже для каждого его элемента указано, из какой выборки он взят. Построение верхней строки «Ранги» описано далее.

Таблица 2.2

Общий вариационный ряд для элементов двух выборок

Ранги	1	2	3,5	3,5	5	6	7	8,5	8,5	10	11	12	14
Элементы выборок	0	1	2	2	3	5	6	7	7	11	13	14	15
Номера выборок	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	1
Ранги	14	14	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Элементы выборок	15	15	17	21	22	25	29	30	33	44	47	66	97
Номера выборок	2	2	1	2	1	2	2	2	2	2	2	1	1

Хотя с точки зрения теории математической статистики вероятность совпадения двух элементов выборок равна 0, в реальных выборках статистических данных совпадения встречаются. Так, в рассматриваемых выборках, как видно из табл.2.2, два раза повторяется величина 2, два раза — величина 7 и три раза — величина 15. В таких случаях говорят о наличии «связанных рангов», а соответствующим совпадающим величинам приписывают среднее арифметическое тех рангов, которые они занимают (т.е среднее арифметическое номеров тех мест, которые они занимают в общем вариационном ряду). Так, величины 2 (из первой выборки) и 2 (из второй выборки) занимают в объединенном вариационном ряду места 3 и 4, поэтому им приписывается ранг $(3+4)/2=3{,}5$. Величины 7 и 7 занимают в объединенном вариационном ряду места 8 и 9, поэтому им приписывается ранг $(8+9)/2=8{,}5$. Величины 15, 15 и 15 занимают в объединенном вариационном ряду места 13, 14 и 15, поэтому им приписывается ранг $(13+14+15)/3=14$.

Таким образом, после построения объединенного вариационного ряда выделяют группы «связанных рангов» и проводят описанные выше расчеты. В итоге получают строку «Ранги».

Следующий шаг — подсчет значения статистики Вилкоксона, т.е. суммы рангов элементов первой выборки

$$S = R_1 + R_2 + \ldots + R_m =$$
$$= 1 + 3{,}5 + 5 + 6 + 8{,}5 + 11 + 12 + 14 +$$
$$+ 16 + 18 + 25 + 26 = 146.$$

Подсчитаем также сумму рангов элементов второй выборки

$$S_1 = 2 + 3{,}5 + 7 + 8{,}5 + 10 + 14 + 14 + 17 + 19 + 20 +$$
$$+ 21 + 22 + 23 + 24 = 205.$$

Величина S_1 может быть использована для контроля вычислений. Дело в том, что суммы рангов элементов первой выборки S и второй выборки S_1 вместе составляют сумму рангов объединенной выборки, т.е. сумму всех натуральных чисел от 1 до $m+n$. Следовательно,

$$S + S_1 = (m + n)(m + n + 1)/2 = (12 + 14)(12 + 14 + 1)/2 = 351.$$

В соответствии с ранее проведенными расчетами $S+S_1 = 146 + 205 = 351$. Необходимое условие правильности расчетов выполнено. Ясно, что справедливость этого условия не гарантирует правильности расчетов.

Перейдем к расчету статистики T. Согласно формуле (2.11)

$M(S) = 12(12+14+1)/2 = 162$, $D(S) = 12 \cdot 14(12+14+1)/12 = 378$.

Следовательно,

$$T = (S - 162)(378)^{-1/2} = (146-162) / 19{,}44 = -0{,}82.$$

Поскольку $|T| \leqslant 1{,}96$, то гипотеза однородности принимается на уровне значимости 0,05.

Что будет, если поменять выборки местами, вторую назвать первой? Тогда вместо S надо рассматривать S_1. Имеем

$$M(S_1) = 14(12 + 14 + 1)/2 = 189, \; D(S) = D(S_1) = 378,$$

$$T_1 = (S_1 - 189)(378)^{-1/2} = (205 - 189) / 19{,}44 = 0{,}82.$$

Таким образом, значения статистики критерия отличаются только знаком (можно показать, что это утверждение верно всегда). Поскольку в правиле принятия решения используется только абсолютная величина статистики, то принимаемое решение не зависит от того, какую выборку считаем первой, а какую второй. Для уменьшения объема таблиц критических значений принято считать первой выборку меньшего объема.

Мощность критерия Вилкоксона. Продолжим обсуждение критерия Вилкоксона. Правила принятия решений и таблицы критических значений для критерия Вилкоксона строятся в предположении справедливости гипотезы полной однородности, описываемой формулой (2.10). А что будет, если эта гипотеза неверна? Другими словами, какова мощность критерия Вилкоксона?

Пусть объемы выборок достаточно велики, так что можно пользоваться асимптотической нормальностью статистики Вилкоксона. Тогда в соответствии с формулами (2.9) статистика T будет асимптотически нормальна с параметрами

$$M(T) = (12mn)^{1/2}\,(1/2 - a)\,(m + n + 1)^{-1/2},$$

$$D(T) = 12\,[(n - 1)\,b^2 + (m - 1)\,g^2 + a(1 - a)]\,(m+n+1)^{-1}. \quad (2.13)$$

Из формул (2.13) видно большое значение гипотезы

$$H_{01}\colon a = P(X < Y) = 1/2. \quad (2.14)$$

Если эта гипотеза неверна, то, поскольку $m \leqslant n$, справедлива оценка

$$|M(T)| \geqslant (12\,m\,n\,(2n+1)^{-1})^{1/2}\,|1/2 - a|,$$

а потому $|M(T)|$ безгранично растет при росте объемов выборок. В то же время, поскольку

$$b^2 = \int_0^1 L^2(t)td \leqslant 1, \quad g^2 \leqslant \int_0^1 t^2 dL(t) \leqslant 1, \quad \alpha(1-\alpha) \leqslant 1/4,$$

то

$$D(T) \leqslant 12\,[(n - 1) + (m - 1) + 1/4]\,(m+n+1)^{-1} \leqslant 12. \quad (2.15)$$

Следовательно, вероятность отклонения гипотезы H_{01}, когда она неверна, т.е. мощность критерия Вилкоксона как критерия проверки гипотезы (2.14), стремится к 1 при возрастании объемов выборок, т.е. критерий Вилкоксона является состоятельным для этой гипотезы при альтернативе

$$AH_{01}\colon a = P(X < Y) \neq 1/2. \quad (2.16)\,.$$

Если же гипотеза (2.14) верна, то статистика T асимптотически нормальна с математическим ожиданием 0 и дисперсией, определяемой формулой

$$D(T) = 12[(n - 1)b^2 + (m - 1)g^2 + 1/4](m+n+1)^{-1}. \quad (2.17)$$

Гипотеза (2.14) является сложной, дисперсия (2.17), как показывают приводимые ниже примеры, в зависимости от значений b^2 и g^2 может быть как больше 1, так и меньше 1, но согласно неравенству (2.15) никогда не превосходит 12.

Критерий Вилкоксона не позволяет проверять абсолютную однородность. Приведем пример двух функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ таких, что гипотеза (2.14) выполнена, а гипотеза (2.10) — нет. Поскольку

$$a = P(X < Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)Gd(x),\ 1 - a = P(Y < X) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)Fd(x) \qquad (2.18)$$

и $a = 1/2$ в случае справедливости гипотезы (2.10), то для выполнения условия (2.14) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(F(x) - G(x)\right)Fd(x) = 0, \qquad (2.19)$$

а потому естественно в качестве $F(x)$ рассмотреть функцию равномерного распределения на интервале (–1; 1). Тогда формула (2.19) переходит в условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(F(x) - G(x)\right)Fd(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left(G(x) - \frac{(x+1)}{2}\right)xd = 0.$$

Это условие выполняется, если функция $(G(x) - (x + 1)/2)$ является нечетной.

Пример 2. Пусть функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ сосредоточены на интервале (–1; 1), на котором

$$F(x) = (x + 1)/2,\ G(x) = (x + 1 + 1/\pi \sin \pi x)/2.$$

Тогда

$$x = F^{-1}(t) = 2t - 1,\ L(t) = G(F^{-1}(t)) =$$

$$= (2t + 1/\pi \sin \pi(2t - 1))/2 = t + 1/2\pi \sin\ \pi(2t - 1).$$

Условие (2.19) выполнено, поскольку функция ($G(x)$ – (x + 1)/2) является нечетной. Следовательно, a = 1/2. Начнем с вычисления

$$g^2 = \int_0^1 t^2 Ld(t) - \frac{1}{4} = \int_0^1 t^2 d\left(t + \frac{1}{2\pi} \sin \pi (2t-1) - \frac{1}{4} \right).$$

Поскольку

$$d\left(t + \frac{1}{2\pi} \sin \pi (2\text{t-}1) \right) = 1 + \cos(2t-1)dt \ ,$$

то

$$g^2 = \int_0^1 t^2 \left(1 + \cos \pi (2t-1) td\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \int_0^1 t^2 \cos \pi (2t-1) td \ .$$

С помощью замены переменных $t = (x+1) / 2$ получаем, что

$$\int_0^1 \cos \pi (2t-1) dt = \frac{1}{8}\left(\int_{-1}^1 x^2 \cos \pi x dx + 2\int_{-1}^1 x \cos \pi x dx + \int_{-1}^1 \cos \pi x dx \right).$$

В правой части последнего равенства стоят табличные интегралы (см., например, справочник [23, с.71]). Проведя соответствующие вычисления, получаем, что в правой части стоит $1/8\times(-4/\pi^2) = -1/(2\pi^2)$. Следовательно,

$$g^2 = 1/12 - 1/(2\pi^2) = 0{,}032672733\ldots$$

Перейдем к вычислению b^2. Поскольку

$$b^2 = \int_0^1 L^2(t) td - \frac{1}{4} = \int_0^1 \left(t \frac{1}{2} \pi \sin \pi (2t-1) \right)^2 td - \frac{1}{4} ,$$

то

$$b^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(t \sin \pi (2t-1)\right) td + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^1 \sin^2 \pi (2t-1) td \ .$$

С помощью замены переменных $t = (x+1)/2$ переходим к табличным интегралам (см., например, справочник [23, с.65]):

$$b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} x \sin \pi x dx + \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} \sin \pi x dx + \frac{1}{8\pi^2}\int_{-1}^{1} \sin^2 \pi x dx \, .$$

Проведя необходимые вычисления, получим, что

$$b^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 0 + \frac{1}{8\pi^2} = \frac{1}{12} - \frac{3}{8\pi^2} = 0{,}045337893\ldots$$

Следовательно, для рассматриваемых функций распределения нормированная и центрированная статистика Вилкоксона (см. формулу (2.12)) асимптотически нормальна с математическим ожиданием 0 и дисперсией (см. формулу (2.17))

$$D(T) = (0{,}544\, n + 0{,}392\, m + 2{,}064)\, (m+n+1)^{-1}.$$

Как легко видеть, дисперсия всегда меньше 1. Это значит, что в рассматриваемом случае гипотеза полной однородности (2.10) при проверке с помощью критерия Вилкоксона будет приниматься чаще, чем если она на самом деле верна.

Сказанное означает, что критерий Вилкоксона нельзя считать критерием для проверки гипотезы (2.10) при альтернативе общего вида. Он не всегда позволяет проверить однородность — не при всех альтернативах. Точно так же критерии типа хи-квадрат нельзя считать критериями проверки гипотез согласия и однородности в случае непрерывных распределений — они позволяют обнаружить не все различия, поскольку некоторые из них «скрадывает» группировка.

Критерий Вилкоксона не позволяет проверять равенство медиан. Обсудим теперь, действительно ли критерий Вилкоксона нацелен на проверку равенства медиан распределений, соответствующих выборкам.

Пример 3. Построим семейство пар функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ таких, что их медианы различны, но для $F(x)$ и $G(x)$ выполнена гипотеза (2.14). Пусть распределения сосредоточены на интервале (0; 1), и на нем $G(x) = x$, а $F(x)$ имеет кусочнолинейный график с вершинами в точках (0; 0), (λ, 1/2), (δ, 3/4), (1; 1). Следовательно,

$$F(x) = 0 \text{ при } x < 0;$$

$$F(x) = x/(2\lambda) \text{ на } [0; \lambda);$$

$$F(x) = 1/2 + (x - \lambda)/(4\delta - 4\lambda) \text{ на } [\lambda; \delta);$$

$$F(x) = 3/4 + (x - \delta)/(4 - 4\delta) \text{ на } [\delta; 1];$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x > 1.$$

Очевидно, что медиана $F(x)$ равна λ, а медиана $G(x)$ равна 1/2 .

Согласно соотношению (2.17) для выполнения гипотезы (2.14) достаточно определить δ как функцию λ, т.е. $\delta = \delta(\lambda)$, из условия

$$\int_0^1 F(x)td = \frac{1}{2}.$$

Вычисления дают

$$\delta = \delta(\lambda) = 3(1 - \lambda)/2.$$

Учитывая, что δ лежит между λ и 1, не совпадая ни с тем, ни с другим, получаем ограничения на λ, а именно, $1/3 < \lambda < 3/5$. Итак, построено искомое семейство пар функций распределения.

Пример 4. Пусть, как и в примере 3, распределения сосредоточены на интервале (0; 1), и на нем $F(x)=x$. А $G(x)$ — функция распределения, сосредоточенного в двух точках — β и 1. Т.е. $G(x) = 0$ при x, не превосходящем β; $G(x) = h$ на (β; 1]; $G(x) = 1$ при $x > 1$. С такой функцией $G(x)$ легко проводить расчеты. Однако она не удовлетворяет принятым выше условиям непрерывности и строгого возрастания. Вместе с тем легко видеть, что она является предельной (сходимость в каждой точке отрезка [0; 1]) для последовательности функций распределения, удовлетворяющих этим условиям. А распределение статистики

Вилкоксона для пары функций распределения примера 4 является предельным для последовательности соответствующих распределений статистики Вилкоксона, полученных в рассматриваемых условиях непрерывности и строгого возрастания.

Условие $P(X < Y) = 1/2$ выполнено, если $h = (1 - \beta)^{-1}/2$ (при β из отрезка $[0; 1/2]$). Поскольку $h > 1/2$ при положительном β, то очевидно, что медиана $G(x)$ равна β, в то время как медиана $F(x)$ равна 1/2 . Значит, при $\beta = 1/2$ медианы совпадают, при всех иных положительных β — различны. При $\beta = 0$ медианой $G(x)$ является любая точка из отрезка $[0; 1]$.

Легко подсчитать, что в условиях примера 4 параметры предельного распределения имеют вид

$$b^2 = \beta(1 - \beta)^{-1}/4\ ,\ g^2 = (1 - 2\beta)/4.$$

Следовательно, распределение нормированной и центрированной статистики Вилкоксона будет асимптотически нормальным с математическим ожиданием 0 и дисперсией

$$D(T) = 3\ [(n - 1)\beta(1 - \beta)^{-1} + (m - 1)\ (1 - 2\beta) + 1]\ (m+n+1)^{-1}.$$

Проанализируем величину $D(T)$ в зависимости от параметра β и объемов выборок m и n. При достаточно больших m и n

$$D(T) = 3w\beta(1 - \beta)^{-1} + 3(1 - w)(1 - 2\beta),$$

с точностью до величин порядка $(m+n)^{-1}$, где $w = n/(m+n)$. Значит, $D(T)$ — линейная функция от w, а потому достигает экстремальных значений на границах интервала изменения w, т.е. при $w = 0$ и $w = 1$. Легко видеть, что при $\beta(1 - \beta)^{-1} < 1 - 2\beta$ минимум равен $3\beta(1 - \beta)^{-1}$ (при $w = 1$), а максимум равен $3(1 - 2\beta)$ (при $w = 0$). В случае $\beta(1 - \beta)^{-1} > 1 - 2\beta$ максимум равен $3\beta(1 - \beta)^{-1}$ (при $w = 1$), а минимум равен $3(1 - 2\beta)$ (при $w = 0$). Если же $\beta(1 - \beta)^{-1} = 1 - 2\beta$ (это равенство справедливо при $\beta = \beta_0 = 1 - 2^{-1/2} = 0{,}293$), то $D(T) = 3(2^{1/2} - 1) = 1{,}2426\ldots$ при всех w из отрезка $[0; 1]$.

Первый из описанных выше случаев имеет быть при $\beta < \beta_0$. При этом минимум $D(T)$ возрастает от 0 (при $\beta = 0$, $w = 1$ — предельный случай) до $3(2^{1/2} - 1)$ (при $\beta = \beta_0$, w — любом), а максимум уменьшается от 3 (при $\beta = 0$, $w = 0$ — предельный случай) до $3\,(2^{1/2}-1)$ (при $\beta = \beta_0$, w — любом). Второй случай относится к β из интервала $(\beta_0; 1/2]$. При этом минимум убывает от приведенного выше значения для $\beta = \beta_0$ до 0 (при $\beta = 1/2$, $w = 0$ — предельный случай) , а максимум возрастает от того же значения при $\beta = \beta_0$ до 3 (при $\beta = 1/2$, $w = 0$).

Таким образом, $D(T)$ может принимать все значения из интервала (0; 3) в зависимости от значений β и w. Если $D(T) < 1$, то при применении критерия Вилкоксона к выборкам с рассматриваемыми функциями распределения гипотеза однородности (2.10) будет приниматься чаще (при соответствующих значениях β и w — с вероятностью, сколь угодно близкой к 1), чем если бы она самом деле была верна. Если $1 < D(T) < 3$, то гипотеза (2.10) также принимается достаточно часто. Так, если уровень значимости критерия Вилкоксона равен 0,05, то (асимптотическая) критическая область этого критерия, как показано выше, имеет вид $\{T: |T| \geqslant 1{,}96\}$. Если — самый плохой случай — $D(T) = 3$, то гипотеза (2.10) принимается с вероятностью 0,7422.

Гипотеза сдвига. При проверке гипотезы однородности мы рассмотрели различные виды нулевых и альтернативных гипотез — гипотезу (2.10) и ее отрицание в качестве альтернативы, гипотезу (2.14) и ее отрицание, гипотезы о равенстве или различии медиан. В теоретических работах по математической статистике часто рассматривают гипотезу сдвига, в которой альтернативой гипотезе (2.10) является гипотеза

$$H_1: F(x) = G(x + r) \tag{2.20}$$

при всех x и некотором сдвиге r, отличным от 0. Если верна альтернативная гипотеза H_1, то вероятность $P(X < Y)$ отлична от 1/2, а потому при альтернативе (2.20) критерий Вилкоксона является состоятельным.

В некоторых прикладных постановках гипотеза (2.20) представляется естественной. Например, если одним и тем же прибором проводятся две серии измерений двух значений некоторой величины (физической, химической и т.п.). При этом функция распределения $G(x)$ описывает погрешности измерения одного значения, а $G(x+r)$ — другого. Вопреки распространенному заблуждению, хорошо известно, что распределение погрешностей измерений, как правило, не является нормальным (см. об этом [21, гл.5.1], [20, гл.4.1]). Однако при анализе подавляющего большинства конкретных статистических данных, как правило, нет никаких оснований считать, что отсутствие однородности всегда выражается столь однозначным образом, как следует из формулы (2.20). Поэтому для проверки однородности необходимо использовать статистические критерии, состоятельные против любого отклонения от гипотезы однородности (2.10), а не только против альтернативы сдвига.

Почему же математики так любят гипотезу сдвига (2.20)? Да потому, что она дает возможность доказывать глубокие математические результаты, например, об асимптотической оптимальности критериев. К сожалению, с точки зрения организационно-экономического моделирования это напоминает поиск ключей под фонарем, где светло, а не в кустах, где они потеряны.

Отметим еще одно обстоятельство. Часто говорят (в соответствии с классическим подходом математической статистики), что нельзя проверять нулевые гипотезы без рассмотрения альтернативных. Однако при анализе данных, полученных в ходе организационно-экономических, технических, медицинских или иных исследований, зачастую полностью ясна формулировка той гипотезы, которую желательно проверить (например, гипотезы абсолютной (иногда говорят, полной) однородности — см. формулу (2.10)), в то время как формулировка альтернативной гипотезы не очевидна. То ли это гипотеза о неверности равенства (2.10) хотя бы для одного значения x, то ли это альтернатива (2.16), то ли — альтернатива сдвига (2.20), и т. д. В таких случаях целесообразно «обернуть» задачу — исходя из статистического критерия найти альтернативы, относительно которых он состоятелен. Именно это и проделано в настоящем разделе для критерия Вилкоксона.

Подведем итоги рассмотрения критерия Вилкоксона.

1. Критерий Вилкоксона (Манна-Уитни) является одним из самых распространенных непараметрических ранговых критериев, используемых для проверки однородности двух выборок. Его значение не меняется при любом монотонном преобразо-

вании шкалы измерения (т.е. он пригоден для статистического анализа данных, измеренных в порядковой шкале — см. главу 6 ниже).

2. Распределение статистики критерия Вилкоксона определяется функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ и объемами m и n двух выборок. При больших объемах выборок распределение статистики Вилкоксона является асимптотически нормальным с параметрами, выписанными выше (см. формулы (2.9), (2.11) и (2.13)).

3. При альтернативной гипотезе, когда функции распределения выборок $F(x)$ и $G(x)$ не совпадают, распределение статистики Вилкоксона зависит от величины $a = P(X < Y)$. Если a отличается от 1/2, то мощность критерия Вилкоксона стремится к 1, и он отличает нулевую гипотезу $F \equiv G$ от альтернативной. Если же $a = 1/2$, то это не всегда имеет место. В примере 2 приведены две *различные* функции распределения выборок $F(x)$ и $G(x)$ такие, что гипотеза однородности $F \equiv G$ при проверке с помощью критерия Вилкоксона будет приниматься *чаще,* чем если бы она на самом деле была верна.

4. Следовательно, в случае общей альтернативы критерий Вилкоксона не является состоятельным, т.е. не всегда позволяет обнаружить различие функций распределения. Однако это не лишает его практической ценности, точно так же, как несостоятельность критериев типа хи-квадрат при проверке согласия, независимости или однородности не мешает отклонять нулевую гипотезу во многих практически важных случаях. Однако принятие нулевой гипотезы с помощью критерия Вилкоксона может означать не совпадение F и G, а всего лишь выполнение равенства $a = 1/2$.

5. Иногда утверждают, что с помощью критерия Вилкоксона можно проверять равенство медиан функций распределения F и G. Это не так. В примерах 3 и 4 указаны функции распределения F и G с $a = 1/2$, но с различными медианами. Во многих случаях это различие нельзя обнаружить с помощью критерия Вилкоксона, как это показано при численном анализе асимптотической дисперсии в примере 4.

6. Указанные выше недостатки критерия Вилкоксона исчезают для специального вида альтернативы — т.н. «альтерна-

тивы сдвига» H_1: $F(x) = G(x + r)$. В этом частном случае при справедливости альтернативной гипотезы мощность стремится к 1, различие медиан также всегда обнаруживается. Однако альтернатива сдвига не всегда естественна. Ее целесообразно принять, если одним и тем же прибором проводятся две серии измерений двух значений некоторой величины (физической, химической и т.п.). При этом функция распределения $G(x)$ описывает результаты измерений (с погрешностями) одного значения, а $F(x) = G(x + r)$ — другого. Другими словами, меняется лишь измеряемое значение, а собственно распределение погрешностей — одно и то же, присущее используемому средству измерения (и обычно описанное в его техническом паспорте). Однако в большинстве прикладных статистических исследований нет никаких оснований считать, что при альтернативе функция распределения второй выборки лишь сдвигается, но не меняется каким-либо иным образом.

7. При всех своих недостатках критерий Вилкоксона прост в применении и часто позволяет обнаруживать различие групп (поскольку оно часто сводится к отличию $a = P(X < Y)$ от 1/2). Приведенные здесь критические замечания не следует понимать как призыв к полному отказу от использования критерия Вилкоксона. Однако для проверки гипотезы однородности в случае альтернативы общего вида можно порекомендовать состоятельные критерии, в частности, рассматриваемые в следующем разделе критерии Смирнова и типа омега-квадрат (Лемана-Розенблатта).

8. В литературе по прикладным статистическим методам соседствуют два стиля изложения. Один из них исходит из формулировок нулевой и альтернативных гипотез (или описания набора гипотез, из которого надо выбрать наиболее адекватную), для проверки которых строятся те или иные критерии. При другом стиле изложения упор делается на алгоритмическое описание критериев для проверки тех или иных гипотез, а об альтернативах даже не упоминается.

Например, в литературе по математической статистике часто говорится, что для проверки нормальности используются критерии асимметрии и эксцесса (они описаны, например, в лучшем справочнике 1960–1980-х годов [2, табл. 4.7]). Однако эти критерии позволяют проверять некоторые соотношения между моментами распределения, но отнюдь не являются состоятельными критериями нормальности (не все отклонения от нормальности обнаруживают). Впрочем, для прикладной статистики эти критерии большого практического значения не имеют, поскольку заранее известно, что распределения конкретных технических, экономических, медицинских и иных статистических данных скорее всего отличны от нормальных.

Так что недостатки критерия Вилкоксона не является исключением, мощность ряда иных популярных в математической статистике критериев заслуживает тщательного изучения, при этом заранее можно сказать, что зачастую они не позволяют проверять те гипотезы, с которыми традиционно связаны. При применении подобных критериев к анализу реальных данных необходимо тщательно взвешивать их достоинства и недостатки.

В организационно-экономических исследованиях начинать следует с построения вероятностно-статистической модели, формулировки в ее терминах проверяемых гипотез. Лишь на основе подобной модели можно изучить свойства тех или иных методов и алгоритмов обработки данных. За статистическим критерием всегда стоит вероятностно-статистическая модель порождения данных, определяющая его свойства.

2.5. Состоятельные критерии проверки однородности независимых выборок

В соответствии с методологией организационно-экономического моделирования естественно потребовать, чтобы рекомендуемый для массового использования в управленческих, экономических, технических, медицинских и иных исследованиях критерий однородности был состоятельным. Напомним: это значит, что для любых отличных друг от друга функций распределения $F(x)$ и $G(x)$ (другими словами, при справедливости альтернативной гипотезы H_1) вероятность отклонения гипотезы H_0 должна стремиться к 1 при увеличении объемов выборок m и n. Из перечисленных выше (в конце раздела 2.3) критериев однородности состоятельными являются только критерии Смирнова и типа омега-квадрат.

Проведенное в Институте высоких статистических технологий и эконометрики исследование мощности (методом статистических испытаний) первых четырех из перечисленных выше критериев (при различных вариантах функций распределения $F(x)$ и $G(x)$) подтвердило преимущество критериев Смирнова и омега-квадрат и при малых объемах выборок 6– 12. Рассмотрим эти критерии подробнее.

Критерий Смирнова однородности двух независимых выборок. Он был предложен членом-корреспондентом АН СССР Н.В. Смирновым в 1939 г. (см. справочник [2]). Единственное ограничение — функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ должны быть непрерывными. Напомним, что согласно Л.Н. Большеву и Н.В. Смирнову [2] значение эмпирической функции распределения в точке x равно доле результатов наблюдений в выборке, меньших x. Критерий Смирнова основан на использовании эмпирических функций распределения $F_m(x)$ и $G_n(x)$, построенных по первой и второй выборкам соответственно. Значение статистики Смирнова

$$D_{m,n} = \sup_x \left| F_m(x) - G_n(x) \right|$$

сравнивают с соответствующим критическим значением (см., например, [2]) и по результатам сравнения принимают или отклоняют гипотезу H_0 о совпадении (однородности) функций распределения. Практически значение статистики $D_{m,n}$ рекомендуется согласно монографии [2] вычислять по формулам

$$D^+_{m,n} = \max_{1\leqslant r\leqslant n}\left[\frac{r}{n} - F_m(y'_r)\right] = \max_{1\leqslant r\leqslant n}\left[G_n(x'_s) - \frac{s-1}{m}\right], \qquad (2.21)$$

$$D^-_{m,n} = \max_{1\leqslant r\leqslant n}\left[F_m(y'_r) - \frac{r-1}{n}\right] = \max_{1\leqslant r\leqslant n}\left[\frac{s}{m} - G_n(x'_s)\right], \qquad (2.22)$$

$$D_{m,n} = \max\left(D^+_{m,n}, D^-_{m,n}\right) \qquad (2.23)$$

где $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_m$ — элементы первой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$, переставленные в порядке возрастания, а $y'_1 < y'_2 < \ldots < y'_n$ — элементы второй выборки $y_1, y_2, \ldots, y_n$, также переставленные в порядке возрастания. Поскольку функции распределения $F(x)$ и $G(x)$ предполагаются непрерывными, то вероятность совпадения каких-либо выборочных значений равна 0.

Пример 1. Рассчитаем значение статистики двухвыборочного критерия Смирнова для тех же выборок, для которых в предыдущем разделе было рассчитано значение статистики критерия Вилкоксона. Первая из них содержит $m = 12$ элементов. Переставим их в порядке возрастания $0 < 2 < 3 < 17 < 5 < 7 < 13 < 14 < 15 < 22 < 66 < 97$. Вторая содержит $n = 14$ элементов. Также переставим их в порядке возрастания $1 < 2 < 6 < 7 < 11 < 15 = 15 < 21 < 25 < 29 < 30 < 33 < 44 < 47$. Точнее, в порядке неубывания, поскольку два элемента совпадают. С точки зрения теории вероятность совпадения двух элементов равна 0, но из-за неизбежных округлений эта вероятность положительна. Поскольку совпадений мало (как внутри одной выборки, так и для элементов разных выборок), то использование теории, основанной на нулевой вероятности совпадения элементов выборок, является допустимым.

Расчет значений статистик представлен в табл. 2.3 ($D^+_{m,n}$) и табл.2.4 ($D^-_{m,n}$).

Таблица 2.3

Расчет значения статистики $D^+_{m,n}$

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	$F_m(x)$	r/n	$r/n - F_m(x)$	$G_n(x)$	$\frac{s-1}{m}$	$G_n(x) - (s-1)/m$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	1	0			0	0	0
2	1	2	0,083	0,071	–0,012	0		
3	2	1	0,083			0,071	0,083	–0,012
4	2	2	0,083	0,143	0,06	0,071		
5	3	1	0,167			0,143	0,167	–0,024
6	5	1	0,25			0,143	0,25	–0,107

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	$F_m(x)$	r/n	$r/n - F_m(x)$	$G_n(x)$	$\frac{s-1}{m}$	$G_n(x) - (s-1)/m$
7	6	2	0,333	0,214	–0,119	0,143		
8	7	1	0,333			0,214	0,333	–0,119
9	7	2	0,333	0,286	–0,047	0,214		
10	11	2	0,417	0,357	–0,06	0,286		
11	13	1	0,417			0,357	0,417	–0,06
12	14	1	0,5			0,357	0,5	
13	15	1	0,583			0,357	0,583	–0,226
14	15	2	0,583	0,429	–0,154	0,357		
15	15	2	0,583	0,5	–0,083	0,357		
16	17	1	0,667			0,5	0,667	–0,167
17	21	2	0,75	0,571	–0,179	0,5		
18	22	1	0,75			0,571	0,75	–0,179
19	25	2	0,833	0,643	–0,19	0,571		
20	29	2	0,833	0,714	–0,119	0,643		
21	30	2	0,833	0,786	–0,047	0,714		
22	33	2	0,833	0,857	0,024	0,786		
23	44	2	0,833	0,929	0,096	0,857		
24	47	2	0,833	1,0	0,167	0,929		
25	66	1	0,833			1,0	0,883	0,167
26	97	1	0,917			1,0	0,883	0,167

Таблица 2.4

Расчет значения статистики $D^{-}_{m,n}$

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	$F_m(x)$	$(r-1)/n$	$F_m(x) - (r-1)/n$	$G_n(x)$	s/m	$s/m - G_n(x)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	1	0			0	0,083	0,083
2	1	2	0,083	0	0,083	0		
3	2	1	0,083			0,071	0,167	0,096
4	2	2	0,083	0,071	0,012	0,071		
5	3	1	0,167			0,143	0,25	0,107

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	$F_m(x)$	$(r-1)/n$	$F_m(x) - (r-1)/n$	$G_n(x)$	s/m	$s/m - G_n(x)$
6	5	1	0,25			0,143	0,333	0,19
7	6	2	0,333	0,143	0,19	0,143		
8	7	1	0,333			0,214	0,417	0,203
9	7	2	0,333	0,214	0,119	0,214		
10	11	2	0,417	0,286	0,131	0,286		
11	13	1	0,417			0,357	0,5	0,143
12	14	1	0,5			0,357	0,583	
13	15	1	0,583			0,357	0,667	0,31
14	15	2	0,583	0,357	0,226	0,357		
15	15	2	0,583	0,429	0,154	0,357		
16	17	1	0,667			0,5	0,75	0,25
17	21	2	0,75	0,5	0,25	0,5		
18	22	1	0,75			0,571	0,883	0,312
19	25	2	0,833	0,571	0,262	0,571		
20	29	2	0,833	0,643	0,19	0,643		
21	30	2	0,833	0,714	0,119	0,714		
22	33	2	0,833	0,786	0,047	0,786		
23	44	2	0,833	0,857	–0,024	0,857		
24	47	2	0,833	0,929	–0,096	0,929		
25	66	1	0,833			1,0	0,917	–0,083
26	97	1	0,917			1,0	0,917	–0,083

Беря максимум по столбцу (6) табл. 2.3, получаем, что $D^{+}_{m,n} = 0{,}167$. Таков же максимум и по столбцу (9), как и должно быть в соответствии с приведенным выше равенством. Максимум по столбцу (6) табл.2.4 равен 0,262, в то время как максимум по столбцу (9) той же таблицы есть 0,312. Это различие вызвано тем, что некоторые выборочные значения совпадают, а потому равенство (2.22), справедливое при отсутствии совпадений, не выполняется. В таких случаях рекомендуют брать максимальное из полученных двумя способами значений, т.е. следует положить $D^{-}_{m,n} = \max(0{,}262;\ 0{,}312) = 0{,}312$. По формуле (2.23) двухвыборочная статистика Смирнова $D_{m,n} = \max(0{,}167;\ 0312) = 0{,}312$.

В табл. 6.5а справочника [2] приведены критические значения для двухвыборочной статистики Смирнова, соответствующие обычно используемым уровням значимости (табл.2.5). Поскольку полученное по статистическим данным значение меньше критического значения для уровня значимости α = 0,1, а потому и для всех остальных рассматриваемых уровней значимости, то нет оснований отклонять гипотезу однородности. Как и при использовании критерия Вилкоксона, эффект не обнаружен, нулевую гипотезу абсолютной однородности принимаем.

Таблица 2.5

Критические значения и истинные уровни значимости для двухвыборочной статистики Смирнова (m = 12, n = 14)

Номинальный уровень значимости	10%	5%	2%	1%
Критическое значение (дробь)	39/84	43/84	47/84	52/84
Критическое значение (десятичное число)	0,464	0,512	0,559	0,619
Истинный уровень значимости	8,7	4,4	2,0	0,8

Разработаны алгоритмы и программы для ЭВМ, позволяющие рассчитывать точные распределения, процентные точки и достигаемый уровень значимости для двухвыборочной статистики Смирнова $D_{m,n}$, разработаны подробные таблицы (см., например, методику [14], содержащую описание алгоритмов, тексты программ и подробные таблицы).

Однако у критерия Смирнова есть и недостатки. Его распределение сосредоточено в сравнительно небольшом числе точек. Ясно, что принимаемые этой статистикой значения пропорциональны величине $1/L$, где L — наименьшее общее кратное объемов выборок m и n. Поэтому функция распределения растет большими скачками. Для рассматриваемого примера L — наименьшее общее кратное 12 и 14, т.е. 84. Следовательно, принимаемые статистикой Смирнова входят в арифметическую прогрессию с шагом $1/84 = 0{,}012$. Именно поэтому критические значения в сборнике [2] приведены в виде дроби с знаменателем $L = 84$.

Кроме того, не удается выдержать заданный уровень значимости. Реальный (другими словами, истинный) уровень значимости может значительно, даже в несколько раз отличаться от номинального (подробному обсуждению неклассического феномена существенного отличия реального уровня значимости от номинального посвящена работа [8] и раздел 2.6 ниже).

При больших объемах выборок можно воспользоваться доказанной Н.В. Смирновым в 1939 г. теоремой: в случае совпадения непрерывных функций распределения элементов двух независимых выборок

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} P\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} < y\right\} = K(y) \ ,$$

где $K(y)$ — функция распределения Колмогорова, заданная формулой

$$K(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp\left\{-2k^2 y^2\right\}.$$

Поскольку согласно [2] квантиль порядка 0,9 функции распределения Колмогорова равна 1,224, то критическое значение двухвыборочной статистики Смирнова $D_{m,n}$, соответствующее уровню значимости 10%, при больших объемах выборок имеет вид

$$1,224\sqrt{\frac{m+n}{mn}} \ .$$

При $m = 12$, $n = 14$ эта формула дает 0,4815, в то время как точное значение равно 0,464 (см. табл.2.5 выше). Видим, что приближение удовлетворительное, т.е. рассматриваемые объемы выборок (более 10 элементов) можно считать большими. Для построения правил принятия решений на основе значений двухвыборочной статистики Смирнова, соответствующих другим уровням значимости, можно воспользоваться небольшой табл.2.6 квантилей функции распределения Колмогорова, взятой из справочника [2].

Таблица 2.6

Квантили функции распределения Колмогорова

Величина a	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
Квантиль порядка a	1,07275	1,22385	1,35810	1,51743	1,62762

Критерий типа омега-квадрат (Лемана-Розенблатта). Статистика критерия типа омега-квадрат для проверки однородности двух независимых выборок имеет вид:

$$A = \frac{nm}{n+m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F_m(x) - G_n(x)\right)^2 dH_{m+n}(x),$$

где $H_{m+n}(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по объединенной выборке. Легко видеть, что

$$H_{m+n}(x) = \frac{m}{m+n}F_m(x) + \frac{n}{m+n}G_n(x).$$

Статистика A типа омега-квадрат была предложена Э. Леманом в 1951 г., изучена М. Розенблаттом в 1952 г., а затем и другими исследователями. Она зависит лишь от рангов элементов двух выборок в объединенной выборке. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — первая выборка, $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_m$ — соответствующий вариационный ряд, $y'_1, y'_2, \ldots, y'_m$ — вторая выборка, $y'_1 < y'_2 < \ldots < y'_m$ — вариационный ряд, соответствующий второй выборке. Поскольку функции распределения независимых выборок непрерывны, то с вероятностью 1 все выборочные значения различны, совпадения отсутствуют. Статистика A представляется в виде (см., например, [2]):

$$A = \frac{1}{nm(m+n)}\left[m\sum_{i=1}^{m}(r_i - i)^2 + n\sum_{j=1}^{n}\left(s_j - j\right)^2\right] - \frac{4nm-1}{6(m+n)},$$

где r_i — ранг x'_i и s_j — ранг y'_j в общем вариационном ряду, построенном по объединенной выборке.

Правила принятия решений при проверке однородности двух выборок на основе статистик Смирнова и типа омега-квадрат, т.е. таблицы критических значений в зависимости от уровней значимости и объемов значимости приведены, например, в таблицах [2]. При достаточно больших объемах выборок правило принятия решения формулируется просто: если наблюдаемое значение статистики меньше соответствующего квантиля предельного распределения, гипотеза однородности принимается, в противном случае отклоняется.

Расчет значения статистики A типа омега-квадрат (статистики Лемана-Розенблатта) по тем же данным, по которым были найдены значения статистик критериев Вилкоксона и Смирнова, представлен в табл.2.7. Суммируя значения в столбце (6), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{12}(r_i - i)^2 = 598 .$$

Аналогично получаем с помощью столбца (9), что

$$\sum_{j=1}^{14}(s_j - j)^2 = 880 .$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{12\times 14\times 26}[12\times 598 + 14\times 880] - \frac{4\times 12\times 14 - 1}{6\times 26} =$$
$$= \frac{1}{4368}[7176 + 12320] - \frac{671}{156} = 4,4634 - 4,3013 = 0,1621$$

Таблица 2.7

Расчет значения статистики *A* Лемана-Розенблатта

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	i	$r_i - i$	$(r_i - i)^2$	j	$s_j - j$	$(s_j - j)^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	1	1	0	0			
2	1	2				1	1	1
3	2	1	2	1	1			
4	2	2				2	2	4
5	3	1	3	2	4			
6	5	1	4	2	4			

№ п/п	Элементы выборок x	Номера выборок	i	$r_i - i$	$(r_i - i)^2$	j	$s_j - j$	$(s_j - j)^2$
7	6	2				3	4	16
8	7	1	5	3	9			
9	7	2				4	5	25
10	11	2				5	5	25
11	13	1	6	5	25			
12	14	1	7	5	25			
13	15	1	8	5	25			
14	15	2				6	8	64
15	15	2				7	8	64
16	17	1	9	7	49			
17	21	2				8	9	81
18	22	1	10	8	64			
19	25	2				9	10	100
20	29	2				10	100	100
21	30	2				11	10	100
22	33	2				12	10	100
23	44	2				13	10	100
24	47	2				14	10	100
25	66	1	11	14	196			
26	97	1	12	14	196			

Известно [21], что

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} P\{A < x) = a_1(x)$$

(в обозначениях [2]), где $a_1(x)$ — предельная функция распределения классической статистики омега-квадрат (Крамера-Мизеса-Смирнова), используемой для проверки согласия эмпирического распределения с заданным теоретическим.

Квантили функции распределения $a_1(x)$ приведены в табл.2.8. Известно [2, 21], что в случае статистики Лемана-Розенблатта предельным распределением можно пользоваться и для выборок умеренного объема (5 и 7, 6 и 7, 7 и 7,8 и 8 и т.д.). Поскольку наблюдаемое значение $A = 0{,}1621$ меньше любого критического значения в табл.6, то гипотезу однородности двух рассматриваемых выборок следует принять.

Таблица 2.8

Квантили предельной функции распределения статистики омега-квадрат (Крамера-Мизеса-Смирнова)

Величина a	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
Квантиль порядка a	0,245	0,347	0,461	0,620	0,743

Рекомендации по выбору критерия однородности. Для критерия типа омега-квадрат (Лемана-Розенблатта) нет выраженного эффекта различия между номинальными и реальными уровнями значимости. Поэтому мы *рекомендуем для проверки однородности функций распределения (гипотеза H_0) применять статистику А типа омега-квадрат. Если методическое, табличное или программное обеспечение для статистики Лемана — Розенблатта отсутствует, рекомендуем использовать критерий Смирнова. Для проверки однородности математических ожиданий (гипотеза H'_0) целесообразно применять критерий Крамера-Уэлча*. По нашему мнению, статистики Стьюдента, Вилкоксона и др. допустимо использовать лишь в отдельных частных случаях, рассмотренных выше.

Кратко сформулируем некоторые соображения о внедрении современных методов прикладной статистики в практику технических, экономических, медицинских и иных исследований. Даже из проведенного выше разбора лишь одной из типичных статистических задач организационно-экономического моделирования — задачи проверки однородности двух независимых выборок — можно сделать вывод о целесообразности широкого развертывания работ по критическому анализу сложившейся практики статистической обработки данных и по внедрению накопленного арсенала современных методов прикладной статистики. По нашему мнению, широкого внедрения заслуживают, в частности, методы многомерного статистического анализа, планирования эксперимента, статистики объектов нечисловой природы. Очевидно, рассматриваемые работы должны быть плановыми, организационно оформленными, проводиться мощными самостоятельными организациями и подразделениями. Целесообразно создание службы статистических консультаций в системе научно-исследовательских учреждений и вузов технического, экономического, медицинского профиля, а также в рамках корпораций и промышленных предприятий. Этот инновационный проект подробно разработан в специальной литературе [18, 19].

2.6. Реальные и номинальные уровни значимости в задачах проверки статистических гипотез

Во многих монографиях, справочниках и таблицах (например, [1, 6, 7]) при проверке статистических гипотез критические значения статистик указаны для априорно фиксированных (номинальных в терминологии [8]) уровней значимости $\alpha_?$. В качестве таковых обычно используются значения из тройки чисел 0,01, 0,05, 0,1, к которым иногда добавляют еще несколько: 0,001, 0,005, 0,02 и др.

Однако ясно, что для дискретных статистик (т.е. статистик с дискретными функциями распределения) к которым, в частности, относятся все непараметрические статистические критерии [2, 24], реальные уровни значимости $\alpha_?$ могут и не совпадать с номинальными. Под $\alpha_?$ понимается максимально возможный уровень значимости дискретной статистики, не превосходящий заданный номинальный $\alpha_?$ (т.е при переходе к следующему по величине возможному значению дискретной статистики соответствующий уровень значимости оказывается больше заданного номинального). Поэтому в лучших таблицах [2, 24] для ограниченных объемов выборок (2– 100) табулируются точные распределения дискретных статистик. Для каждой конкретной статистики реальный уровень значимости $\alpha_?$ — функция от объемов выборок $n = (n_1, \ldots, n_t)$, т.е. $\alpha_? = \alpha_? (n)$. (Здесь t — число выборок, по которым рассчитывается значение статистики; рассматриваем в основном случай двух выборок, т.е. $t = 2$.)

В одних таблицах приведены $\alpha_?$ [2, 24], в других — нет [1, 6, 7]. Возникает естественный вопрос: с чем это связано? Либо в работах [1, 6, 7] нарушена культура табулирования, либо реальные $\alpha_?$ и номинальные $\alpha_?$ уровни значимости практически совпадают для всех n. Продемонстрируем, что по крайней мере для некоторых статистик выполнено первое из этих двух утверждений.

В качестве примера рассмотрим критерий серий (Вольфовица) проверки однородности двух независимых выборок. Статистика этого критерия V — это число серий, т.е. частей общего вариационного ряда двух выборок, каждая из которых состоит из элементов одной выборки. При справедливости нулевой гипотезы о тождестве функций распределения, соответствующих двум независимым выборкам объемов n_1 и n_2, известно точное распределение [2, табл.6.7]

$$P\left(V = r \mid n_1, n_2\right) = \begin{cases} \dfrac{2C_{r_1-1}^{k-1}C_{r_2-1}^{k-1}}{C_{r_1+r_2}^{r_1}}, \textit{если } r = 2k, \\ \dfrac{C_{r_1-1}^{k}C_{r_2-1}^{k-1} + C_{r_1-1}^{k-1}C_{r_2-1}^{k}}{C_{n_1+n_2}^{n_1}}, \textit{если } r = 2k+1, \end{cases}$$

где $r = 2, 3, \ldots, 2n_1$ при $n_1 = n_2$ и $r = 2, 3, \ldots, 2n_1 + 1$ при $n_1 < n_2$ (без ограничения общности можно принять, что объем первой выборки не превосходит объема второй выборки, т.е. $n_1 \leqslant n_2$).

Несложный расчет для номинального уровня значимости $\alpha_? = 0{,}05$ показывается, что

при $n_1 = n_2 = 6$ реальный уровень значимости $\alpha_? = 0{,}0260$;

при $n_1 = n_2 = 8$ реальный уровень значимости $\alpha_? = 0{,}0178$;

при $n_1 = n_2 = 10$ реальный уровень значимости $\alpha_? = 0{,}0370$;

при $n_1 = n_2 = 12$ реальный уровень значимости $\alpha_? = 0{,}0190$.

Таким образом, для рассматриваемых объемов выборок реальный уровень значимости в 2–3 раза меньше, чем номинальный. Это, очевидно, необходимо учитывать при интерпретации результатов анализа реальных статистических данных.

Соотношение реальных (истинных) и номинальных уровней значимости было изучено нами [8] на примере непараметрических критериев проверки однородности двух независимых выборок. В табл.2.9, построенной в [8] по данным [2, 4, 24], для ряда непараметрических критериев проверки однородности двух независимых выборок приведены реальные уровни значимости $\alpha_?$ (n) для номинального уровня значимости $\alpha_? = 0{,}05$ и объемов выборок $n_1 = n_2 = 6, 8, 10, 12$. Проанализированы пять критериев.

1. Двухвыборочный критерий Вилкоксона, являющийся линейной функцией от критерия Манна-Уитни и подробно рассмотренный выше в разд. 2.4. Напомним, что статистика Вилкоксона S — это сумма рангов элементов первой выборки

$$S = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n1}$$

в общем вариационном ряду, построенном по объединенной выборке, включающей в себя все элементы обеих выборок (без ограничения общности можно принять, что объем первой выборки не превосходит объема второй выборки, т.е. $n_1 \leqslant n_2$).

2. Критерий Ван-дер-Вардена [2, 4], представляющий собой дальнейшее развитие (модификацию) критерия Вилкоксона и предназначенный для анализа выборок, распределение которых близко к нормальному. Статистика X критерия Ван-дер-Вардена имеет вид

$$X = \Phi^{-1}\left\{\frac{R_1}{n_1 + n_2 + 1}\right\} + \Phi^{-1}\left\{\frac{R_2}{n_1 + n_2 + 1}\right\} + \ldots + \Phi^{-1}\left\{\frac{R_n}{n_1 + n_2 + 1}\right\},$$

где $\Phi^{-1}(p)$ есть квантиль порядка p стандартного нормального распределения $\Phi(x)$ с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, т.е. $\Phi^{-1}(p)$ — обратная функция к $\Phi(x)$.

3. Двухвыборочный двухсторонний критерий Смирнова однородности двух независимых выборок, рассмотренный в разд. 2.5. Он основан на использовании разности эмпирических функций распределения $F_{n1}(x)$ и $G_{n2}(x)$ построенных по первой и второй выборкам соответственно. Термин «двухсторонний»

означает, что берется супремум модуля этой разности. Статистика двухвыборочного двухстороннего критерия Смирнова

$$D = D(n_1, n_2) = \sup_x \left| F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x) \right|$$

в случае равенства объемов выборок $n_1 = n_2$ принимает значения, кратные $1/n_1$, поскольку только такие значения принимают эмпирические функции распределения $F_{n1}(x)$ и $G_{n2}(x)$, а потому рассматриваемая статистика имеет (n_1+1) возможных значений.

4. Критерий знаков Z используют в случае равенства объемов выборок $n_1 = n_2$. Статистика этого критерия равна числу положительных разностей X_k — Y_k элементов двух выборок с одинаковыми номерами. При справедливости нулевой гипотезы статистика Z имеет биномиальное распределение $B(1/2;\ n_1)$, а потому имеет (n_1+1) возможных значений.

5. Критерий серий (Вольфовица) V, о котором шла речь выше в начале настоящего раздела. Число его возможных значений не превосходит $2n_1$.

Таблица 2.9

Реальные уровни значимости $\alpha_?$ (n) для $\alpha_? = 0{,}05$

Наименование и обозначение критерия	Объемы выборок $n_1 = n_2$				Примечания и ссылки
	6	8	10	12	
Вилкоксона S	0,0320	0,0400	0,0480	0,0420	[24, с.280–281], [4, с.418]
Ван-дер-Вардена X	0,0498	0,0498	0,0500	0,0500	Рассчитано по мето- дике [4, с.249–250]
Смирнова D	0,0044	0,0372	0,0246	0,0158	[2, с.412], [24, с.406–427]
Знаков Z	0,0312	0,0078	0,0214	0,0386	[24, с.273–274]
Вольфовица (серий) V	0,0260	0,0178	0,0370	0,0190	Рассчитано по мето- дике [2, с.91–92]

Анализ содержания табл.2.9 подтверждает предположение о существенности отличия реальных уровней значимости $\alpha_?(n)$ от номинальных уровней значимости $\alpha_?$.

Предположим теперь, что, несмотря на установленные отличия, мы используем при проверке гипотезы однородности таблицы [1, 6, 7], в которых указаны $\alpha_? > \alpha_?$, а не $\alpha_?$. Это приводит к снижению мощности критерия по сравнению с соответствующим рандомизированным критерием, обеспечивающим равенство $\alpha_?$ и $\alpha_?$.

Разъяснение. Поясним, что такое рандомизированный критерий. Пусть Y — статистика некоторого статистического критерия, принимающая дискретные значения, числа a и b, где $a < b$ — два соседних значения этой статистики, такие, что $P(Y > b) < \alpha_?$ и $P(Y > a) > \alpha_?$ (вероятности взяты в предположении справедливости нулевой гипотезы). Если критическое значение критерия равно b, т.е. нулевая гипотеза принимается при $Y \leqslant b$, то $\alpha_? = P(Y > b) < \alpha_?$. Если же критическое значение равно следующему возможному (при движении в сторону уменьшения) значению a, т.е. нулевая гипотеза принимается при $Y \leqslant a$, то $\alpha_? = P(Y > a) > \alpha_?$. Рандомизированный критерий получим, если при $Y = b$ в некоторой доле p случаев будем принимать нулевую гипотезу, а в остальных случаях — альтернативную. Поскольку

$$P(Y = b) = P(Y > a) - P(Y > b),$$

то (реальный) уровень значимости рандомизированного критерия равен

$$(1 - p)\, P(Y = b) + P(Y > b) = (1 - p)\, P(Y > a) + p\, P(Y > b).$$

Ясно, что при соответствующем выборе параметра рандомизации p уровень значимости рандомизированного критерия совпадет с заданным номинальным уровнем $\alpha_?$.

Для малых объемов выборок (2– 20 элементов) понижение мощности из-за того, что $\alpha_? > \alpha_?$, может быть существенным. Для иллюстрации этого в табл.2.10 приведены результаты моделирования наиболее употребительных (согласно [2]) критериев проверки однородности двух независимых выборок.

Моделируются выборки одинакового объема из нормальных законов распределения с математическими ожиданиями m_1 и m_2 и дисперсиями $\sigma^2{}_1$ и $\sigma^2{}_2$. Номинальный уровень значимости, определяющий конкретные критические значения для критериев, принят равным $\alpha_? = 0{,}05$. Мощность критерия определяется моделированием $N = 5000$ пар выборок. При использовании $N = 5000$ моделируемых пар выборок среднее квадратическое отклонение оценок мощности $\sigma_M \leqslant 0{,}0223$(при $M \geqslant 0{,}95$ имеем $\sigma_M \leqslant 0{,}01$).

Изучены критерии Вилкоксона S, Вольфовица V, Ван-дер-Вардена X, Смирнова D. Критерий Стьюдента t (см. например, [2]), как равномерно наиболее мощный в классе нормальных законов распределения, приведен для сравнительной оценки мощности рассматриваемых непараметрических критериев. (Моделирование и расчеты, приведенные в настоящем разделе, выполнены Ю.Э. Камнем и Я.Э. Камнем [8].)

Таблица 2.10

Мощности статистических критериев при $\alpha_i = 0{,}05$

Номер эксперимента	Объем выборок $n_1 = n_2$	Параметры				Мощность M статистического критерия				
		m_1	m_2	$\sigma^2{}_1$	$\sigma^2{}_2$	S	V	X	D	t
1	6	0	1	1	1	0,318	0,006	0,298	0,238	0,396
2	8	0	1	1	1	0,452	0,104	0,426	0,068	0,484
3	10	0	1	1	1	0,520	0,180	0,534	0,116	0,598
4	12	0	1	1	1	0,632	0,076	0,618	0,462	0,682
5	6	0	2	1	1	0,828	0,308	0,808	0,716	0,904
6	8	0	2	1	1	0,958	0,510	0,954	0,458	0,976
7	10	0	2	1	1	0,984	0,704	0,990	0,632	0,988
8	12	0	2	1	1	0,996	0,568	0,996	0,978	0,998

Замечание. Приведенные в табл.2.10 значения мощностей критериев интересны нам с точки зрения обсуждения их зависимости от различия реальных и номинальных уровней значимости. При этом необходимо подчеркнуть, что эти значения зависят от предположений, принятых при моделировании. Так, критерии Вилкоксона и Ван-дер-Вардена «настроены» на использование в случае распределений, близких к нормальному семейству. При проверке гипотезы о совпадении функций распределения двух независимых выборок из логистического распределения с альтернативой сдвига критерий Вилкоксона является асимптотически оптимальным. А в случае выборок из нормального распределения аналогичным свойством обладает критерий Ван-дер-Вардена, причем известно, что семейства нормальных и логистических распределений весьма близки — расстояние Колмогорова между ними не превышает 0,01 (см. по вопросам асимптотической оптимальности непараметрических критериев [10, 11, 15]). Поэтому нет ничего удивительного в том, что мощности критериев Вилкоксона и Ван-дер-Вардена близки к оптимуму в случае нормального распределения — к мощности критерия Стьюдента. При этом мощности критериев Смирнова и особенно критерия Вольфовица заметно меньше. Однако для выборок из других распределений (например, распределений Вейбулла-Гнеденко или гамма-распределений) ситуация иная — критерий Смирнова, как показывает компьютерное моделирование, оказывается более мощным, чем критерии Вилкоксона и Ван-дер-Вардена. Более того, критерий Смирнова — состоятельный, т.е. позволяет отклонить любую конкретную альтернативу (при соответствующих объемах выборок), а критерии Вилкоксона и Ван-дер-Вардена не являются состоятельными, некоторых альтернатив они «не чувствуют» (см. разд. 2.4). Поэтому вполне обоснованной является рекомендация о широком использовании состоятельных критериев Смирнова и типа омега-квадрат (Лемана-Розенблатта), данная в разд. 2.5. Что же касается критерия серий (Вольфовица), то из-за его отрицательных свойств (выраженной дискретности, низкой мощности) он в настоящее время выходит из употребления при анализе реальных данных, несмотря на прозрачность определения.

Рассмотрения настоящего раздела позволяют сделать следующие выводы [8].

1. При создании методик и таблиц необходимо соблюдать определенную культуру табулирования. В качестве положительных примеров можно указать работы [2, 24].

2. При малых объемах выборок использовать номинальные уровни значимости $\alpha_?$ вместо реальных уровней значимости $\alpha_?$ для дискретных статистик недопустимо.

3. При конечных объемах выборок выбор того или иного критерия с дискретной статистикой должен сопровождаться исследованием влияния варьирования уровня значимости на качественную интерпретацию результатов проверки гипотез. В частности, выбор одного из двух конкурирующих непараметрических критериев K_1 и K_2 прежде всего должен зависеть от априорного выбора исследователем реального уровня значимости $\alpha_{?1}$ или $\alpha_{?2}$, соответствующего первому критерию K_1 или второму K_2, в качестве номинального уровня значимости $\alpha_?$.

Последний вывод демонстрирует сложность сравнения критериев с дискретными статистиками между собой, поскольку точки скачков распределений их статистик не совпадают. Следовательно, в отличие от критериев с непрерывными статистиками нельзя выбрать единый фиксированный уровень значимости и сравнить свойства критериев при этом уровне значимости.

В заключение отметим, что для любого критерия проверки статистических гипотез реальный уровень значимости приближается к номинальному при безграничном возрастании объемов выборок, т.е. $\alpha_?(n) \to \alpha_?$ При $\min(n_1, \ldots, n_t) \to \infty$. Поэтому для прикладных исследований значительный интерес представляет определение верхней оценки скорости сходимости $\alpha_?(n)$ к $\alpha_?$. Соответствующие теоретические результаты для критериев проверки однородности двух независимых или связанных выборок можно получить, основываясь на оценках скорости сходимости в принципе инвариантности [21, гл.4]. Некоторые оценки приведены в [17, гл.2]. Скорость сходимости также может быть оценена методом статистических испытаний (Монте-Карло). Пример подобного исследования подробно рассмотрен в [9] в ходе обсуждения проблем вероятностно-статистического моделирования помех, создаваемых электровозами.

В настоящей главе затронута лишь небольшая часть непараметрических методов анализа числовых статистических данных. В частности, обратим внимание на непараметрические оценки плотности, которые используются для описания данных, проверки однородности, в задачах восстановления зависимостей и других областях эконометрики. Непараметрические оценки плотности рассмотрены в [21, раздел 5.6].

Литература

1. *Афифи А., Эйзен С.* Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ. — М.: Мир, 1982. — 488 с.

2. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

3. *Боровков А.А.* Математическая статистика. — М.: Наука, 1984. — 472 с.

4. *Ван-дер-Варден Б.Л.* Математическая статистика. — М.: ИЛ, 1960. — 434 с.

5. *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев / Пер. с англ. — М.: Наука, 1971. — 376 с.

6. *Гублер Е.В., Генкин А.А.* Применение критериев непараметрической статистики в медико-биологических исследованиях. — Л.: Медицина, 1973. — 144 с.

7. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1984. — 248 с.

8. *Камень Ю.Э., Камень Я.Э., Орлов А.И.* Реальные и номинальные уровни значимости в задачах проверки статистических гипотез. — Журнал «Заводская лаборатория». 1986. Т.52. № 12. С.55–57.

9. *Карякин Р.Н., Орлов А.И., Адамов С.Ю.* Вероятностная теория высших гармоник помех, создаваемых электровозами. — В сб.: Прикладной многомерный статистический анализ. Ученые записки по статистике, т.33. — М.: Наука, 1978. С.376–380.

10. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973. — 900 с.

11. *Кокс Д.Р., Хинкли Д.В.* Теоретическая статистика. — М.: Мир, 1978. — 560 с.

12. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ. / 2-е изд. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

13. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. — М.: Наука, 1979. — 408 с.

14. Методика. Проверка однородности двух выборок параметров продукции при оценке ее технического уровня и качества. — М.: ВНИИ стандартизации, 1987. — 116 с.

15. *Никитин Я.Ю.* Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. — М.: Наука, 1995. — 240 с.

16. *Новиков Д.А.* Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). М.: МЗ-Пресс, 2004. — 67 с.

17. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

18. *Орлов А.И.* О современных проблемах внедрения прикладной статистики и других статистических методов. — Журнал «Заводская лаборатория». 1992. Т.58. No.1. С.67–74.

19. *Орлов А.И.* Высокие статистические технологии. — Журнал «Заводская лаборатория». 2003. Т.69. No.11. С.55–60.

20. *Орлов А.И.* Эконометрика. Из. 3-е, перераб. и дополн. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

21. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М. : Экзамен, 2006. — 671 с.

22. *Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. Изд. 3-е, стереотипное. — М.: Наука, 1969. — 512 с.

23. *Смолянский М.Л.* Таблицы неопределенных интегралов. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 108 с.

24. *Холлендер М., Вульф Д.* Непараметрические методы статистики. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 518 с.

Контрольные вопросы и задачи

1. Почему непараметрические методы анализа числовых данных предпочтительнее параметрических?

2. По данным табл.2.1 раздела 2.2 рассчитайте значения статистик хи-квадрат с целью проверки согласия и однородности для распределений дней рождения по знакам Зодиака.

3. Укажите доверительные границы для математических ожиданий двух независимых выборок (с доверительной вероятностью 0,95) и проверьте гипотезу о равенстве математических ожиданий с помощью критерия Крамера-Уэлча (на уровне значимости $\alpha=0{,}05$):

Номер варианта	m	$\bar{X}$	s_x	n	$\bar{Y}$	s_y
1	100	13,7	7,3	200	12,1	2,5
2	200	10	5,3	400	12	1,7

4. Даны две выборки (табл.2.11). Проверьте гипотезу об однородности функций распределения с помощью критерия Вилкоксона (на уровне значимости $\alpha=0{,}05$):

Таблица 2.11

Две выборки

Первая выборка	33	27	12	27	39	42	47	48	50	32
Вторая выборка	11	20	30	31	22	18	17	25	28	29

5. Какова роль альтернативных гипотез, в частности, гипотезы сдвига, в выборе критерия для проверки нулевой гипотезы?

6. Чем реальный (истинный) уровень значимости отличается от номинального?

7. Как выбрать параметр рандомизации p, чтобы уровень значимости рандомизированного критерия совпал с заданным номинальным уровнем $\alpha_?$?

8. Почему трудно сравнивать между собой статистические критерии проверки гипотез, статистики которых имеют дискретные распределения?

Темы докладов, рефератов, исследовательских работ

1. Скорость сходимости распределений статистик хи-квадрат для проверки согласия и однородности к предельному хи-квадрат распределению.

2. Сравнение двухвыборочных критериев Крамера-Уэлча и Стьюдента.

3. Достоинства и недостатки двухвыборочного критерия Вилкоксона по сравнению с другими непараметрическими критериями однородности.

4. Для данных задачи 4 (табл.2.11) рассчитайте значения статистик Смирнова и типа омега-квадрат (Лемана — Розенблатта) и проверьте однородность двух независимых выборок.

Примечание. В соответствии с [2] для уровня значимости 0,05 критическим значением для критерия Смирнова является 0,7 (т.е. гипотеза однородности отклоняется, если значение статистики Смирнова не менее 0,7). Для того же уровня значимости критическим значением для критерия типа омега-квадрат является 0,461.

5. Многообразие непараметрических критериев проверки гипотез (по монографиям [2, 5, 24]).

6. Сравнение мощностей непараметрических критериев однородности.

7. Рандомизированные критерии.

8. Подходы к определению асимптотической эффективности непараметрических критериев.

Глава 3

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Одним из наиболее важным этапов эконометрического моделирования является восстановление (выявление) зависимости между переменными на основе статистических данных, которая затем используется при организационно-экономическом моделировании, в частности, для прогнозирования, оптимизации, принятия решений.

3.1. Восстановление линейной зависимости между двумя переменными

Начнем с задачи точечного и доверительного оценивания линейной функции одной переменной $x(t) = at + b$.

Исходные данные — набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1,2,\ldots,n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции, курс доллара США, объем месячного производства или размер дневной выручки торговой точки). Предполагается, что переменные связаны линейной зависимостью

$$x_k = a\,t_k + b + e_k,\; k = 1,2,\ldots,n,$$

где a и b — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость.

Обычно оценивают параметры a и b линейной зависимости методом наименьших квадратов, как показано ниже. Затем восстановленную зависимость используют, например, для точечного и интервального прогнозирования.

Оценки метода наименьших квадратов. Немецкий математик Ф. Клейн, тщательно изучавший научное наследство своего великого соотечественника К. Гаусса, пишет, что метод наименьших квадратов был разработан К. Гауссом в 1795 г. [4, с.37]. (Как много позже сказано в [8, с.181], «Гаусс указывает две даты: 1794 г. и 1795 г. Современные исследователи склонны считать, что верная дата — это 1794 г.») Согласно этому методу для расчета наилучшей функции, приближающей линейным образом зависимость x от t, следует рассмотреть функцию двух переменных

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - at_k - b)^2 \,.$$

Оценки метода наименьших квадратов — это такие значения a^* и b^*, при которых функция $f(a,b)$ достигает минимума по всем значениям аргументов.

Чтобы найти эти оценки, надо вычислить частные производные от функции $f(a,b)$ по аргументам a и b, приравнять их 0, затем из полученных уравнений найти оценки: Имеем:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = \sum_{k=1}^{n} 2(x_k - at_k - b)(-t_k)\,,$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = \sum_{k=1}^{n} 2(x_k - at_k - b)(-1)\,.$$

Преобразуем правые части полученных соотношений. Вынесем за знак суммы общие множители 2 и (–1). Затем рассмотрим слагаемые. Раскроем скобки в первом выражении, получим, что каждое слагаемое разбивается на три. Во втором выражении также каждое слагаемое есть сумма трех. Значит, каждая из сумм разбивается на три суммы. Имеем:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = (-2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} t_i\right),$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = (-2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i - bn\right).$$

Приравняем частные производные 0. Тогда в полученных уравнениях можно сократить множитель (–2). Оценки метода наименьших квадратов находим из системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} t_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - a\sum_{i=1}^{n} t_i - bn = 0.$$

Запись решения этой системы будет более компактной, если использовать не суммы, а средние арифметические:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i,\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\quad \overline{xt} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i t_i,\quad \overline{t^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^2 .$$

Разделив обе части уравнений на n, перейдем к системе:

$$\overline{xt} - a\overline{t^2} - b\bar{t} = 0,$$

$$\bar{x} - a\bar{t} - b = 0.$$

Из второго уравнения получаем, что

$$b = \bar{x} - a\bar{t}.$$

Подставим в первое уравнение:

$$\overline{xt} - a\overline{t^2} - (\bar{x} - a\bar{t})\bar{t} = 0.$$

Раскрыв скобки, решаем это линейное уравнение с одной переменной a. Получаем оценки метода наименьших квадратов:

$$a^* = \frac{\overline{xt} - \overline{x}\,\overline{t}}{\overline{t^2} - (\overline{t})^2}, \quad b^* = \overline{x} - a^*\overline{t}\,. \tag{3.1}$$

Следовательно, восстановленная функция имеет вид

$$x^*(t) = a^*t + b^*.$$

Замечание. С точки зрения теории оптимизации равенство частных производных 0 — необходимое условие минимума, но недостаточное. Однако в силу единственности решения системы линейных уравнений равенства (3.1) дают точку минимума, поскольку существование минимума вытекает из того, что в качестве области определения непрерывной функции $f(a,b)$ может рассматриваться некоторое ограниченное замкнутое множество. Если же имеются априорные ограничения на параметры, то формулы (3.1) не всегда применимы. Например, пусть $x(t)$ — издержки производства при выпуска продукции объема t. Тогда параметры линейной зависимости имеют экономическую интерпретацию: b — постоянные издержки (вне зависимости от объема производства), a — переменные издержки (на одну единицу выпущенной продукции). Очевидно, постоянные издержки неотрицательны: $b \geqslant 0$. Однако при расчетах по формулам (3.1) при «неудачных» исходных данных может быть получено значение $b^* < 0$. Очевидно, отрицательным значением постоянных издержек пользоваться нельзя. В таком случае можно порекомендовать принять в исходной модели $b = 0$ и методом наименьших квадратов найти наилучшую оценку единственного параметра — переменных издержек a.

Пример 1 (*оценивание по методу наименьших квадратов*). Чтобы не отвлекать внимание читателя на содержательную интерпретацию исходных данных и результатов расчетов, рассмотрим условный пример. Пусть даны $n = 6$ пар чисел (t_k , x_k), $k = 1,2,\ldots,6$, представленных во втором и третьем столбцах табл.3.1 (строки 1– 6). Расчеты по методу наименьших квадратов удобно проводить с помощью таблицы, подобной табл.3.1, последовательно заполняя ее столбцы либо вручную, либо на компьютере с помощью электронной таблицы EXCEL или иного программного продукта.

В соответствии с формулами (3.1) для вычисления оценок метода наименьших квадратов необходимо рассчитать четыре величины $\bar{t}, \bar{x}, \overline{t^2}, \overline{xt}$. Для получения первых двух из них достаточно найти суммы чисел, представленных во втором и третьем столбцах табл.3.1. Соответствующие суммы записаны в седьмой строке (обозначена символом Σ), а средние арифметические — в восьмой строке. Для удобства читателя в девятой строке приведены обозначения средних величин, стоящих строкой выше.

Для расчета двух оставшихся средних заполнены клетки четвертого и пятого столбцов, а затем проведено суммирование по этим столбцам. Все необходимые операции — поэлементное возведение в квадрат, перемножение столбцов, суммирование по столбцам — легко осуществить с помощью электронной таблицы EXCEL.

Остальные столбцы табл.3.1 используются ниже при дальнейшем развертывании алгоритмов метода наименьших квадратов.

Таблица 3.1

Расчет по методу наименьших квадратов при восстановлении линейной функции одной переменной

i	t_i	x_i	t^2_i	$t_i x_i$	$a \cdot t_i$	$\hat{x}_i$	$x_i - \hat{x}_i$	$(x_i - \hat{x}_i)^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	12	1	12	3,14	12,17	–0,17	0,03
2	3	20	9	60	9,42	18,45	1,55	2,40
3	4	20	16	80	12,56	21,59	–1,59	2,53
4	12	32	49	224	21,98	31,01	0,99	0,98
5	9	35	81	315	28,26	37,29	–2,29	5,24
6	10	42	100	420	31,40	40,43	1,57	2,46
Σ	34	161	256	1111			0,06	13,64

i	t_i	x_i	t^2_i	$t_i\ x_i$	$a \cdot t_i$	$\hat{x}_i$	$x_i - \hat{x}_i$	$(x_i - \hat{x}_i)^2$
$\frac{\Sigma}{n}$	5,67	26,83	42,67	185,17				2,27
	$\bar{t}$	$\bar{x}$	$\bar{t}^2$	$\overline{xt}$				$(\sigma^2)^*$

В соответствии с формулами (3.1) оценки метода наименьших квадратов для приведенных в табл. 3.1 данных таковы:

$$a^* = \frac{185,17 - 26,83 \times 5,67}{42,67 - (5,67)^2} = \frac{33,04}{10,52} = 3,14,$$

$$b^* = 26,83 - 3,14 \times 5,67 = 9,03\ ,$$

а восстановленная зависимость имеет вид

$$x^*(t) = 3,14\, t + 9,03.$$

Варианты оценок метода наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов рассматривается во многих литературных источниках, и формулы для оценок параметров зачастую имеют различный вид. Однако все они переходят друг в друга в результате тождественных преобразований.

Для развертывания вероятностно-статистической теории нам понадобится другая параметризация линейной зависимости, а именно

$$x_k = a\,(t_k - \bar{t}) + d + e_k,\ k = 1,2,\dots,n,$$

где a и d — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость. Среднее арифметическое моментов времени $\bar{t}$ введено в модель для облегчения математико-статистических выкладок.

Для оценивания параметров a и d необходимо согласно методу наименьших квадратов минимизировать функцию

$$F(a,d) = \sum_{k=1}^{n} (x_i - a(t_i - \bar{t}) - d)^2\ .$$

Как и раньше, вычисляем частные производные и приравниваем их 0. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t}) = 0\,, \tag{3.2}$$

уравнения приобретают вид

$$\sum_{k=1}^{n} x_i (t_i - \bar{t}) - a\sum_{k=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2 = 0\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - dn = 0\,.$$

Следовательно, оценки метода наименьших квадратов имеют вид

$$a^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\left(t_k - \bar{t}\,\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(t_k - \bar{t}\,\right)^2}, \qquad d^* = x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,. \tag{3.3}$$

В силу соотношения (3.2) оценку a^* можно записать в более симметричном виде:

$$a^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(t_k - \bar{t})}{\sum\limits_{k=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}\,.$$

Эту оценку нетрудно преобразовать и к виду

$$a^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i t_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ii}\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i\right)^2}\,. \tag{3.4}$$

Следовательно, восстановленная функция, с помощью которой можно прогнозировать и интерполировать, имеет вид

$$x^*(t) = a^*(t - \bar{t}) + d^*.$$

Обратим внимание на то, что использование $t_{ср}$ в последней формуле ничуть не ограничивает ее общность. Сравним с ранее рассмотренной моделью вида

$x_k = c\, t_k + b + e_k,\ k = 1,2,\ldots,n.$

Ясно, что

$$c = a,\ \ b = d - a\bar{t}\ .$$

Аналогичным образом связаны оценки параметров:

$$c^* = a^*,\ \ b^* = d^* - a^*\bar{t}$$

Для данных табл.3.1 в соответствии с формулой (3.3) d^* $=26{,}83$, а согласно формуле (3.4)

$$a^* = \frac{1111 - \frac{1}{6}161 \times 34}{256 - \frac{1}{6}(34)^2} = \frac{1111 - 912{,}33}{256 - 192{,}67} = \frac{198{,}67}{63{,}33} = 3{,}14.$$

Следовательно, прогностическая функция (т.е. восстановленная зависимость) имеет вид

$x \cdot (t) = 3{,}14(t - 5{,}67) + 26{,}83 = 3{,}14t - 3{,}14 \times 26{,}83 = 3{,}14t - 17{,}80 + 26{,}83 = 3{,}14t + 9{,}03.$

Естественно, результат тот же, что и при использовании первоначальной параметризации (формы линейной зависимости).

Восстановленные значения и оценка точности приближения. Следующий (второй) этап анализа данных — оценка точности восстановления (приближения) зависимости (функции) методом наименьших квадратов. Сначала рассматриваются т.н. восстановленные значения

$$\hat{x}_i = x \cdot (t_i)\ ,\ i = 1,\ 2,\ \ldots\ n.$$

Это те значения, которые полученная в результате расчетов прогностическая функция принимает в тех точках, в которых известны истинные значения зависимой переменной x_i.

Вполне естественно сравнить восстановленные и истинные значения. Это и сделано в шестом — восьмом столбцах табл.3.1. Для простоты расчетов в шестом столбце представлены произведения $a \cdot t_i$, седьмой отличается от шестого добавлением константы $b^* = 9{,}03$ и содержит восстановленные значения. Восьмой столбец — это разность третьего и седьмого.

Непосредственный анализ восьмого столбца табл.3.1 показывает, что содержащиеся в нем числа сравнительно невелики по величине по сравнению с третьим столбцом (на порядок меньше по величине). Кроме того, знаки «+» и «-» чередуются. Эти два признака свидетельствуют о правильности расчетов. При использовании метода наименьших квадратов знаки не всегда чередуются. Однако если сначала идут только плюсы, а потом только минусы (или наоборот, сначала только минусы, а потом только плюсы), то это верный показатель того, что в вычислениях допущена ошибка (неправильно оценен коэффициент a).

Верно следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Справедливо тождество*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \widehat{x}_i \right) = 0.$$

Доказательство этой теоремы оставляем читателю в качестве упражнения.

Однако сумма по восьмому столбцу дает 0,06, а не 0. Незначительное отличие от 0 связано с ошибками округления при вычислениях. Близость суммы значений зависимой переменной и суммы восстановленных значений — практический *критерий правильности расчетов*. В соответствии с ним сумма элементов восьмого столбца должна быть мала по сравнению с элементами этого столбца.

Представляет интерес относительная погрешность восстановления. В точке t_k это величина

$$\left|\frac{x_k - \widehat{x}_k}{x_k}\right|.$$

Для данных табл.3.1 это величины

$$\frac{0,17}{12}, \frac{1,55}{20}, \frac{1,59}{20}, \frac{0,99}{32}, \frac{2,29}{35}, \frac{1,57}{42}.$$

Максимальной из них является 1,59/20 = 0,08. Точность восстановления естественно выразить в процентах:

$$\max_{1 \le k \le n}\left|\frac{x_k - \widehat{x}_k}{x_k}\right| \times 100\% = 8\%.$$

В социально-экономических исследованиях точность восстановления 10–15% признается хорошей. Конечно, в астрономических вычислениях, например, при восстановлении орбиты астероида Церера (именно для решения этой задачи К. Гаусс разработал метод наименьших квадратов), точность должна быть гораздо выше (т.е рассматриваемый показатель — максимум модуля относительных погрешностей — должен быть гораздо меньше).

Непараметрическая вероятностная модель. Перейдем к третьему этапу анализа данных. Для получения оценок параметров и прогностической функции нет необходимости обращаться к какой-либо вероятностной модели. Однако для того, чтобы изучать погрешности оценок параметров и восстановленной функции, т.е. строить доверительные интервалы для a^*, b^* и $x^*(t)$, подобная модель необходима.

Формулировка модели такова. Пусть значения независимой переменной t детерминированы, а погрешности e_k, $k = 1,2,\ldots,n$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2неизвестной статистику. В остальном функция распределения погрешностей e_k произвольна.

Поскольку не предполагается, что эта функция входит в то или иное параметрическое семейство, то рассматриваемая модель является непараметрической.

В дальнейшем неоднократно будем использовать Центральную предельную теорему (ЦПТ) теории вероятностей (для разнораспределенных слагаемых) для величин e_k, $k = 1,2,\dots,n$ (с весами), поэтому для выполнения ее условий необходимо предположить, например, что погрешности e_k, $k = 1,2,\dots,n$, финитны или имеют конечный третий абсолютный момент. Каждое конкретное слагаемое (с учетом веса) должно быть бесконечно малым относительно всей суммы. Однако заострять здесь внимание на этих внутриматематических «условиях регулярности» нет необходимости (см. Приложение 1, раздел П.1.2).

Асимптотические распределения оценок параметров. Из формулы (3.3) следует, что

$$d^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t}) + d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k \,. \quad (3.5)$$

Согласно ЦПТ оценка d^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием d и дисперсией σ^2/n, оценка которой приводится ниже. С точки зрения математической статистики вектор оценок (a^*, d^*) обладает более простыми свойствами и легче поддается изучению, чем вектор оценок (a^*, b^*), что и является причиной введения в рассмотрение модели вида $x_k = a(t_k - \bar{t}) + d + e_k$.

Из формул (3.3) и (3.5) вытекает, что

$$x_k - \bar{x} = a(t_k - \bar{t}) + d + e_k - d - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = a(t_k - \bar{t}) + e_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k \,,$$

$$(x_k - \bar{x})(t_k - \bar{t}) = a(t_k - \bar{t})^2 + e_k(t_k - \bar{t}) - \frac{(t_k - \bar{t})}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k \,.$$

Последнее слагаемое во втором соотношении при суммировании по k обращается в 0, поэтому из приведенных выше формул для a^* следует, что

$$a^* = a + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \frac{(t_k - \bar{t})}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \bar{t})^2} \,. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) показывает, что оценка a^* является асимптотически нормальной с математическим ожиданием a и дисперсией

$$D(a^*) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D(e_k) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \overline{t})^2} \quad .$$

Отметим, что многомерная нормальность имеет быть, когда каждое слагаемое в формуле (3.6) мало сравнительно со всей суммой, т.е. когда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\max\limits_{1 \le k \le n} | t_k - \overline{t} |}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (t_k - \overline{t})^2}} = 0 \ .$$

Из формул (3.5) и (3.6) и исходных предположений о погрешностях вытекает также то, что математические ожидания оценок равны оцениваемым параметрам (в терминах математической статистики -оценки параметров являются несмещенными).

Несмещенность и асимптотическая нормальность оценок метода наименьших квадратов позволяют легко указывать для них асимптотические доверительные границы (аналогично границам для долей в главе 1 выше) и проверять статистические гипотезы, например, о равенстве определенным значениям, прежде всего 0. Предоставляем читателю возможность выписать формулы для расчета доверительных границ и сформулировать правила проверки упомянутых гипотез.

Асимптотическое распределение прогностической функции. Поскольку

$$x^*(t) = \left(a + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right)(t - \overline{t}) + d + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e_k =$$

$$= a(t - \overline{t}) + d + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k + \frac{1}{n} \right) e_k \ ,$$

то в силу ЦПТ случайная величина $x^*(t)$ имеет асимптотически нормальное распределение. Из формул (3.5) и (3.6) следует, что

$$M(x^*(t)) = M\{a^*(t-\overline{t}) + d^*\} = M(a^*)(t-\overline{t}) + M(d^*) =$$

$$= a(t-\overline{t}) + d = x(t),$$

т.е. рассматриваемая оценка прогностической функции является несмещенной. Поэтому

$$x^*(t) - Mx^*(t) = (a^* - a)(t-\overline{t}) + d^* - d.$$

Следовательно, дисперсия оценки имеет вид

$$D(x^*(t)) = D(a^*)(t-\overline{t})^2 + 2M\{(a^*-a)(d^*-d)(t-\overline{t})\} + D(d^*).$$

При этом, поскольку погрешности e_k независимы в совокупности и имеют нулевое математическое ожидание, то $M(e_k e_j) = 0$, $k \neq j$ и

$$M\{(a^*-a)(d^*-d)(t-\overline{t})\} = M\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k\right)(t-\overline{t})\right\} =$$

$$= (t-\overline{t})\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} c_k\left(\sum_{j=1}^{n} M(e_k e_j)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(t-\overline{t})\sum_{k=1}^{n} c_k M(e_k^2) = \frac{1}{n}(t-\overline{t})\sigma^2\sum_{k=1}^{n} c_k = 0.$$

Таким образом, с учетом найденных ранее выражений для дисперсий параметров получаем, что

$$D(x^*(t)) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\overline{t})^2}(t-\overline{t})^2 + 0 + \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2\left\{\frac{1}{n} + \frac{(t-\overline{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\overline{t})^2}\right\}. \tag{3.7}$$

Итак, оценка $x^*(t)$ прогностической функции является несмещенной и асимптотически нормальной. Для практического использования ее асимптотического распределения с целью построения доверительных прогностических интервалов необходимо уметь оценивать остаточную дисперсию $M(e^2_i) = \sigma^2$.

Оценивание остаточной дисперсии. В точках t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеются исходные значения зависимой переменной x_k и восстановленные значения $x^*(t_k)$. Рассмотрим естественную характеристику расхождения между исходными и восстановленными значениями

$$SS = \sum_{k=1}^{n}(x^*(t_k) - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left\{(a^* - a)(t_k - \overline{t}) + (d^* - d) - e_k\right\}^2 .$$

Величина SS называется остаточной суммой квадратов.

В соответствии с формулами (3.5) и (3.6)

$$SS = \sum_{k=1}^{n}\left\{(t_k - \overline{t})\sum_{j=1}^{n} c_j e_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_j - e_k\right\}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k - \overline{t}) + \frac{1}{n}\right]e_j - e_k\right\}^2 = \sum_{k=1}^{n} SS_k$$

где

$$SS_k = \left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k - \overline{t}) + \frac{1}{n}\right]e_j - e_k\right\}^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n .$$

Найдем математическое ожидание каждого из слагаемых:

$$M(SS_k) = M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k - \overline{t}) + \frac{1}{n}\right]e_j - e_k\right\}^2 = M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k - \overline{t}) + \frac{1}{n}\right]e_j\right\}^2 -$$
$$-2M\left(\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k - \overline{t}) + \frac{1}{n}\right]e_j\right\}e_k\right) + M\left(e_k^2\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\{c_j(t_k - \overline{t}) + \frac{1}{n}\right\}^2\sigma^2 -$$
$$-2\left\{c_k(t_k - \overline{t}) + \frac{1}{n}\right\}\sigma^2 + \sigma^2$$

Из сделанных ранее предположений вытекает, что при $n \to \infty$ имеем $M(SS_i) \to \sigma^2$, $I = 1, 2, \dots n$. Оценив дисперсию случайной величины SS/n, можно показать, что статистика SS/n является состоятельной оценкой дисперсии σ^2.

В последнем девятом столбце табл.3.1 приведены квадраты значений из восьмого столбца. Их сумма — это остаточная сумма квадратов $SS = 13{,}64$. В соответствии со сказанным выше рассчитанными по исходным данным табл.3.1 значениями состоятельных (в смысле математической статистики) оценок дисперсии погрешностей и их среднего квадратического отклонения являются

$$(\sigma^2)^* = \frac{SS}{n} = \frac{13{,}64}{6} = 2{,}27; \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}} = \sqrt{\frac{13{,}64}{6}} = 1{,}51.$$

Доверительные границы для прогностической функции. Получение состоятельной оценки дисперсии погрешностей дает возможность завершить последовательность задач, связанных с рассматриваемым простейшим вариантом метода наименьших квадратов. Исходим из установленной ранее асимптотической нормальности точечного прогноза $x^*(t)$. Не представляет труда выписывание верхней $x_{\text{в}}(t)$ и нижней $x_{\text{н}}(t)$ границ для прогностической функции:

$$x_B(t) = x^*(t) + \delta(t), \;\; x_H(t) = x^*(t) - \delta(t),$$

где погрешность прогноза $\delta(t)$ имеет вид

$$\delta(t) = U(p)\sqrt{Dx^*(t)}.$$

Оценив дисперсию $x^*(t)$ с помощью формулы (3.7), в которую вместо неизвестной исследователю дисперсии погрешностей σ^2 подставлена её оценка, получаем окончательный вид формулы для расчета полуширины доверительного интервала:

$$\delta(t) = U(p)\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(t - \overline{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}\left(t_k - \overline{t}\right)^2}}, \;\; \sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}}.$$

Здесь p — доверительная вероятность, $U(p)$, как и в предыдущих главах, — квантиль нормального распределения порядка $(1+p)/2$, т.е.

$$\Phi(U(p)) = \frac{1+p}{2}, \quad U(p) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right).$$

При $p = 0{,}95$ (наиболее применяемое значение) имеем $U(p) = 1{,}96$. Для других доверительных вероятностей соответствующие значения квантилей можно найти в статистических таблицах (см., например, наилучшее в этой сфере издание [2]).

Пример 2. Продолжим анализ данных табл.3.1, исходя из описанной выше вероятностно-статистической модели.

Рассмотрим распределения оценок параметров. Оценка d^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием d и дисперсией, которая оценивается как $(\sigma^2)^*/n = 2{,}27/6 = 0{,}38$ (здесь считаем, что 6 — «достаточно большое» число, что, конечно, можно обосновать, изучив точность приближения методом статистических испытаний или иным). Оценкой среднего квадратического отклонения является 0,615. Следовательно, при доверительной вероятности 0,95 доверительный интервал для параметра d имеет вид (26,83– 1,96 × 0,615; 26,83 + 1,96 × 0,615) = (25,625; 28,035).

В формулах для дисперсий участвует величина, которую можно представить двумя способами:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - t_{\text{ср}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^2 - 2t_i t_{\text{ср}} + t_{\text{ср}}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2t_{\text{ср}}\sum_{i=1}^{n} t_i + n t_{\text{ср}}^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n t_{\text{ср}}^2.$$

Подставив численные значения (табл.3.1), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n t_{\text{ср}}^2 = 256 - 6(5{,}67)^2 = 63{,}1.$$

Дисперсия оценки a^* коэффициента при линейном члене прогностической функции оценивается как 2,27/63,1 = 0,036, а среднее квадратическое отклонение — как 0,19. Следовательно, при доверительной вероятности 0,95 доверительный интервал для параметра a имеет вид (3,14– 1,96 × 0,19; 3,14 + 1,96 × 0,19) = (2,77; 3,51).

Прогностическая функция с учетом погрешности имеет вид (при доверительной вероятности 0,95)

$$x^*(t) = 3{,}14t + 9{,}03 \pm 1{,}96 \times 1{,}51\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{(t-5{,}67)^2}{63{,}1}}\,.$$

В этой записи сохранено происхождение различных составляющих. Упростим:

$$x^*(t) = 3{,}14t + 9{,}03 \pm 2{,}96\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{(t-5{,}67)^2}{63{,}1}}\,. \qquad (3.8)$$

Например, при $t = 12$ эта формула дает

$$x \cdot (12) = 46{,}71 \pm 2{,}65.$$

Следовательно, нижняя доверительная граница — это 44,06, а верхняя доверительная граница — это 49,36.

Насколько далеко можно прогнозировать? Обычный ответ таков — до тех пор, пока сохраняется тот стабильный комплекс условий, при котором справедлива рассматриваемая зависимость. Изобретатель метода наименьших квадратов Карл Гаусс исходил из задачи восстановления орбиты астероида (малой планеты) Церера. Движение подобных небесных тел может быть рассчитано на сотни лет. А вот параметры комет (например, срок возвращения) не поддаются столь точному расчету, поскольку за время пребывания в окрестности Солнца сильно меняется масса кометы. В социально-экономической области горизонты надежного прогнозирования еще менее определены. В частности, они сильно зависят от решений государственных органов.

Чтобы выявить роль погрешностей в прогностической формуле, рассмотрим формальный предельный переход $t \to \infty$. Тогда входящие в формулу (3.8) величины 9,03; 1/6; 5,67 становятся бесконечно малыми, и

$$x^*(t) \approx 3{,}14t \pm \frac{2{,}96}{\sqrt{63{,}1}}t = (3{,}14 \pm 0{,}37)t\,.$$

Таким образом, погрешности составляют около

$$\frac{100 \times 0,37}{3,14}\% = 11,8\%$$

от тренда (математического ожидания) прогностической функции. В социально-экономических исследованиях подобные погрешности считаются вполне приемлемыми.

Краткое сравнение параметрического и непараметрического подходов. Во многих литературных источниках рассматривается параметрическая вероятностная модель метода наименьших квадратов. В ней предполагается, что погрешности имеют нормальное распределение. Это предположение позволяет математически строго получить ряд выводов. Так, распределения статистик вычисляются точно, а не в асимптотике, соответственно вместо квантилей нормального распределения используются квантили распределения Стьюдента, а при оценивании дисперсии погрешностей остаточная сумма квадратов SS делится не на n, а на $(n-2)$. Ясно, что при росте объема данных различия стираются.

Рассмотренный выше непараметрический подход не использует нереалистическое предположение о нормальности погрешностей. Платой за это является асимптотический характер результатов. В случае простейшей модели метода наименьших квадратов оба подхода дают практически совпадающие рекомендации (поскольку квантили распределения Стьюдента при росте объема выборки приближаются к квантилям нормального распределения). Это не всегда так, не всегда два подхода дают близкие результаты. Например, известно, что в задаче обнаружения выбросов методы, опирающиеся на нормальное распределение, нельзя считать обоснованными, и это их неприятное свойство было обнаружено с помощью непараметрического подхода (см. [18, п.7.2], [17, п.4.2]).

Об общих принципах организационно-экономического моделирования. Ход проведенного в настоящем разделе исследования позволяет кратко сформулировать несколько общих принципов построения, описания и использования организационно-экономических методов, в частности, в области прикладной статистики. Во-первых, должны быть четко сформулированы исходные предпосылки, т.е. полностью описана используемая вероятностно-статистическая модель. Во-вторых, не следует принимать предпосылки, которые редко выполняются на практике. В-третьих, алгоритмы расчетов должны быть корректны с точки зрения математико-статистической теории. В-четвертых, алгоритмы должны давать полезные для практики выводы.

Применительно к задаче восстановления зависимостей это означает, что целесообразно применять непараметрический подход, что и сделано выше. Однако предположение нормальности, хотя и очень сильно сужает возможности применения, с чисто математической точки зрения позволяет продвинуться дальше. Поэтому для первоначального изучения ситуации, так сказать, «в лабораторных условиях», нормальная модель может оказаться полезной.

3.2. Основы линейного регрессионного анализа

Метод наименьших квадратов, рассмотренный выше в простейшем случае, допускает различные обобщения. Например, метод наименьших квадратов дает алгоритм расчетов, если исходные данные — по-прежнему набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1,2,\ldots,n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции), но восстанавливать надо не линейную зависимость, а квадратическую:

$$x(t) = at^2 + bt + c.$$

Следует рассмотреть функцию трех переменных

$$f(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - at_k^2 - bt_k - c\right)^2 .$$

Оценки метода наименьших квадратов — это такие значения параметров a^*, b^* и c^*, при которых функция $f(a,b,c)$ достигает минимума по всем значениям аргументов. Чтобы найти эти оценки, надо вычислить частные производные от функции $f(a,b,c)$ по аргументам a, b и c, приравнять их 0, затем из полученных уравнений найти оценки: Имеем:

$$\frac{\partial t(a,b,c)}{\partial a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial a}\left(x_k - at_k^2 - bt_k - c\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(-t_k^2\right)\left(x_k - at_k^2 - bt_k - c\right)$$

.

Приравнивая частную производную к 0, получаем линейное уравнение относительно трех неизвестных параметров a, b, c:

$$a\sum_{k=1}^{n} t_k^4 + b\sum_{k=1}^{n} t_k^3 + c\sum_{k=1}^{n} t_k^2 = \sum_{k=1}^{n} t_k^2 x_k$$

Приравнивая частную производную по параметру b к 0, аналогичным образом получаем уравнение

$$a\sum_{k=1}^{n} t_k^3 + b\sum_{k=1}^{n} t_k^2 + c\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} t_k x_k$$

Наконец, приравнивая частную производную по параметру c к 0, получаем уравнение

$$a\sum_{k=1}^{n} t_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} t_k + cn = \sum_{k=1}^{n} x_k \ .$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными, находим оценки метода наименьших квадратов.

Другие задачи, рассмотренные в предыдущем разделе (доверительные границы для параметров и прогностической функции и др.), также могут быть решены. Соответствующие алгоритмы более громоздки. Для их записи полезен аппарат матричной алгебры (см., например, одну из лучших в этой области монографий [23]). Для реальных расчетов используют соответствующие компьютерные программы.

Линейный регрессионный анализ. Раздел прикладной статистики, посвященный восстановлению зависимостей, называется регрессионным анализом. Термин «линейный регрессионный анализ» используют, когда рассматриваемая функция линейно зависит от оцениваемых параметров (от независимых переменных зависимость может быть произвольной). Теория оценивания неизвестных параметров хорошо развита именно в случае линейного регрессионного анализа. Если же линейности нет и нельзя перейти к линейной задаче, то, как правило, хороших свойств от оценок ожидать не приходится.

Продемонстрируем подходы в случае зависимостей различного вида. Если зависимость имеет вид многочлена (полинома)

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^2 + \ldots + a_m t^m,$$

то коэффициенты многочлена могут быть найдены путем минимизации функции

$$f\left(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - a_0 - a_1 t_k - a_2 t_k^2 - a_3 t_k^3 - \ldots - a_m t_k^m\right)^2$$

Функция от t не обязательно должна быть многочленом. Можно, например, добавить периодическую составляющую, соответствующую сезонным колебаниям. Хорошо известно, например, что инфляция (рост потребительских цен) имеет четко выраженный годовой цикл. А именно, в среднем цены быстрее всего растут зимой, в декабре — январе, а медленнее всего (иногда в среднем даже падают) летом, в июле — августе (подробнее проблемы измерения инфляции рассмотрены в главе 4). Пусть для определенности

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^2 + \ldots + a_m t^m + A\sin Bt,$$

тогда неизвестные параметры могут быть найдены путем минимизации функции

$$f\left(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, A, B\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(x_k - a_0 - a_1 t_k - a_2 t_k^2 - a_3 t_k^3 - \ldots - a_m t_k^m - A\sin Bt_k\right)^2.$$

Если время измеряется в годах, то в качестве периодической составляющей (с периодом год) естественно взять $A\cos(2\pi t)$.

Преобразования переменных. Пусть $I(t)$ -индекс инфляции в момент t. Принцип стабильности условий приводит к гипотезе о постоянстве темпов роста средних цен, т.е. индекса инфляции. Таким образом, естественная модель для индекса инфляции — это

$$I(t) = Ae^{Bt}.$$

Эта модель не является линейной, метод наименьших квадратов непосредственно применять нельзя. Однако если прологарифмировать обе части предыдущего равенства:

$$\ln I(t) = \ln A + Bt,$$

и ввести новую переменную $x = \ln I(t)$, то получим линейную зависимость x от t, процедура (алгоритм) оценивания параметров которой рассмотрена выше.

В главе 1 был описан метод оценивания функции спроса по экспериментальным данным. Естественно восстановить зависимость по наборам пар чисел $(p_i, D_i = D(p_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$. На центральной части диапазона изменения цены вполне естественно использовать линейную зависимость (поскольку, как отметили еще Ньютон и Лейбниц, любую гладкую функцию на небольшом интервале можно с достаточной точностью приблизить касательной). Однако по краям диапазона (т.е. при малых ценах и при больших ценах) линейную зависимость применять нельзя, поскольку ее график выходит за пределы первого квадранта. Естественно использовать степенную зависимость

$$D = D(p) = Cp^{-\alpha},$$

где $C > 0$, $\alpha > 0$. Эта зависимость нелинейна, метод наименьших квадратов непосредственно применить нельзя. Но можно преобразовать переменные с целью приведения зависимости к линейной. Логарифмируя, получим:

$$\ln D = \ln C \quad \alpha \ln p.$$

Следовательно, если ввести переменные $x = \ln D$, $t = \ln p$, то между этими переменными имеется линейная зависимость, параметры которой оценивать умеем.

Итак, во многих случаях путем преобразования переменных удается перейти от нелинейных зависимостей к линейным с целью обеспечения корректного применения метода наименьших квадратов. Например, если

$$y = \sqrt{at+b}\ ,$$

то такой переход осуществляется путем введения переменной $x = y^2$. А если

$$y = \frac{1}{at+b}\ ,$$

то замена $z=1/y$ приводит к линейной зависимости $z = a + bx$. Если $y = (a+bx)^2$, то замена $z=\sqrt{y}$ приводит к линейной зависимости $z = a + bx$. Для каждого конкретного случая подбирают своё преобразование.

Многомерная регрессия. Независимых переменных может быть не одна, а несколько. Пусть, например, по исходным данным (x_k, y_k, z_k,), $k = 1, 2, \dots n$,требуется оценить неизвестные параметры a и b в зависимости

$$z = ax + by + \varepsilon,$$

где ε — погрешность. Это можно сделать, минимизируя функцию

$$f(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \left(z_k - ax_k - by_k\right)^2$$

Зависимость от x и y не обязательно должна быть линейной. Предположим, что из каких-то соображений известно, что зависимость должна иметь вид

$$z = ax + by + cx^2y + dxy + ey^3 + \varepsilon,$$

тогда для оценки пяти неизвестных параметров a, b, c, d, e необходимо минимизировать функцию

$$f(a,b,c,d,e) = \sum_{k=1}^{n} \left(z_k - ax_k - by_k - cx_k^2 y_k - dx_k y_k - ey_k^3\right)^2$$

Более подробно рассмотрим важный пример из микроэкономики. В одной из оптимизационных моделей поведения фирмы используется т.н. производственная функция $f(K,L)$, задающая объем выпуска в зависимости от затрат капитала K и труда L. В качестве конкретного вида производственной функции часто используется так называемая функция Кобба — Дугласа

$$f(K, L) = K^{\alpha}L^{\beta}.$$

Однако откуда взять значения параметров α и β? Естественно предположить, что они — одни и те же для всех предприятий отрасли. Поэтому целесообразно собрать информацию в виде трехмерных векторов $(f_k, K_k, L_k) = k = 1, 2, \ldots n$, где f_k — объем выпуска на k-м предприятии, K_k — объем затрат капитала на k-ом предприятии, L_k — объем затрат труда на k-м предприятии (в кратком изложении не пытаемся дать точных определений используемым понятиям из экономики предприятия). По собранной информации естественно попытаться оценить параметры α и β. Но они входят в зависимость нелинейно, поэтому сразу применить метод наименьших квадратов нельзя. Помогает логарифмирование:

$$\ln f(K, L) = \alpha \ln K + \beta \ln L.$$

Следовательно, целесообразно сделать *замену переменных*

$$x_k = \ln K_k,\ y_k = \ln L_k,\ z_k = \ln f_k,\ k,\ k = 1, 2, 3, \ldots n,$$

а затем находить оценки параметров α и β, минимизируя функцию

$$g(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ax_k - \beta y_k)^2$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} = \sum_{k=1}^{n} 2(z_k - ax_k - \beta y_k)(-x_k),$$

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial\alpha} = \sum_{k=1}^{n} 2\left(z_k - \alpha x_k - \beta y_k\right)(-y_k)\,,$$

Приравняем частные производные к 0, сократим на 2, раскроем скобки, перенесем свободные члены вправо. Получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\alpha\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \beta\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$\alpha\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \beta\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k z_k$$

Таким образом, для вычисления оценок метода наименьших квадратов необходимо найти пять сумм

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2,\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,\ \sum_{k=1}^{n} y_k^2,\ \sum_{k=1}^{n} x_k z_k,\ \sum_{k=1}^{n} y_k z_k$$

Для упорядочения расчета этих сумм может быть использована таблица типа той табл.3.1, что применялась выше. Отметим, что рассмотренная в предыдущем подразделе постановка переходит в разбираемую сейчас при $y_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Решая систему линейных уравнений, получаем оценки метода наименьших квадратов α^* и β^*.

Что может дать сравнение исходных f_k с восстановленными

$$\tilde{f}_k = f^*(K_k, L_k) = K_k^{\alpha^*} L_k^{\beta^*}\ ?$$

Если $f_k > \tilde{f}_k$, то это означает, что предприятие работает лучше, чем в среднем по отрасли (из-за различной исходной фондовооруженности нельзя сравнивать предприятия непосредственно, необходимо сначала восстановить зависимость выпуска от факторов производства с помощью модели Кобба — Дугласа). Это — заслуга руководства предприятия. Следовательно, вышестоящие структуры имеют основания продвигать и награждать топ-менеджеров этого предприятия.

Деловые партнеры имеют основания для налаживания долговременных отношений. Банки имеют основания давать льготные кредиты.

Если $f_k < \tilde{f}_k$, то ситуация прямо противоположная. Предприятие работает хуже, чем в среднем по отрасли, т.е. хуже, чем можно было бы ожидать при имеющихся у него ресурсах. Это — вина руководства предприятия. Следовательно, вышестоящим структурам целесообразно наказать директора и его заместителей, например, «укрепить руководство предприятия», заменив часть или всех топ-менеджеров. Деловым партнерам надо учесть, что выполнение договорных отношений находится под угрозой срыва. Из-за повышенного риска банки повысят процент платы за кредит, ужесточат требования к обеспечению возврата кредитов, в частности, беря имущество предприятия в залог.

Случай $f_k = \tilde{f}_k$ — промежуточный между двумя описанными. Предприятие работает на уровне, среднем для отрасли. Нет оснований ни хвалить его руководство, ни применять санкции.

Как можно использовать восстановленную зависимость? Например, проектируем новое предприятие. Определяем для него величины факторов производства K_0 и L_0. Тогда можем рассчитывать на выпуск продукции в объеме $f^*(K_0, L_0)$.

Пример практического использования линейного регрессионного анализа. Руководитель маркетинговой службы завода ГАРО (г. Великий Новгород) А.А. Пивень применил его для построения математической модели рынка легковых подъемников. Требуется выявить факторы (показатели), оказывающие наибольшее влияние на объем продаж подъемников, найти зависимость объема продаж от этих факторов и использовать эту зависимость для прогнозирования объема продаж.

Зависимая переменная — объем продаж V, независимые переменные:

— грузоподъемность (X1),

— цена (X2)

— наличие напольной рамы (X3),
— наличие синхронизации (X4),
— количество двигателей (X5),
— суммарная мощность двигателей (X6),
— высота подхвата в нижнем положении (X7),
— максимальная высота подъема (X8),
— скорость подъема (X9),
— гарантийный срок (X10),
— срок службы (X11),
— время на рынке (X12),
— внешний вид (X13),
— срок поставки (X14),
— уровень сервисного обслуживания (X15),
— наличие системы смазки (X16),
— масса (X17).

Для восстановления зависимости использовалась линейная регрессионная модель. По результатам пошагового анализа из рассмотрения последовательно исключались независимые переменные (параметры подъемника), имеющие (в линейной модели) коэффициенты, незначимо отличающиеся от нуля, иными словами, мало отличающиеся от 0 в сравнении с их дисперсией. Для этого использовался пакет STATISTICA 6.0, конкретно модуль «Множественная регрессия» (*Multiple regression*).

В результате расчетов получена зависимость объема продаж подъемника П3-Т от 12 факторов:

$$V = -1769.77 - 65.09\ X1 - 0.03\ X2 + 68.79\ X3 + 147.54\ X4$$
$$+ 156.28\ X5 + 2.53\ X7 + 1.06\ X8 + 25.75\ X12$$
$$-132.26\ X13 - 12.41\ X14 + 107.78\ X15 + 397\ X16\ .$$

Влияние остальных пяти факторов оказалось незначимым.

Исходя из расчетов, прогнозное значение продаж подъемников на второй год продаж составит ориентировочно 1010 шт. С вероятностью 95% можно утверждать, что объем продаж будет лежать в границах [695, 1332] шт.

3.3. Коэффициенты корреляции

Прежде чем восстанавливать зависимость, целесообразно убедиться, что переменные связаны между собой. Термин «корреляция» и означает «связь». В области статистических методов этот термин обычно используется в сочетании «коэффициенты корреляции». Рассмотрим линейный и непараметрические парные коэффициенты корреляции.

Обсудим способы измерения связи между двумя случайными переменными. Пусть исходными данными является набор случайных векторов $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, \dots n$. Выборочным коэффициентом корреляции, более подробно, выборочным линейным парным коэффициентом корреляции К. Пирсона, как известно, называется число

$$r_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}.$$

Если $r_n = 1$, то $y_i = ax_i + b$, причем $a > 0$. Если же $r_n = -1$, то $y_i = ax_i + b$ причем $a < 0$. Таким образом, близость коэффициента корреляции к 1 (по абсолютной величине) говорит о достаточно тесной линейной связи.

Если случайные вектора $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, \dots n$, независимы и одинаково распределены, то выборочный коэффициент корреляции сходится к теоретическому при безграничном возрастании объема выборки:

$$r_n \to \rho = \frac{M(x_1 - M(x_1))(y_1 - M(y_1))}{\sqrt{D(x_1)}\sqrt{D(y_1)}}$$

(сходимость по вероятности).

Более того, выборочный коэффициент корреляции является асимптотически нормальным. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{r_n - \rho}{\sqrt{D_0(r_n)}} < x\right) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, а $D_0(r_n)$ — асимптотическая дисперсия выборочного коэффициента корреляции. Она имеет довольно сложное выражение, приведенное в монографии [5, с.393]:

$$D_0(r_n) = \frac{\rho^2}{4n}\left(\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2} + \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2} + \frac{2\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}} + \frac{4\mu_{22}}{\mu_{11}^2} - \frac{4\mu_{31}}{\mu_{11}\mu_{20}} - \frac{4\mu_{13}}{\mu_{11}\mu_{02}}\right).$$

Здесь под μ_{km} понимаются теоретические центральные моменты порядка k и m, а именно,

$$\mu_{km} = M(x_1 - M(x_1))^k (y_1 - M(y_1))^m .$$

Коэффициенты корреляции типа r_n используются во многих алгоритмах многомерного статистического анализа. В теоретических рассмотрениях часто считают, что случайные вектора $(x_i, y_i) = (x_i(\omega), y_i(\omega))$, $i = 1, 2, \dots n$, имеют двумерное нормальное распределение. Распределения реальных данных, как правило, отличны от нормальных (см. [17, 18]). Почему же распространено представление о двумерном нормальном распределении? Дело в том, что теория в этом случае проще. В частности, равенство 0 теоретического коэффициента корреляции эквивалентно независимости случайных величин. Поэтому проверка независимости сводится к проверке статистической гипотезы о равенстве 0 теоретического коэффициента корреляции. Эта гипотеза принимается, если $|r_n| < C(n, \alpha)$, где $C(n, \alpha)$ — некоторое граничное значение, зависящее от объема выборки n и уровня значимости α.

Если предположение о двумерной нормальности не выполнено, то из равенства 0 теоретического коэффициента корреляции не вытекает независимость случайных величин. Нетрудно построить пример случайного вектора, для которого коэффициент корреляции равен 0, но координаты зависимы. Кроме того, для проверки гипотез о коэффициенте корреляции нельзя пользоваться таблицами, рассчитанными в предположении нормальности. Можно построить правила принятия решений на основе асимптотической нормальности выборочного коэффициента корреляции. Но есть и другой путь — перейти к непараметрическим коэффициентам корреляции, одинаково пригодным при любом непрерывном распределении случайного вектора.

Для расчета непараметрического *коэффициента ранговой корреляции Спирмена* необходимо сделать следующее. Для каждого x_i рассчитать его ранг r_i в вариационном ряду, построенном по выборке x_1, x_3, x_3. Для каждого y_i рассчитать его ранг q_i в вариационном ряду, построенном по выборке y_1, y_3, y_3. Для набора из n пар $(r_i, q_i) = 1, 2, \ldots, n$, вычислить линейный коэффициент корреляции. Он называется коэффициентом ранговой корреляции, поскольку определяется через ранги. В качестве примера рассмотрим данные из табл. 3.2 (см. [6]).

Таблица 3.2

Данные для расчета коэффициентов корреляции

i	1	2	3	4	5
x_i	5	10	15	20	25
y_i	6	7	30	81	300
r_i	1	2	3	4	5
q_i	1	2	3	4	5

Для данных табл.3.2 коэффициент линейной корреляции равен 0,83, непосредственной линейной связи нет. А вот коэффициент ранговой корреляции равен 1, поскольку увеличение одной переменной однозначно соответствует увеличению другой переменной. Во многих экономических задачах, например, при выборе инвестиционных проектов, достаточно именно монотонной зависимости одной переменной от другой.

Поскольку суммы рангов и их квадратов нетрудно подсчитать, то *коэффициент ранговой корреляции Спирмена* равен

$$\rho_n = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(r_i - q_i)^2}{n^3 - n}.$$

Отметим, что *коэффициент ранговой корреляции Спирмена* остается постоянным при любом строго возрастающем преобразовании шкалы измерения результатов наблюдений. Другими словами, он является адекватным в порядковой шкале (см. главу 6), как и другие ранговые статистики, например, статистики Вилкоксона, Смирнова, типа омега-квадрат для проверки однородности независимых выборок (глава 2).

Широко используется также коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла, коэффициент ранговой конкордации Кендалла и Б. Смита (речь идет о сумме попарных коэффициентов ранговой корреляции Кендалла в случае более чем двух переменных) и др. Наиболее подробное обсуждение этой тематики содержится в монографии [3], необходимые для практических расчетов таблицы имеются в справочнике [2]. Дискуссия о наиболее адекватном выборе вида коэффициентов корреляции продолжается и в настоящее время [6].

3.4. Прогнозирование в отрасли лома черных металлов*

Среди статистических метолов прогнозирования [19] основной — метод наименьших квадратов. Продемонстрируем его практическую пользу на примере исследования [7], посвященного решению задач прогнозирования цены лома черных металлов — сырья для Магнитогорского металлургического конбината.

Как показано в [7], в настоящее время для мировой и российской металлургии одна из наиболее актуальных проблем — повышение эффективности использования ресурсов лома черных металлов. Каждая промышленно развитая страна стремится максимально увеличить долю использования металлолома в сталеплавильном производстве, решая таким образом не только вопросы экологии, но и проблему дефицита рудного сырья, коксующихся углей, которые постоянно дорожают.

В России производство стали ежегодно возрастает. За последние период 2001–2006 гг. суммарный прирост выплавки

---

* Раздел 3.3 составлен по материалам статьи [7] ведущего менеджера отдела маркетинга ЗАО «Профит» Е.М. Крюковой, подготовленной в 2007 г.

согласно [25] составил свыше 28% (рис.3.1). По мере увеличения выплавки стали возрастает масса необходимой для ее производства металлической шихты. Одним из главных составляющих шихты выступает металлолом. Его потребление определяется структурой сталеплавильного производства, развитием новых технологий выплавки, разливки и прокатки стали.

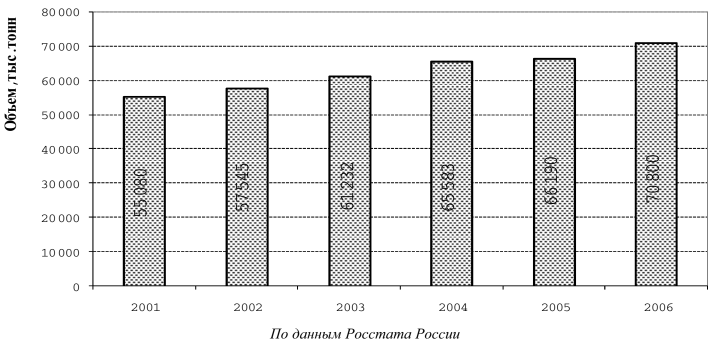

Рис. 3.1. Выплавка стали в России

На смену мартеновскому производству стали в мировой металлургии пришли кислородно-конвертерный и электросталеплавильный процессы. Если первый имеет ограничение по применению металлолома, то второй базируется преимущественно на потреблении стального лома [9].

Современные конвертерный и электросталеплавильный процессы ориентированы на 100% непрерывную разливку стали, что существенно сокращает образование оборотного лома в процессе производства. В настоящее время потребность черной металлургии в ресурсах лома практически в 2 раза превышает объем внутризаводского оборота металлолома [9]. Все это ведет к значительному росту потребности металлургической промышленности в ломе черных металлов, поставляемом специализированными ломоперерабатывающими предприятиями, усилению конкуренции за лом на российском рынке.

Увеличение спроса, естественно, сопровождается ростом цен на лом черных металлов. За период 2002– 2006 гг. средневзвешенные цены на металлолом на российском рынке увеличились более чем в 2 раза (табл.3.3). Это увеличивает привлекательность ломоперерабатывающего бизнеса.

Таблица 3.3

Изменение среднегодовой цены на внутреннем рынке в 2002–2006 гг.

Период	Среднегодовая цена, руб./т с НДС и ЖДТ*	Изм., руб./т	Изм., %	Индекс инфляции, ед.**	Среднегодовая цена, руб./т с НДС и ЖДТ (сопоставимые цены на 2002 год — без учета влияния инфляции)	Изм., %
2002	1 812				1 812	
2003	3 039	1 226	167,7%	1,12	2 713	149,7%
2004	4 169	1 130	137,2%	1,117	3 332	122,8%
2005	4 349	181	104,3%	1,109	3 135	94,1%
2006	5 559	1 210	127,8%	1,09	3 676	117,3%

* *Средневзвешенная цена на лом черных металлов (по крупнейшим металлургическим комбинатам России), НДС — налог на добавленную стоимость, ЖДТ — железнодорожный тариф.*

** *По данным Росстата РФ*

Структуру рынка лома можно представить в виде взаимосвязи трех важнейших участников рынка: ломосдатчиков, ломопереработчиков и потребителей лома (рис.3.2). Ломосдатчики — это юридические лица и физические лица, которые либо списывают машины, оборудование, либо находят их «на земле», проводят демонтаж и отгружают ломопереработчикам. Ломопереработчики в свою очередь подразделяются на предприятия, имеющие собственные ломозаготовительные площадки и осуществляющие на них сбор и переработку лома, и на транзитные организации, которые не имеют собственных площадок, а просто осуществляют транспортировку и реализацию металлолома. Замыкают эту цепочку потребители лома — металлургические комбинаты и заводы, которые осуществляют приемку, складирование лома в копровых цехах и подготовку для сталеплавильного процесса.

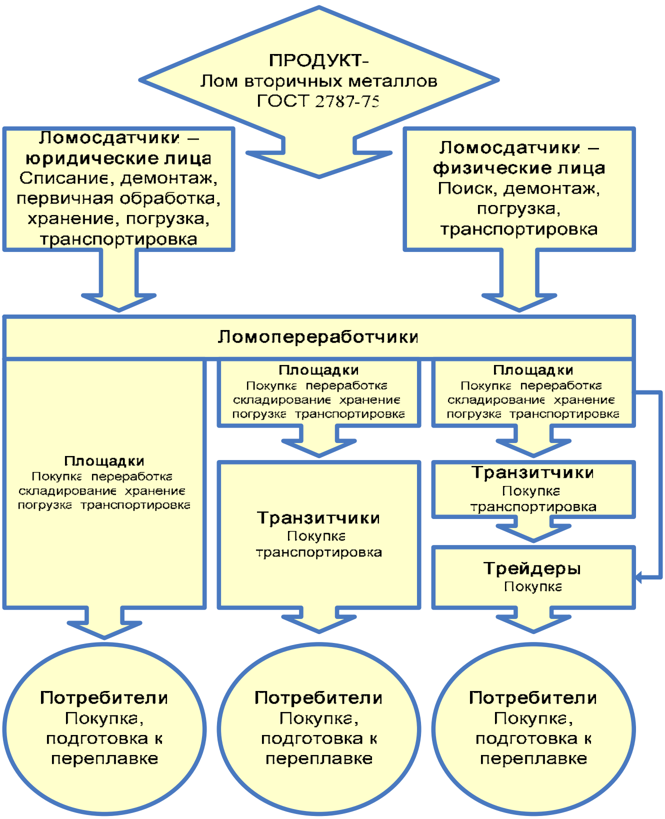

Рис. 3.2. Структура участников рынка, каналы сбыта

Система ценообразования на рынке лома выглядит следующим образом. Потребители лома устанавливают цены на материал, исходя из потребности производства и наличия остатков на складах. В свою очередь ломоперерабатывающие предприятия устанавливают цены «на земле», то есть цены закупа лома у ломосдаткиков. Задача ломопереработчика — устанавливать в разные периоды такие цены, которые обеспечат им максимальную рентабельность. Таким образом, эффективность деятельности ломопереработчика зависит от оценки рыночной конъюнктуры, характеристики влияния рыночных факторов и прогноза дальнейшей динамики закупочных цен сталепроизводителей на лом черных металлов.

Динамика цен на лом черных металлов имеет свои особенности.

Во-первых, это изменение носит сезонный характер. Рост цен ежегодно начинается в марте-апреле, это связано с «подъеданием» зимних запасов на складах металлургических предприятий и ростом потребности сталепроизводителей в привозном металлоломе. К маю связи с окончанием зимних условий, увеличивается ломозаготовка и подход лома на склады, что ведет к снижению закупочных цен на лом. В конце лета вновь начинается рост: потребность предприятий в ломе возрастает в связи с началом накопления зимних запасов материала на складах. После достижения максимума цен в сентябре-октябре, следует понижение. Данная тенденция с небольшими сдвигами повторяется из года в год.

Во-вторых, последние годы очевидна тенденция сглаживания цен в течение года, цена изменяется равномерно без резких скачков и «провалов» (рис. 3.3).

Наконец, цена на лом зависит от множества факторов:

— *Потребность металлургического предприятий в ломе черных металлов (месячные планы поставки) и остатки лома на складах копровых цехов комбинатов*. Чем выше потребность сталепроизводителя в ломе на текущий месяц, тем большую цену он готов заплатить за сырье. С помощью цен потребители регулируют потоки материала в сторону комбината: невыполнение запланированных показателей ведет к увеличению закупочных цен на металлолом; перевыполнение, напротив, как правило, приводит к понижению цен. Последнее связано, в первую очередь, с ограниченными производственными мощностями копровых цехов комбинатов (перегрузочная техника, железнодорожные тупики), которые не могут обеспечить

Рис . 3 3а .Динамика средних цен на лом марки 3А

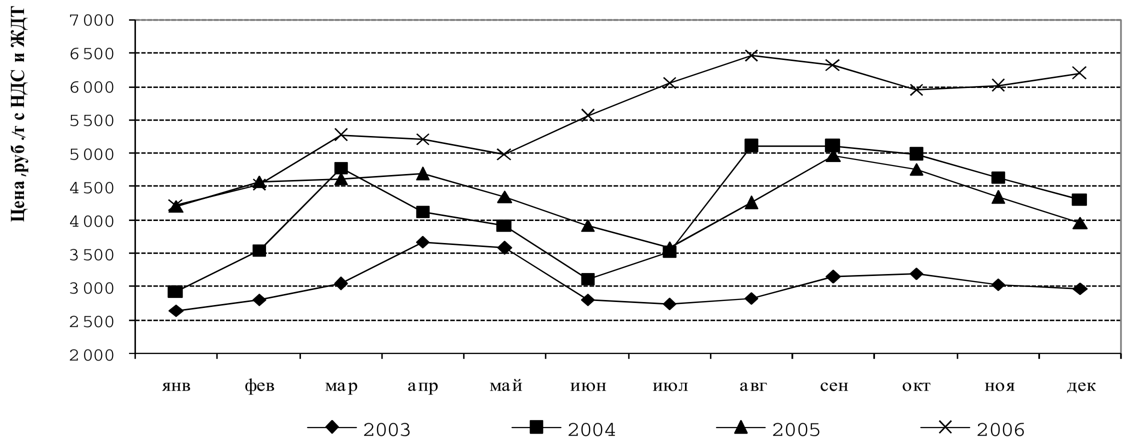

Рис. 3.3. Динамика средних цена на лом марки 3А

Рис. 3.4. Динамика цен на арматуру и металлолом

своевременную выгрузку и складирование всего поступающего объема металлолома.

— *Суммарный объем потребления внутреннего рынка*. Как уже было сказано выше, потребление лома черных металлов носит сезонный характер: потребность сталепроизводителей существенно возрастает в периоды формирования остатков лома на складах. Это ведет к росту конкуренции за сырье на рынке и, как следствие, к росту среднерыночных цен.

— *Объемы поставки российского лома на экспорт и цены на мировых рынках*. Значительные объемы металлолома попрежнему отвлекаются на экспорт. Крупнейшим импортером российского металлолома является Турция. Поэтому когда турецкие заводы дают высокие цены на металлолом, возрастают закупочные цены экспортеров в российских портах, что неизбежно ведет к ответному росту цен производителями внутреннего рынка.

— *Цены на готовую продукцию металлургических комбинатов*. Важнейшим фактором изменения цен на сырье являются цены на готовую продукцию. Так как значительные объемы металлопродукции российских сталезаводов направляются на экспорт, в качестве индикаторов в [7] выбраны цены на арматуру в портах Черного и Балтийского море. Как видно из рис.3.4, динамика цен на лом черных металлов в течение года повторяет динамику цен на арматуру.

От оценки рыночной конъюнктуры, характеристики влияния рыночных факторов и прогноза дальнейшей динамики цен на лом черных металлов, зависит эффективность деятельности ломопереработчика.

Рассмотрим эконометрическую модель прогноза закупочных цен на лом на примере ОАО «Магнитогорский металлургический комбинат». Адекватность модели во многом зависит от выбора факторов, их точности и достоверности. В [7] отобраны следующие факторы для построения модели:

— Поставка на внутренний рынок, тыс. тонн (X1).

— Поставка на экспорт, тыс. тонн (X2).

— Цены на лом, Турция, cif, руб./т [21] (X3).

— Поставка на ОАО «ММК», тыс. тонн (X4).

— Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. тонн (X5).

— Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т [21] (Х6).

Исходя из понимания того, что реальные данные всегда имеют распределение, отличное от нормального, для восстановления зависимости целесообразно применять непараметрический подход, включая доверительное оценивание параметров вероятностной модели и прогностической функции [17].

Предполагается, что переменные связаны линейной регрессионной зависимостью вида:

$$Y=a+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+....+b_nx_n,$$

где Y — зависимая переменная (цена на лом марки 3А), x_i — независимые переменные (факторы), b_i — регрессионные коэффициенты.

Исходные данные за период 2003–2005 гг. приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Исходные данные для построения модели расчета цен ОАО «ММК» на лом марки 3А

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т**	Поставка на экспорт, тыс. т**	Цены на лом, Турция, cif, руб./т**	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т*	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т*	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т**	Закупочные цены ОАО «ММК» на лом, руб./т*
	Х1	Х2	Х3	Х4	Х5	Х6	Y
янв.03	662	256	4 464	65 810	77 849	6 745	**2 750**
фев.03	715	212	5 092	85 046	67 695	7 830	**2 950**
мар.03	842	416	5 033	104 212	33 533	8 178	**3 050**
апр.03	1 209	482	4 760	166 203	34 091	7 865	**3 800**
май.03	1 492	542	4 267	247 723	109 589	7 637	**3 800**
июн.03	1 298	628	3 860	247 555	217 976	7 468	**3 150**

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т**	Поставка на экспорт, тыс. т**	Цены на лом, Турция, cif, руб./т**	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т*	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т*	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т**	Закупочные цены ОАО «ММК» на лом, руб./т*
июл.03	1 057	667	4 250	168 568	264 461	7 742	**2 900**
авг.03	1 126	725	4 460	125 541	281 170	7 798	**2 825**
сен.03	1 144	702	4 884	116 449	282 234	7 863	**2 950**
окт.03	1 244	802	4 826	119 978	282 971	7 903	**3 100**
ноя.03	1 123	717	4 923	123 509	296 580	8 347	**3 100**
дек.03	1 034	924	5 521	86 707	282 933	8 481	**2 950**
янв.04	719	869	6 547	40 027	224 376	9 234	**2 761**
фев.04	789	847	7 520	27 144	143 178	11 348	**2 824**
мар.04	1 210	969	7 562	207 303	97 722	12 413	**4 602**
апр.04	1 199	1 141	6 454	78 375	112 797	12 335	**4 602**
май.04	1 554	1 256	4 584	137 042	197 946	10 987	**4 050**
июн.04	1 179	1 231	5 135	216 765	244 032	10 189	**3 298**
июл.04	1 230	1 189	6 732	188 504	232 936	11 196	**3 540**
авг.04	1 447	1 340	6 975	120 708	222 165	13 146	**5 201**
сен.04	1 359	1 400	7 086	134 830	319 025	13 150	**5 201**
окт.04	1 649	1 318	7 795	261 497	374 111	13 030	**5 268**

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т**	Поставка на экспорт, тыс. т**	Цены на лом, Турция, cif, руб./т**	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т*	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т*	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т**	Закупочные цены ОАО «ММК» на лом, руб./т*
ноя.04	1 423	1 394	7 579	191 016	398 175	12 584	**5 141**
дек.04	1 247	1 405	6 557	152 518	409 001	11 106	**4 543**
янв.05	733	926	7 142	58 251	319 696	11 148	**4 307**
фев.05	957	816	6 771	56 763	219 397	11 338	**4 661**
мар.05	1 132	1 032	7 328	75 006	149 786	11 133	**4 661**
апр.05	1 542	1 429	6 578	123 000	100 000	11 014	**4 779**
май.05	1 740	1 437	5 501	294 793	242 233	9 891	**4 661**
июн.05	1 599	1 252	4 952	295 934	397 205	9 148	**4 130**
июл.05	1 307	968	6 026	161 804	353 555	9 642	**4 071**
авг.05	1 427	1 189	6 834	137 785	357 436	9 710	**4 660**
сен.05	1 942	1 466	7 095	207 267	404 595	10 217	**4 660**
окт.05	2 005	1 214	6 055	272 533	529 378	10 539	**5 723**
ноя.05	1 532	980	6 126	155 956	513 734	10 470	**5 133**
дек.05	1 301	1 210	5 905	141 797	496 039	10 341	**4 130**

** Фактические данные ОАО «ММК».*

*** По данным аналитического агентства «Металл-Курьер»*

С помощью модуля «Множественная регрессия» пакета STATISTICA определены регрессионные коэффициенты (табл. 3.5) [1, 24] и коээфициенты линейной корреляции Пирсона (табл.3.5, 3.6).

Наиболее сильные связи можно отметить между ценами на лом и такими факторами, как цены на арматуру в портах, цены на импортируемый лом в Турции и объемы поставки на внутренний рынок России и на экспорт.

Таблица 3.5

Характеристика связи цены и факторов

Независимые переменные		Регрессионные коэффициенты	Коэффициенты корреляции
X1	Поставка на внутренний рынок, тыс. т	2,009	0,772
X2	Поставка на экспорт, тыс. т	–1,076	0,806
X3	Цены на лом, Турция, cif, руб./т	0,136	0,768
X4	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т	–0,925	0,644
X5	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т	0,708	0,393
X6	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т	0,326	0,837

* *Для осуществления расчетов применяем пакет STATISTICA, а именно модуль «Множественная регрессия» (Multiple Regression).*

При этом необходимо отметить существенную взаимозависимость между такими факторами, как поставка на внутренний рынок и поставка на ОАО «ММК» (табл. 3.6). Это связано с тем, что периоды роста объемов закупа лома и накопления зимних запасов по разным комбинатам (которые и задают совокупный рост внутреннего рынка) часто совпадают.

Таблица 3.6

Взаимозависимость факторов

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	-	–0,089	0,004	–0,452	–0,035	0,001
X2	–0,089	-	0,001	0,056	–0,102	–0,021
X3	0,004	0,001	-	0,038	–0,016	–0,008
X4	–0,452	0,056	0,038	-	–0,028	–0,005
X5	–0,035	–0,102	–0,016	–0,028	-	0,018
X6	0,001	–0,021	–0,008	–0,005	0,018	-

Результаты прогнозирования приведены в табл. 3.7 Коэффициент детерминации для модели составляет $R^2 = 0{,}91$. (Коэффициент детерминации — это квадрат коэффициента линейной корреляции между зависимой переменной и прогностической функцией.) Это означает, что отобранные факторы на 91% объясняют дисперсию зависимой переменной — цены на лом черных металлов.

На рис. 3.5 видно, что математическая модель достаточно точно показывает динамику цен в течение года, есть основания использовать ее для долгосрочного прогнозирования. Прогнозирование на краткосрочные периоды требует ежемесячного пересчета для уточнения модели.

Наиболее высокие ошибки прогноз показывает в январе-феврале (27%), августе (12%) и октябре (17%). Средняя абсолютная ошибка прогноза составляет 466 руб./т, средняя относительная ошибка — 8,4%, среднеквадратическая ошибка прогноза — 593 руб./т.

Ошибки (т.е. отклонения факта от прогноза) объясняются воздействием неучтенных в модели факторов. В частности, отклонение в январе-феврале связано с суровыми зимними условиями в 2006 году, которые привели к осложнению и практическому прекращению ломосбора на территории России. В результате первые месяцы года сталепроизводители работали в основном за счет накопленных накануне остатков на складах, поступление лома было минимальным, что привело к существенному росту цен.

Таблица 3.7

Прогноз закупочных цен ОАО «ММК» на лом черных металлов

Период	Поставка на внутренний рынок, тыс. т	Поставка на экспорт, тыс. т	Цены на лом, Турция, cif, руб./т	Поставка на ОАО «ММК», тыс. т	Остаток лома на ОАО «ММК», тыс. т	Цены на арматуру, fob, порты Черного моря и Балтики, руб./т	Прогноз цен ОАО «ММК» на лом, руб./т	Закупочные цены ОАО «ММК» на лом, руб./т	Отклонения	
	Коэффициенты регрессии									
	X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**Y**			
	2,01	**–1,08**	**0,14**	**–0,93**	**0,71**	**0,33**	**–1570,3**		**руб./т**	**%**
янв.06	532	576	5 937	51	354	10 037	3 164	**4 336**	**1 172**	**27,03%**
фев.06	875	364	6 569	53	256	10 178	4 142	**4 773**	**631**	**13,21%**
мар.06	1 346	573	6 829	91	174	11 150	5 122	**5 430**	**308**	**5,68%**
апр.06	1 652	925	7 308	204	180	11 583	5 464	**5 430**	**–34**	**–0,63%**
май.06	1 776	1 199	7 036	300	292	11 583	5 371	**5 133**	**–238**	**–4,64%**
июн.06	1 816	1 298	7 717	295	345	12 277	5 707	**5 800**	**93**	**1,60%**
июл.06	1 980	1 301	7 536	371	470	12 650	6 150	**6 372**	**222**	**3,49%**
авг. 06	2 128	1 588	6 771	410	609	12 177	5 942	**6 726**	**784**	**11,65%**
сен. 06	2 171	974	7 248	393	714	12 864	7 066	**6 608**	**–458**	**–6,93%**
окт.06	2 037	757	7 334	443	827	13 700	7 350	**6 281**	**–1 069**	**–17,01%**
ноя.06	1 815	901	7 386	390	881	13 575	6 804	**6 281**	**–523**	**–8,32%**
дек.06	1 692	1 008	7 525	275	814	13 013	6 336	**6 281**	**–55**	**–0,87%**

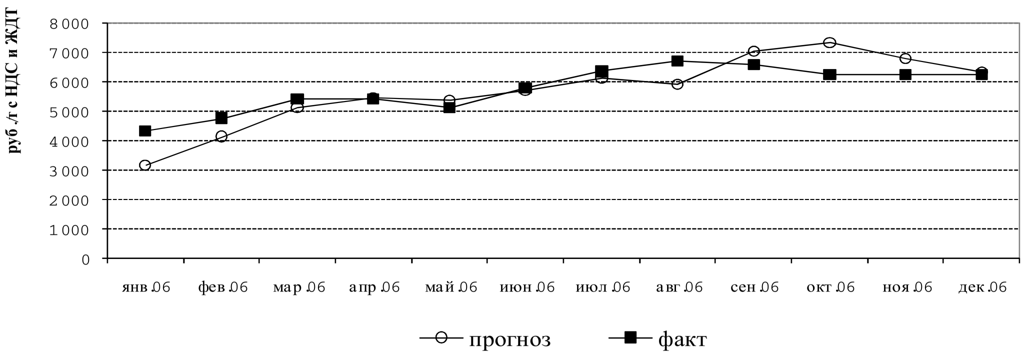

Рис. 3.5. Сопоставлнеи прогнозных и фактических закупочных цен ОАО «ММК» на лом черных металлов в 2006 году

По аналогии с прошлыми годами в июле-августе 2006 года прогноз показывает снижение цен на рынке, а в сентябре — октябре, наоборот, рост. Однако летом 2006 комбинаты повели себя иначе. Низкий уровень ломосбора на территории страны в первой половине года (в связи с затяжной зимой) и недостаточные объемы поступления металлолома потребителям явились причиной того, что к концу первого полугодия на складах комбинатов оставалось не более 30–40% необходимого уровня складских запасов. В результате уже в июле потребители приступили к формированию зимних запасов на складах, что повлекло за собой рост цен. Ценовой максимум в 2006 году был достигнут не в октябре, как в предыдущие годы, а в августе, и в сентябре уже началось постепенно снижение уровня цен.

Еще одним фактором такой динамики послужил существенный рост потребления на рынке в связи с вводом новых производственных мощностей. В частности, ОАО «ММК» в 2006 году запустило две электросталеплавильные печи, в результате потребность в привозном металлоломе выросла с 1,9 млн тонн в 2005 году до 3,2 млн тонн в 2006 году, прирост составил 65,4%. Рост потребности ведет к обострению конкуренции на рынке, и так как цена является основным рычагом привлечения лома, комбинаты начинают вести активную ценовую политику, стараясь регулировать потоки лома.

Кроме того, на рыночную конъюнктуру оказывают влияние политические факторы, реализация различных государственных программ — лицензирование поставщиков металлолома, изменение экспортных пошлин, изменение правил налогообложения ломозаготовительных организаций (например, введение льготного режима по налогу на добавленную стоимость для ломоперерабатывающих организаций). Также значительное влияние на цены оказывает внутренняя политика организации — волевые решения менеджеров, наличие оборотных средств для осуществления расчетов с поставщиками и формирования запасов на складах.

Таким образом, одной из основных сложностей в получении точных прогнозов экономических показателей являются неожиданные и важные сдвиги в ключевых экономических факторах, а также влияние социально-экономических факторов, которые невозможно учесть с помощью математики. Очевидно, что для корректировки математического прогноза, для принятия обоснованных решений в области ценообразования важно также опираться на опыт, знания и интуицию специалистов [17]. Для этих целей используются методы экспертных оценок (см. главу 5 ниже). В состав экспертной комиссии целесообразно включить, во-первых, высококвалифицированных опытных специалистов, непосредственно участвующих в процессе ценообразования и занимающихся реализацией лома черных металлом (руководителей отделов сбыта, маркетинга и сотрудников данных отделов), а также независимых аналитиков, оказывающих информационные и консультационные услуги на рынке (представителей аналитических агентств). Сбор экспертной информации для целей прогнозирования цен на лом предлагается проводят ежемесячно. Прогнозные оценки экспертов могут быть получены на 1 месяц вперед и на длительный период — до 1 года. Полученная от экспертов информация позволяет скорректировать прогноз, полученный с помощью метода натменьших квадратов, и выработать «грамотную» ценовую стратегию и стратегию поведения на рынке (подходящих моментов для закупа и реализации металлолома).

Таким образом, в ходе анализа реальных данных установлено, что эконометрическая регрессионная модель достаточно точно описывает динамику цен на рынке лома в течение года, поэтому есть основания использовать ее для долгосрочного прогнозирования. С другой стороны, можно отметить существенные отклонения в отдельные периоды, что связано, в первую очередь, с действием неучтенных в модели факторов. Учесть их влияние и скорректировать результаты, полученные с помощью метода наименьших квадратов, возможно с помощью метода экспертных оценок. Применение статистических и экспертных методов в совокупности для целей прогнозирования цен на лом черных металлов позволяет ломоперерабатывающему предприятию своевременно реагировать на изменения рыночных факторов и строить с учетом этого свою ценовую политику.

3.5. О выборе вида регрессионной модели

Одни и те же данные можно обрабатывать различными способами. Например, как уже отмечалось, функцию спроса можно приближать линейной зависимостью или степенной. Можно пробовать применить квадратическую зависимость, или многочлен третьего порядка, и т.д. Какую же организационно-экономическую модель использовать? Очевидно, ту, которая лучше других соответствует реальным данным. Но что значит «лучше соответствует»? Как измерять качество модели?

Основной показатель качества регрессионной модели. На первый взгляд, показателем отклонений данных от модели может служить остаточная сумма квадратов SS. Чем этот показатель меньше, тем приближение лучше, значит, и модель лучше описывает реальные данные. Однако это рассуждение годится только для моделей с одинаковым числом параметров. Ведь если добавляется новый параметр, по которому можно минимизировать, то и минимум, как правило, оказывается меньше.

В качестве основного показателя качества регрессионной модели используют оценку остаточной дисперсии (т.е. дисперсии погрешностей e_k), скорректированную на число m параметров, оцениваемых по наблюдаемым данным:

$$\partial^2(m) = \frac{SS}{n-m}$$

где, как и раньше, n — объем данных (число векторов, по которым восстанавливается зависимость). В случае задачи восстановления линейной функции одной переменной, рассмотренной в начале главы, оценка остаточной дисперсии имеет вид

$$\partial^2 = \frac{SS}{n-2}$$

поскольку число оцениваемых параметров m=2.

Почему эта формула отличается от приведенной в разделе 3.1? Там в знаменателе n, а здесь — (n–2). Дело в том, что там была рассмотрена непараметрическая теория при большом объеме данных (при $n \to \infty$). А при безграничном возрастании n разница между n и (n–2) сходит на нет; точнее, отношение этих величин стремится к 1).

Однако *при подборе вида модели* знаменатель дроби, оценивающей остаточную дисперсию, приходится корректировать на число параметров. Если этого не делать, то придется заключить, что всегда многочлен второй степени лучше соответствует данным, чем линейная функция, многочлен третьей степени лучше приближает исходные данные, чем многочлен второй степени, и т.д. В конце концов доходим до многочлена степени (n–1) с n коэффициентами, который проходит через все заданные точки (существование такого многочлена доказывают в курсе высшей алгебры). Но его прогностические возможности, скорее всего, существенно меньше, чем у линейной функции. *Излишнее усложнение статистических моделей вредно*.

Типовое поведение скорректированной оценки остаточной дисперсии

$$\nu(m) = \hat{\sigma}^2(m)$$

в зависимости от параметра m в случае расширяющейся системы моделей выглядит так. Сначала наблюдаем заметное убывание. Затем оценка остаточной дисперсии колеблется около некоторой константы (теоретического значения дисперсии погрешности).

Поясним ситуацию на примере модели восстановления зависимости, выраженной многочленом:

$$x(t) = a_0 + a_2 t + a_2 t^2 + a_3 t^2 + \ldots + + a_m t^m.$$

Пусть эта модель справедлива при $m = m_0$ При $m < m_0$ в скорректированной оценке остаточной дисперсии учитываются не только погрешности измерений, но и соответствующие (старшие) члены многочлена (предполагаем, что коэффициенты при них отличны от 0). При $m \geqslant m_0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \nu(m) = \sigma^2$$

Следовательно, скорректированная оценка остаточной дисперсии будет колебаться около указанного предела. Поэтому в качестве оценки неизвестной статистику степени многочлена (полинома) можно использовать, например, первый локальный минимум скорректированной оценки остаточной дисперсии, т.е.

$$m^* = \min\{m : \nu(m-1) > \nu(m),\ \nu(m) \leqslant \nu(m+1)\}.$$

В работе [14] найдено предельное распределение этой оценки степени многочлена.

Теорема 3.2. *При справедливости некоторых внутриматематических условий регулярности*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(m^* < m_0\right) = 0,\quad \lim_{n\to\infty} P\left(m^* = m_0 + u\right) = \lambda\left(1-\lambda\right)^u,\quad u = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\lambda = \Phi\left(1\right) - \Phi\left(-1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx \approx 0{,}68268$$

Таким образом, предельное распределение оценки m^* степени многочлена (полинома) является геометрическим (одно из известных в теории вероятностей параметрических семейств распределений). Это означает, в частности, что оценка не является состоятельной. При этом вероятность получить меньшее значение, чем истинное, исчезающе мала. Далее имеем:

$$P(m^* = m_0) \to 0{,}68268,\ P(m^* = m_0 + 1) \to$$
$$\to 0{,}68268(1 - 0{,}68268) = 0{,}21663$$

$$P(m^* = m_0 + 2) \to 0{,}68268(1 - 0{,}68268)^2 = 0{,}068744,$$

$$P(m^* = m_0 + 3) \to 0{,}68268(1 - 0{,}68268)^3 = 0{,}021814\ldots$$

Разработаны и иные методы оценивания неизвестной степени многочлена, например, путем многократного применения процедуры проверки адекватности регрессионной зависимости с помощью статистики Фишера [14]. Предельное поведение оценок — таково же, как в приведенной выше теореме, только значение параметра λ иное. Разработаны также состоятельные оценки степени полинома [15].

Регрессия как условное математическое ожидание. Во всех рассмотренных выше постановках вид регрессионной зависимости задавался исследователем. Это линейная функция, или многочлен, или элемент иного параметрического семейства. Однако откуда уверенность, что семейство выбрано правильно? А если исследователь ошибся? Тогда к случайным ошибкам добавляется методическая. Например, данные приближаются линейной функцией, а на самом деле зависимость квадратическая. Тогда разность между этими функциями (тоже квадратическая функция) и есть методическая ошибка.

Избежать методической ошибки можно, не задавая априори вид регрессионной зависимости. Продемонстрируем это на примере оценивания условного математического ожидания.

Рассмотрим общее понятие регрессии как условного математического ожидания. Пусть случайный вектор $(x(\omega), y(\omega))$ (здесь ω — элементарный исход опыта) имеет плотность $p(x, y)$. Как известно из любого курса теории вероятностей, плотность условного распределения $y(\omega)$ при условии $x(\omega) = x_0$ имеет вид

$$p(y \mid x) = p(y \mid x(\omega) = x_0) = \frac{p(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dy}$$

Условное математическое ожидание, т.е. регрессионная зависимость y от x, имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y \mid x)\, dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y p(x, y)\, dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dy}$$

Таким образом, для нахождения оценок регрессионной зависимости достаточно найти оценки совместной плотности распределения вероятности $p_n(x, y)$ такие, что

$$p_n(x, y) \to p\ (x, y)$$

при $n \to \infty$. Тогда непараметрическая оценка регрессионной зависимости, построенная с помощью замены неизвестной исследователю плотности совместного распределения на непараметрическую состоятельную оценку этой плотности, т.е.

$$f_n(x) == \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y p_n(x, y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x, y) dy},$$

при $n \to \infty$ является состоятельной оценкой регрессии как условного математического ожидания:

$$f_x \to f\ (x).$$

Общий подход к построению непараметрических оценок плотности распределения вероятностей развит в главе 7 ниже.

Регрессионному анализу (т.е. методам восстановления зависимостей) посвящена огромная литература (по нашей оценке, не менее 100 тыс. книг и статей на различных языках). Он хорошо представлен в программных продуктах по анализу данных, особенно та его часть, которая связана с методом наименьших квадратов.

3.6. Непараметрическое оценивание точки пересечения регрессионных прямых

Рассмотрим несколько конкретных практически важных задач регрессионного анализа. Они нужны для решения организационно-экономических проблем прогнозирования на промышленном предприятии [12]. В настоящем разделе в рамках непараметрической вероятностно-статистической модели (т.е. без предположения о нормальности распределения погрешностей) получим асимптотическое распределение точки пересечения (встречи) двух регрессионных линейных зависимостей. Для этого на основе метода линеаризации выпишем выражения для асимптотической дисперсии точки встречи и границ доверительного интервала для неё [13].

Постановка задачи. Пусть зависимость от времени t некоторого показателя $x_1(t)$ технического уровня или качества продукции предприятия «Альфа» описывается линейной функцией

$$x_1(t) = a_1 t + d_1.$$

Пусть аналогичный показатель у его конкурента (ОАО «Бета») также описывается линейной функцией, но с другими коэффициентами:

$$x_2(t) = a_2 t + d_2.$$

Предположим, что предприятие «Альфа» находится в положении догоняющей стороны. Это значит, что в рассматриваемый момент времени t_0 (например, «сегодня») значение показателя у его продукции ниже: $x_1(t_0) < x_2(t_0)$, но темп роста у предприятия «Альфа» выше, чем у конкурента: $a_1 > a_2$.

Возникает естественный вопрос — когда предприятие «Альфа» догонит конкурента? Другими словами, в какой момент времени будет выполнено равенство $x_1(t) = x_2(t)$? Решая относительно t уравнение

$$a_1 t + d_1 = a_2 t + d_2,$$

получаем, что встреча произойдет в момент

$$t_B = \frac{d_2 - d_1}{a_1 - a_2}$$

Представляют интерес еще две величины. Во-первых, уровень качества, при котором предприятие «Альфа» сравняется с конкурентом, т. е. общий уровень качества в момент встречи:

$$x = x_1(t_B) = x_2(t_B) = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 - a_2}$$

Во вторых, временной лаг, т.е. величина отставания предприятия «Альфа» в рассматриваемый момент времени t_0. В какой (более ранний) момент времени t_k конкурент имел тот уровень качества, которого предприятие «Альфа» достигло сейчас? Для ответа на этот вопрос надо решить уравнение $x_2(t) = x_1(t_0)$. Решением является

$$t_k = \frac{x_1(t_0) - d_2}{a_2}.$$

Следовательно, предприятие «Альфа» отстает на

$$L = t_0 - t_k = \frac{(a_2 - a_1)t_0 + d_2 - d_1}{a_2} = \frac{x_2(t_0) - x_1(t_0)}{a_2}$$

единиц времени (лет).

В реальных ситуациях линейные зависимости неизвестны. Однако известны исходные данные $(t_{i1}; x_{i1})$, $i=1, 2, \ldots, n(1)$, для предприятие «Альфа» и $(t_{j2}; x_{j2})$, $j=1, 2, \ldots, n(2)$, для предприятия-конкурента. При этом значения показателя $x_1(t_{i1}) = x_{i1}$ у предприятие «Альфа» в моменты времени t_{i1} представляются в виде

$$x_1(t_{i1}) = x_{i1} = a_1 t_{i1} + d_1 + e_{i1},\ i = 1, 2, \ldots, n(1),$$

где коэффициенты a_1 и d_1 неизвестны статистику, а e_{i1} — погрешности измерения (невязки). Будем считать, что e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, — совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D(e_{i1}) = \sigma_1^2$ неизвестной статистику.

Для предприятия-конкурента справедливо аналогичное представление

$$x_2(t_{j2}) = x_{j2} = a_2 t_{j2} + d_2 + e_{j2},\ j = 1, 2, \ldots, n(2),$$

где коэффициенты a_2 и d_2 неизвестны статистику, а e_{j2} — погрешности измерения (невязки). Примем, что e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, — совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D(e_{i2}) = \sigma_2^2$ неизвестной статистику.

Примем, что две совокупности случайных величин e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, и e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, независимы между собой. В каждой совокупности случайные величины одинаково распределены, но функции распределения, соответствующие разным совокупностям (т.е. предприятию «Альфа» и предприятию-конкуренту), могут различаться между собой.

Подчеркнем, что в рассматриваемой вероятностно-статистической модели не предполагается, что эти функции распределения входят в какое-либо параметрическое семейство распределений (в частности, не предполагаем, что невязки имеют нормальное распределение). Это и значит, что рассматривается непараметрическая постановка. Однако считаем, что объемы данных $n(1)$ и $n(2)$ достаточно велики, так что можно применять Центральную предельную теорему и приближать совместное распределение оценок метода наименьших квадратов с помощью многомерного нормального распределения.

Итак, решение задачи о точке встречи получим в рамках непараметрической вероятностно-статистической модели. Весьма частный случай, когда невязки e_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, n(1)$, и e_{j2}, $j = 1, 2, \ldots, n(2)$, имеют нормальное распределение, рассмотрен в [26].

Метод решения. Рассмотрим метод решения задачи о встрече. Вместо неизвестных статистику зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будем использовать их оценки $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$, полученные методом наименьших квадратов. Для этого необходимо оценить коэффициенты по правилам, полученным в разделе 3.1, а затем рассчитать оценки момента встречи t_B^*, уровня качества в момент встречи $x^* = x_1^*\left(t_B^*\right) = x_2^*\left(t_B^*\right)$ и временного лага (величины отставания)

$$L^* = \frac{x_2^*(t_0) - x_1^*(t_0)}{a_2^*},$$

используя оценки коэффициентов зависимостей $x_1(t)$ и $x_2(t)$ вместо неизвестных истинных коэффициентов.

Полезным является, как и в разделе 3.1, использование центрирования средними значениями независимой переменной при параметризации зависимостей:

$$x_1(t) = a_1(t - t_{\text{ср}}(1)) + b_1 = a_1 t + d_1,$$

$$x_2(t) = a_2(t - t_{\text{ср}}(2)) + b_2 = a_2 t + d_2,$$

где

$$t_{\text{ср}}(1) = \frac{t_{11} + t_{21} + \ldots + t_{n(1)1}}{n(1)}, \quad t_{\text{ср}}(2) = \frac{t_{12} + t_{22} + \ldots + t_{n(2)2}}{n(2)} \quad (3.9)$$

Таким образом,

$$d_k = b_k = a_k\, t_{\text{ср}}(k),\ k = 1, 2$$

Дело в том, что что асимптотическое описание совместного распределения коэффициентов проще в случае центрированной зависимости, в частности, оценки коэффициентов $a_k^*, b_k^*, k = 1, 2$ асимптотически независимы.

Как известно (раздел 3.1), оценки метода наименьших квадратов имеют вид

$$a_k^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n(k)} x_{ik}\left(t_{ik} - t_{\text{ср}}(k)\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n(k)} \left(t_{ik} - t_{\text{ср}}(k)\right)^2}, \quad (3.10)$$

$$b_k^* = x_{cp}(k) = \frac{x_{1k} + x_{2k} + \ldots + x_{n(k)k}}{n(k)},\ k = 1, 2, \quad (3.11)$$

Точечные оценки момента встречи t^*_B, уровня качества в момент встречи x^* и временного лага L^* выражаются через оценки коэффициентов линейных зависимостей так:

$$t_k^* = \frac{d_2^* - d_1^*}{a_1^* - a_2^*} = \frac{b_2^* - b_1^* + a_1^* t_{cp}(1) - a_2^* t_{cp}(2)}{a_1^* - a_2^*}, \quad (3.12)$$

$$x^* = \frac{a_1^* d_2^* - a_2^* d_1^*}{a_1^* - a_2^*} = \frac{a_1^* b_2^* - a_2^* b_1^* + a_1^* a_2^* \left(t_{cp}(1) - t_{cp}(2)\right)}{a_1^* - a_2^*}, \quad (3.13)$$

$$L^* = \frac{(a_1^* - a_2^*)t_0 + d_2^* - d_1^*}{a_2^*} = \frac{(a_1^* - a_2^*)t_0 + b_2^* - b_1^* + a_1^* t_{cp}(1) - a_2^* t_{cp}(2)}{a_2^*}, \quad (3.14)$$

Из приведенных формул вытекает, что

$$t_B^* = f_1\left(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*,\right), \quad x^* = f_2\left(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*,\right), \; L^* = f_1\left(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*,\right),$$

где

$$f_1\left(z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*,\right) = \frac{z_4 - z_3 + z_1 t_{cp}(1) - z_2 t_{cp}(2)}{z_1 - z_2}$$

$$f_2\left(z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*,\right) = \frac{z_1 z_4 - z_2 z_3 + z_1 z_2 \left(t_{cp}(1) - t_{cp}(2)\right)}{z_1 - z_2},$$

$$f_3\left(z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*,\right) = \frac{(z_2 - z_1)t_0 + z_4 - z_3 + z_1 t_{cp}(1) - z_2 t_{cp}(2)}{z_2}.$$

Поскольку все входящие в полученные формулы моменты времени предполагаются заданными (детерминированными), то интересующие нас оценки задаются гладкими функциями от четырехмерного вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ оценок метода наименьших квадратов коэффициентов в линейных зависимостях.

Рассмотрим асимптотическое распределение вектора оценок МНК в рамках описанной выше непараметрической вероятностно-статистической модели (см. раздел 3.1). Оценки $a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*$ являются несмещенными, их дисперсии таковы:

$$D\left(a_k^*\right) = \frac{\sigma_k^2}{\sum_{i=1}^{n(k)} \left(t_{ik} - t_{cp}(k)\right)^2}, \; D\left(b_k^2\right) = \frac{\sigma_k^2}{n(k)}, k = 1, 2.$$

Отметим, что в соответствии с принятыми предположениями все четыре дисперсии стремятся к 0 при безграничном росте $n(1)$ и $n(2)$.

Все ковариации вектора $(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*)$ равны 0. Для пар координат с различающимися нижними индексами это вытекает из предположения о независимости между собой совокупностей невязок, соответствующим измерениям значений двух разных линейных функций. Для пар координат с одинаковыми нижними индексами, т.е. для пар $(a*_1, b_1*)$ и $(a*_2, b_2*)$, это установлено в разделе 3.1. Таким образом, в ковариационной матрице вектора $(a*_1, a*_2, b_1*, b*_2)$ отличны от 0 только элементы, стоящие на главной диагонали, т.е. дисперсии.

Каждый из векторов $(a*_1, b*_1)$ и $(a*_2, b*_2)$ является суммой $n(1)$ и $n(2)$ слагаемых соответственно. Если каждое из слагаемых мало по сравнению со всей суммой, т.е. если

$$\lim_{n(k)\to\infty} \max_{1\leqslant i\leqslant n(k)} \left| t_{ik} - t_{cp}(k) \right| \Bigg/ \left\{ \sum_{i=1}^{n(k)} \left(t_{ik} - t_{cp}(k) \right)^2 \right\}^{1/2} = 0, \quad k = 1, 2 ,$$

то при больших $n(1)$ и $n(2)$ распределение вектора $(a*_1, a*_2, b*_1, b*_2)$ приближается нормально распределенным случайным вектором с независимыми координатами. Математические ожидания и дисперсии координат приближающего вектора совпадают с одноименными характеристиками вектора $(a*_1, a*_2, b*_1, b*_2)$. Другими словами, вектор $(a*_1, a*_2, b*_1, b*_2)$ является асимптотически нормальным с указанными выше параметрами.

Рассмотрим распределение функции от вектора оценок МНК. Если функция $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ достаточно гладкая, то согласно методу линеаризации (см. Приложение 1, раздел П.1.4, или [18, п.4.4])

$$f\left(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*\right) - f\left(a_1, a_2, b_1, b_2\right) = \frac{\partial f}{\partial z_1}\left(a_1^* - a_1\right) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial z_2}\left(a_2^* - a_2\right) + \frac{\partial f}{\partial z_3}\left(a_3^* - a_3\right) + \frac{\partial f}{\partial z_4}\left(a_4^* - a_4\right)$$

с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка.

Как показано выше, правая часть последней формулы приближается суммой четырех независимых нормально распределенных величин с нулевыми математическими ожиданиями. Следовательно, функция $f(a_1^*,\ a_2^*,\ b_1^*,\ b_2^*)$ от вектора оценок МНК является асимптотически нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $f(a_1, a_2, b_1, b_2)$, совпадающим с теоретическим значением, и дисперсией

$$Df\left(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 D\left(a_1^*\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 D\left(a_2^*\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 D\left(b_1^*\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial z_4}\right)^2 D\left(b_2^*\right)$$

Подставив приведенные выше значения дисперсий, получаем, что

$$Df\left(a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{\sum\limits_{i=1}^{n(1)}\left(t_{i1}-t_{cp}(1)\right)^2}+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{\sum\limits_{i=1}^{n(2)}\left(t_{i2}-t_{cp}(2)\right)^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2 \frac{\sigma_1^2}{n(1)}+\left(\frac{\partial f}{\partial z_4}\right)^2 \frac{\sigma_2^2}{n(2)}$$

Асимптотическое решение. Рассмотрим асимптотическое распределение момента встречи. Начнем с функции $f_B^*(a_1^*,\ a_2^*,\ b_1^*,\ b_2^*)$. Имеем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_1}=\frac{z_3-z_4+z_2\left(t_{cp}(2)-t_{cp}(1)\right)}{\left(z_1-z_2\right)^2},\quad \frac{\partial f_1}{\partial z_2}=\cdot$$

$$\cdot=\frac{z_4-z_3+z_1\left(t_{cp}(2)-t_{cp}(1)\right)}{\left(z_1-z_2\right)^2},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_3}=\frac{1}{z_1-z_2},\quad \frac{\partial f_1}{\partial z_4}=\frac{1}{z_1-z_2}.$$

В приведенных выше формулах частные производные можно брать как в точке $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)$, так и в точке $(a_1^*,\ a_2^*,$

b_1^*, b_2^*). Различие — бесконечно малые величины более высокого порядка. Поскольку истинные значения коэффициентов линейных зависимостей неизвестны, частные производные будем брать в точке.

Из последних формул с помощью несложных преобразований получаем, что

$$D\left(t_B^*\right)=\left(\frac{b_1^*-b_2^*+a_2^*\left(t_{cp}(2)-t_{cp}(1)\right)}{\left(a_1^*-a_2^*\right)^2}\right)^2\frac{\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n(1)}\left(t_{i1}-t_{cp}(1)\right)^2}+$$

$$+\left(\frac{b_1^*-b_2^*+a_1^*\left(t_{cp}(2)-t_{cp}(1)\right)}{\left(a_1^*-a_2^*\right)^2}\right)^2\frac{\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n(2)}\left(t_{i2}-t_{cp}(2)\right)^2}+\frac{1}{\left(a_1^*-a_2^*\right)^2}\left(\frac{\sigma_1^2}{n(1)}+\frac{\sigma_2^2}{n(2)}\right) \tag{3.15}$$

Для практического применения полученных результатов остается заменить неизвестные дисперсии невязок σ_1^2 и σ_2^2 на их состоятельные оценки. При больших объемах данных $n(1)$ и $n(2)$ используют оценки дисперсий невязок

$$\left(\sigma_1^2\right)^*=\frac{SS(1)}{n(1)},\quad \left(\sigma_2^2\right)^*=\frac{SS(2)}{n(2)},$$

где $SS(1)$ и $SS(2)$ — соответствующие остаточные суммы квадратов,

$$SS(k)=\sum_{i=1}^{n(k)}\left(x_{ik}-x_k^*\left(t_{ik}\right)\right)^2,\quad k=1,2\,. \tag{3.16}$$

Иногда рекомендуют применение несмещенных оценок дисперсий невязок

$$\left(\sigma_1^2\right)^{**}=\frac{SS(1)}{n(1)-2},\qquad \left(\sigma_2^2\right)^{**}=\frac{SS(2)}{n(2)-2}.. \tag{3.17}$$

Ясно, что с ростом объемов данных $n(1)$ и $n(2)$ различие между двумя последними формулами исчезает.

На основе полученных результатов легко указать методы доверительного оценивания и проверки гипотез для момента встречи t_B. Так, асимптотический доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности p, имеет вид

$$\left[t_B^* - U(p)\left\{D^*\left(t_B^*\right)\right\}^{1/2};\ t_B^* U(p)\left\{D^*\left(t_B^*\right)\right\}^{1/2} \right]. \qquad (3.18)$$

Здесь $D^*(t_B^*)$ — только что описанная оценка дисперсии случайной величины t_B (с использованием той или иной оценки дисперсий невязок), $U(p)$ — квантиль стандартного нормального распределения порядка $(1+p)/2$, т.е. $\Phi(U(p)) = \frac{1+p}{2}$

, где $\Phi(w)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Пример. В качестве примера рассмотрим показатели технического уровня продукции (в условных единицах) двух предприятий — ОАО «Альфа» и ОАО «Бета». Приведенные в табл.3.8 данные показывают, что в 1999 г. первое предприятие отстает от второго, но постепенно сокращает разрыв, более быстрыми темпами наращивая показатель технического уровня. Когда же оно догонит второе предприятие?

Таблица 3.8

Показатели технического уровня продукции двух предприятий (в условных единицах, на конец года)

Годы	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Условные моменты времени $t_{i1} = t_{i2}$	1	2	3	4	5	6	7
Показатели ОАО «Альфа» x_{i1}	0,1	0,2	0,6	0,5	0,8	0,9	1,3
Восстановленные значения (предприятие «Альфа»)	0,06	0,25	0,44	0,63	0,82	1,01	1,2
Показатели ОАО «Бета» x_{i2}	0,6	0,95	0,8	1,2	1,1	1,2	1,4
Восстановленные значения (предприятие «Бета»)	0,71	0,82	0,93	1,04	1,15	1,26	1,37

Для проведения расчетов естественным образом введем условные моменты времени (табл.3.8). Методом наименьших квадратов восстановим линейные независимости. По формуле

(3.9) получаем, что $t_{ср}(1) = t_{ср}(2) = 4$. По формулам (3.10) и (3.11) находим оценки коэффициентов линейных зависимостей

$$a_1^* = 0{,}19,\ a*_2 = 0{,}11,\ a*_1 = 0{,}63,\ a*_2 = 1{,}04.$$

Восстановленные зависимости имеют вид

$$x*_1(t) = 0{,}19(t-4) + 0{,}63,\ x*_2(t) = 0{,}11(t-4) + 1.04$$

Восстановленные значения приведены в табл.3.2.

Оценку момента встречи $t_в*$ определим по формуле (3.12)

$$t_B^* = \frac{1{,}04 - 0{,}63 + 0{,}19 \cdot 4 - 0{,}11 \cdot 4}{0{,}19 - 0{,}11} = 9{,}13\ .$$

Другими словами, значения показателей технического уровня предприятий сравняются в начале 2008 года. Это общее значение найдем по формуле (3.13):

$$x* = \frac{0{,}19 \cdot 0{,}6 - 0{,}11 \cdot (-0{,}13) + 0{,}19 \cdot 0{,}11\left(4-4\right)}{0{,}19 - 0{,}11} = 1{,}6\ .$$

Для определения временного лага, т.е. величины, показывающей на сколько ОАО «Альфа» отстает от предприятия-конкурента, для определенности, в 2004 году, воспользуемся формулой (3.14)

$$L* = \frac{\left(0{,}11 - 0{,}19\right) \cdot 6 + 0{,}6 - \left(-0{,}13\right)}{0{,}11} = 2{,}27\ .$$

Рассчитаем по формуле (3.18) асимптотический доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $p = 0{,}95$. Для этого значения несмещенных оценок дисперсий невязок найдем по формуле (3.17), а значения остаточной суммы квадратов $SS(1)$ и $SS(2)$ определим по формуле (3.16). Получаем $\sigma^2_1 = 0{,}01382$, $\sigma^2_1 = 0{,}0157$. Асимптотическую дисперсию момента встречи найдем по формуле (3.15): $D(t_a^*) = 4{,}379$. Поскольку $U(p) = 1{,}96$ при $p = 0{,}95$, то доверительный интервал таков (рис.3.6):

$$\left[9{,}13 - 1{,}96\sqrt{4{,}379};\quad 9{,}13 + 1{,}96\sqrt{4{,}379}\right] = [5{,}028; 13{,}28].$$

Таким образом, возможно, что обгон уже состоялся (в 2004 или в 2005 году), но это не отражено в табл.3.8 из-за погрешностей, искажающих зависимости.

О практическом применении статистических оценок точки встречи. Необходимость получения приведенных выше результатов, касающихся оценок момента встречи t^*_B, уровня качества в момент встречи x^* и временного лага L^*, была выявлена в результате решения прикладных проблем, возникших при разработке системы автоматического проектирования (САПР) стандартов на продукцию [10]. В этой системе реализуются функции информационного обеспечения и анализа данных о характеристиках качества группы отечественных и зарубежных образцов (марок, моделей) аналогичной продукции, требований нормативно-технической документации на эту продукцию, а также поддерживаются функции интерактивного (человеко-машинного) принятия решений по управлению качеством, сертификации и стандартизации.

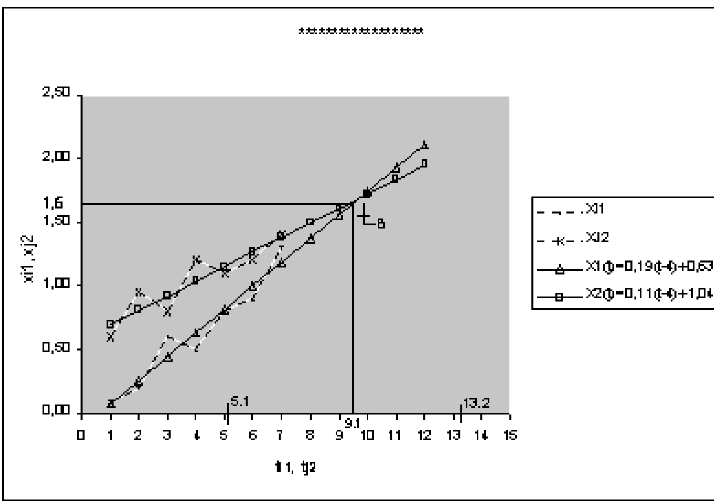

Рис.3.6. Динамика показателей технического уровня двух предприятий, восстановленные зависимости и доверительное оценивание момента встречи

Статистические методы в САПР стандартов используются для анализа распределений показателей качества продукции, исследования взаимосвязей показателей, выявления группировок продукции по уровню качества, анализа временных рядов и прогнозирования качества продукции. Основные проблемы программной реализации этих методов связаны с обеспечением интерактивного решения задач пользователями (инженерами по стандартизации и техническому регулированию), не имеющими специальной подготовки по статистическим методам. Кроме того, возникли специфические задачи, требующие совершенствования статистического аппарата, в частности, задача сравнительного анализа тенденций развития отечественной и зарубежной групп продукции, решению которой и посвящены предыдущие страницы. Разработанное математическое и программное обеспечение применялось для анализа данных о характеристиках качества изделий электронной техники.

Разработанные в настоящем разделе методы могут быть использованы при решении различных практических задач, связанных с интервальной оценкой точки пересечения двух регрессионных прямых. В частности, они использованы для получения асимптотических дисперсий уровня качества в момент встречи и временного лага (величины отставания) и разработки методов доверительного оценивания этих величин, используемых в системах управления промышленными предприятиями [11].

3.7. Модель с периодической составляющей

Рассмотрим задачу восстановления зависимости $x = x(t)$ на основе набора n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, n,$ где t_k –— значения независимой переменной, а x_k — соответствующие им значения зависимой переменной.

При анализе экономических данных возникает необходимость использования моделей временных рядов, включающих три составляющие: трендовую (T), периодическую, или циклическую (S) и случайную (E). Рассматривают [22] аддитивную модель $T + S + E$ и мультипликативную модель $T \times S \times E$.

Простейшая аддитивная модель имеет вид

$$x_k = a\,(t_k - \bar{t}) + d + e_k = a\,(t_k - \bar{t}) + d + f(t_k) + E_k,\ k = 1,2,\ldots,n. \qquad (3.19)$$

Здесь трендовая составляющая — линейная функция $a\ (t_k - \bar{t}) + d$ (как и в разделе 3.1, такая запись тренда предпочтительнее для облегчения выкладок); периодическая составляющая $f(t)$ обычно описывает сезонность, т.е период известен (в зависимости от моделируемой органиазционно-экономической ситуации он равен году, неделе, суткам и т.п.); случайная составляющая представлена слагаемыми E_k, которые являются реализациями независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2, неизвестной статистику. В модели (3.19) имеем:

$$e_k = f(t_k) + E_k,\ = 1, 2,\ldots,n.$$

В отличие от модели, изученной в разделе 3.1, отклонения от линейного тренда e_k в модели (3.19) не являются одинаково распределенными. Однако их распределения отличаются лишь сдвигами (на значения детерминированной периодической составляющей).

Соответствующая мультипликативная модель имеет вид

$$y_k = \left[B t_k^a \right] \times f_1(t_k) \times [1 + \varepsilon_k], \quad k = 1, 2, \ldots, n\,. \qquad (3.20)$$

В (3.20) сомножители имеют описанный выше смысл. При логарифмировании модель (3.20) переходит в аналог модели (3.19), следовательно, достаточно рассматривать модель (3.19).

Практическая значимость этой модели очевидна. Однако расчетные методы, описанные в [22], являются эвристическими. Цель настоящего раздела — ***построить непараметрическую вероятностно-статистическую теорию прогноза временного***

ряда на базе линейного тренда с учетом аддитивной периодической составляющей. Изложение следует работе [20].

Следуя эвристическому подходу [22], изучим асимптотическое поведение оценок МНК a^* и d^*, заданных формулами (3.3), установим их асимптотическую нормальность в предположениях модели (3.19), а затем состоятельно оценим периодическую составляющую $f(t)$ и построим интервальный прогноз для $x(t)$. В частности, выявится целесообразность анализа данных за полное число лет (периодов). В отличие от [16] (см. также [17, п.6.3], [18, п.10.2]), длину периода оценивать не требуется, поскольку она задана из содержательных соображений (например, для данных раздела 3.4 — один год).

Асимптотические распределения оценок параметров. Из формулы (3.3) следует, что в принятых выше предположениях и обозначениях настоящего раздела

$$d^* = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(t_k - \overline{t}\right) + d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k =$$

$$= d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(t_k\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k\ . \tag{3.21}$$

Согласно Центральной предельной теореме (см. Приложение 1) оценка d^* имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием $d + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(t_k\right)$ и дисперсией σ^2/n, оценка которой приводится ниже.

Из формул (3.3) и (3.21) вытекает, что

$$x_k - \overline{x} = a\left(t_k - \overline{t}\right) + d + e_k - d - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k = a\left(t_k - \overline{t}\right) + e_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k\ ,$$

$$\left(x_k - \overline{x}\right)\left(t_k - \overline{t}\right) = a\left(t_k - \overline{t}\right)^2 + e_k\left(t_k - \overline{t}\right) - \frac{\left(t_k - \overline{t}\right)}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k\ .$$

Последнее слагаемое во втором соотношении при суммировании по k обращается в 0, поэтому

$$a^* = a + \sum_{k=1}^{n} c_k e_k = a + \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k E_k, \quad c_k = \frac{\left(t_k - \overline{t}\,\right)}{\sum_{k=1}^{n}\left(t_k - \overline{t}\,\right)^2}$$

(3.22)

Формулы (3.22) показывают, что оценка a^* является асимптотически нормальной с математическим ожиданием $a + \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k)$ и дисперсией

$$D\left(a^*\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D(E_k) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t}\,)^2}.$$

Отметим, что многомерная нормальность имеет быть, когда каждое слагаемое в формуле (3.22) мало сравнительно со всей суммой, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \max\left|i_k - \overline{t}\right| \Big/ \left\{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t}\,)^2\right\}^{1/2} = 0. \qquad (3.23)$$

Условие (3.23) выполнено, если t_k образуют (полную, т.е. без пропусков) арифметическую прогрессию, число членов которой безгранично растет.

Итак, дисперсии оценок МНК параметров a^* и b^* линейного тренда — те же, что и при отсутствии сезонных искажений (см. раздел 3.1). А вот их математические ожидания зависят от периодической составляющей. Однако в случае

$$M\left\{\left(a^* - a\right)\left(d^* - d\right)\left(t_k - \overline{t}\,\right)\right\} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k \left(t_k - \overline{t}\,\right) M\left(E_k^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(t_k - \overline{t}\,\right)\sigma^2 \sum_{k=1}^{n} c_k = 0 \qquad (3.24)$$

оценки a^* и b^* являются несмещенными.

Условия (3.24) являются принципиально важными. Они являются необходимыми и достаточными для несмещенности и состоятельности оценок, рассмотренных в настоящем разделе.

Справедливости первого из условий (3.21) можно добиться, изменив в случае необходимости свободный член d в модели (3.19). Некоторая проблема состоит в том, какую сумму значений периодической составляющей приравнивать 0 — за период (например, за год) или за всё время наблюдений (как и записано в (3.24). С организационно-экономической точки зрения естественнее первое (т.е. приоритет отдается свойствам за период, интервал наблюдений может меняться, например, расширяться со временем). Когда оба варианта дают одно и то же?

Первое из условий (3.24) можно считать выполненным, если t_i образуют (полную, т.е. без пропусков) арифметическую прогрессию, причем целое число шагов составляет один период (например, если измерения проводятся ежемесячно или раз в квартал, а период — год), и, кроме того, данные взяты за целое число периодов. Действительно, тогда естественно принять, что сумма значений периодической составляющей за период равна 0, поскольку в противном случае, как уже отмечалось, можно было бы скорректировать свободный член (т.е. по тем же соображениям, по которым принято условие нулевого математического ожидания случайных составляющих E_i).

Для справедливости второго из условий (3.24) достаточно добавить к сказанному предположения симметричности множества $\{t_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ относительно $\bar{t}$ (например, начала года) и четности периодической составляющей $f(t)$ относительно той же точки. Последнее выполнено, если, например, график $f(t)$ симметричен относительно середины года.

Несмещенность (в предположениях (3.24)) и асимптотическая нормальность оценок метода наименьших квадратов позволяют легко указывать для них асимптотические доверительные границы и проверять статистические гипотезы, например, о равенстве определенным значениям, прежде всего 0.

Асимптотическое распределение трендовой составляющей. Из формул (3.21) и (3.22) следует, что при справедливости (3.24)

$$M\{a^*(t - \bar{t}) + d^*\} = M(a^*)\,(t - \bar{t}) + M(d^*) = a(t - \bar{t}) + d,$$

т.е. оценка $y^*(t) = a^*(t - \bar{t}) + d^*$ трендовой составляющей $y(t) = a(t - \bar{t}) + d$ рассматриваемой зависимости является несмещенной. Поэтому

$$D(y^*(t)) = D(a^*)(t - \bar{t})^2 + 2M\{(a^* - a)(d^* - d)(t - \bar{t}) + D(d^*)\}.$$

При этом, поскольку погрешности E_k независимы в совокупности и $M(E_k) = 0$, то

$$M\{(a^*-a)(d^*-d)(t_k-\bar{t})\}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_k(t_k-\bar{t})M(E_k^2)=\frac{1}{n}(t_k-\bar{t})\sigma^2\sum_{k=1}^{n}c_k=0$$

.

Таким образом,

$$D(y^*(t))=\sigma^2\left\{\frac{1}{n}+\frac{(t_k-\bar{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}c_k(t_k-\bar{t})^2}\right\}. \tag{3.25}$$

Итак, оценка $y^*(t)$ является несмещенной и асимптотически нормальной. Для ее практического использования (построения доверительных интервалов, проверки статистических гипотез) необходимо уметь оценивать остаточную дисперсию $M(E^2_k) = \sigma^2$.

В частности, не представляет труда выписывание нижней и верхней границ для трендовой составляющей прогностической функции:

$$y_{нижн}(t)=a^*(t-\bar{t})+d^*-\delta(t),\quad y_{верх}(t)=a^*(t-\bar{t})+d^*-\delta(t),$$

где полуширина доверительного интервала $\delta(t)$имеет вид

$$\delta(t)=U(\gamma)\sqrt{D^*(y^*(t))}=U(\gamma)\sigma^*\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(t-\bar{t})^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k-\bar{t})^2}}\,. \tag{3.26}$$

Здесь γ — доверительная вероятность, $U(\gamma)$ — квантиль нормального распределения порядка $\frac{1+\gamma}{2}$, т.е.

$$U(\gamma) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. При $\gamma =$ 0,95 (наиболее применяемое значение) имеем $U(\gamma) = 1{,}96$. В формуле (3.26) $D^*(y^*(t))$ — состоятельная оценка дисперсии $y^*(t)$. В соответствии с (3.25) она является произведением состоятельной оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей E_k на известную статистику детерминированную функцию от t.

Математическое ожидание остаточной суммы квадратов. В точках t_k, $k = 1, 2, \ldots, n,$ имеются исходные значения зависимой переменной x_k и восстановленные значения $y^*(t_k)$. Рассмотрим остаточную сумму квадратов

$$SS = \sum_{k=1}^{n}\left(y^*(t_k) - x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left\{(a^*-a)(t_k-\overline{t})(d^*-d) - f(t_k) - E_k\right\}^2$$

Напомним, что при отсутствии периодической составляющей используют (см. раздел 3.1 и [17, пп.5.1, 5.2] состоятельные оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей, построенные на основе остаточной суммы квадратов

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}} \quad \text{или} \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n-2}}\,.$$

В соответствии с формулами (3.21) и (3.22) при справедливости условий (3.24)

$$SS = \sum_{k=1}^{n}\left\{(t_k-\overline{t})\sum_{j=1}^{n}c_jE_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E_j - f(t_k) - E_k\right\}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j(t_k-\overline{t}) + \frac{1}{n}\right]E_j - f(t_k) - E_k\right\}^2 = \sum_{k=1}^{n}SS_k\,.$$

Найдем математическое ожидание каждого из слагаемых:

$$M\left(SS_k\right)=M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\overline{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j-f\left(t_k\right)-E_k\right\}^2=$$

$$=M\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\overline{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j-2M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_{j1}\left(t_k-\overline{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}\left(f\left(t_k\right)+E_k\right)+$$

$$+M\left(f\left(t_k\right)-E_k\right)^2.$$

Поскольку E_k независимы, одинаково распределены и имеют нулевое математическое ожидание, то

$$M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\overline{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}^2=\sum_{j=1}^{n}\left\{c_j\left(t_k-\overline{t}\right)+\frac{1}{n}\right\}^2\sigma^2.$$

Далее,

$$-2M\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[c_j\left(t_k-\overline{t}\right)+\frac{1}{n}\right]E_j\right\}\left(f\left(t_k\right)E_k\right)=-2\left\{c_k\left(t_k-\overline{t}\right)+\frac{1}{n}\right\}\sigma^2.$$

Наконец,

$$M(f(t_k)-E_k)_2=f_2(t_k)+\sigma^2.$$

На основе трех последних равенств можно показать, что при выполнении условия асимптотической нормальности (3.23)

$$\lim_{n\to\infty}M\left(SS_k\right)=f^2\left(t_k\right)+\sigma^2.$$

Следовательно,

$$M\left(\frac{SS}{n}\right)=\sigma^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f^2\left(t_k\right). \qquad (3.27)$$

В правой части (3.27) первое слагаемое соответствует вкладу случайной составляющей, второе — вкладу периодической составляющей.

В некоторых случаях второе слагаемое в правой части (3.27) может быть известно из предыдущего опыта или же оценено экспертами, однако в большинстве ситуаций целесообразно исходить из оценки периодической составляющей.

Оценивание сезонной компоненты. Рассматривают как параметрические, так и непараметрические подходы. Популярный метод исходит из того, что достаточно гладкую функцию можно разложить в ряд Фурье и получить хорошее приближение с помощью небольшого числа гармоник. В простейшем случае — одна гармоника. Так, динамику индекса инфляции можно попытаться изучать с помощью модели

$$x_k = a\,(t_k - \bar{t}) + d + f(t_k) + E_k =$$

$$= a\,(t_k - \bar{t}) + d + g\cos(2\pi t_k) + E_k,\ k = 1,2,\ldots,n$$

(время t измеряется в годах). Тогда неизвестные параметры a, b, g оцениваются методом наименьших квадратов.

Однако обычно нет оснований предполагать, что периодическая составляющая входит в то или иное параметрическое семейство функций. Приходится строить непараметрические оценки. Опишем одну из возможных постановок.

Пусть в согласии с предположениями (3.24) рассматривается целое число периодов, т.е. $n = mq$, где n — объем наблюдений, m — количество периодов, q — число наблюдений в одном периоде. Тогда в соответствии с определением периодической составляющей справедливы равенства

$$f(t_s) = f(t_{q+s}) = f(t_{2q+s}) = \ldots = f(t_{(m-1)q+s}),\ s = 1, 2, \ldots, q. \quad (3.28)$$

Если наблюдения проводятся ежемесячно в течение m лет, то число наблюдений в одном периоде $q = 12$, общий объем наблюдений $n = 12m$, далее, s — номер месяца в году, $s = 1, 2, \ldots, 12$. Пусть g_s — общее значение в (3.28). Требуется оценить $g_1, g_2, \ldots, g_q$.

Естественный подход состоит в том. чтобы усреднить m значений $x_k - y^*(t_k)$, соответствующих моментам времени, отстоящим друг от друга на целое число периодов. Другими словами, усреднить «очищенные» от трендовой составляющей исходные данные, соответствующие одноименным месяцам различных лет. Речь идет об оценках

$$g_s^* = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(x_{s+(j-1)q} - y^*\left(t_{s+(j-1)q}\right)\right) \quad s = 1, 2, \ldots, q\,. \qquad (3.29)$$

Оценка периодической составляющей распространяется на весь интервал наблюдений очевидным образом:

$$f(t_s) = f^*(t_{q+s}) = f^*(t_{2q+s}) = \ldots = f^*(t_{(m-1)q+s}) = g^*_s,$$

$$s = 1, 2, \ldots, q. \qquad (3.30)$$

Сложив восстановленные значения трендовой и периодической оставляющей, получим оценку зависимости, «очищенную» от случайной составляющей

$$x^*(t) = y^*(t) + f^*(t) = a^*(t - \bar{t}) + d^* + f^*(t) \qquad (3.31)$$

Здесь оценки a^* и d^* находят по формулам (3.3), а оценки $f^*(t)$ — по формулам (3.29) — (3.30).

С помощью формулы (3.31) можно строить точечный прогноз, используя ее вне интервала наблюдений. Для этого достаточно распространить сезонную составляющую $f^*(t)$ вплоть до рассматриваемого момента времени по правилу (3.30) и суммировать ее с прогнозом трендовой составляющей $y^*(t)$. Интерполяция и экстраполяция на моменты времени t, не входящие в исходное множество $\{t_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$ и множества, полученные из него сдвигами на целое число периодов, может быть осуществлена путем линейной интерполяции ближайших значений или иным методом сглаживания.

Обсудим свойства оценок (3.29)–(3.31).

При безграничном росте объема данных и справедливости условий (3.23) и (3.24) оценки a^* и d^* параметров трендовой составляющей являются состоятельными и несмещенными, а потому, как можно показать, в рассматриваемых в настоящем разделе условиях суммы (3.29) оценивают периодическую составляющую состоятельно (при $m \to \infty$) и несмещенно. Как следствие,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left[f^*(t_k)\right]^2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} f^2(t_k) \to 0 \qquad (3.32)$$

по вероятности при $n \to \infty$. В соответствии с (3.27) последнее соотношение дает возможность оценить σ^2, а затем построить интервальный прогноз для трендовой составляющей согласно (3.26).

Отметим, что в рассматриваемой ситуации, как правило, n растет, увеличиваясь на величины, кратные q — числу наблюдений в одном периоде. Как следствие, уменьшаемое в (3.32) — константа, зависимости от n нет. Эти особенности связаны с тем, что выполнение условий (3.24) предполагает рассмотрение целого числа периодов.

Рассмотрим оценки (3.29) подробнее. Как вытекает из (3.19), (3.28) и (3.29),

$$g_s^* = f(t_s) - (a^* - a)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\left(t_{k+(j-1)q} - \overline{t}\right) - (d^* - d) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E_{s+(j-1)q}, \quad s = 1, 2, \ldots, q$$

.

С учетом (3.21), (3.22) и (3.24) получаем, что

$$g_s^* = f(t_s) - \left(\sum_{k=1}^{n} c_k E_k\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(t_{k+(j-1)q} - \overline{t}\right)\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} E_{s+(j-1)q}, \quad s = 1, 2, \ldots, q$$

.

Таким образом,

$$g_s^* = f(t_s) + \sum_{k=1}^{n} h_{ks} E_k, \quad s = 1, 2, \ldots, q \tag{3.33}$$

где $h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, если $k = \{s + (j — 1)q, = 1, 2, \ldots, m\}$,

и $h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n}$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, и $r_s = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(t_{s(j-1)q} - \overline{t}\right)$.

Соотношение (3.33) означает, что рассматриваемые оценки есть суммы независимых случайных величин, а потому с помощью Центральной предельной теоремы можно построить доверительные интервалы для рассматриваемых значений периодической составляющей (в предположении справедливости условий (3.23)).

Интервальный прогноз. Точечный прогноз строят по формуле (3.28) на основе $x^*(t)$ — оценки зависимости, «очищенной» от случайной составляющей, но включающей трендовый и периодический компоненты. Если выполнены условия (3.24), то

$$Mx^*(t) = x(t) = a\,(t - \bar{t}\,) + d + f(t),$$

т.е. оценка $x^*(t)$ является несмещенной.

При справедливости условий (3.24) с учетом (3.21), (3.22) и (3.33) получаем, что для момента времени t, входящего в исходное множество $\{t_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ или в множества, полученные из него сдвигами на целое число периодов,

$$x^*(t) - x(t) = (t - \bar{t}\,)\sum_{k=1}^{n} c_k E_k\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k + \sum_{k=1}^{n} h_{ks} E_k\ . \qquad (3.34)$$

В (3.34) при определении значений коэффициентов h_{ks} в качестве s следует взять номер наименьшего из исходных моментов времени $\{t_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$, отстоящих от рассматриваемого момента t на целое число периодов. С помощью (3.33) заключаем, что

$$x^*(t) - x(t) = \sum_{k=1}^{n} w_{ks} E_k\ ,$$

где $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s) + \dfrac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j — 1)q, = 1, 2, \ldots, m\}$, и $w_{ks} = c_k(t - \bar{t} - r_s)$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, и r_s — то же, что и в формуле (3.33).

В правой части формулы (3.34) стоит сумма независимых случайных величин, поэтому оценка $x^*(t)$ является асимптотически нормальной (при справедливости условий (3.23)) с математическим ожиданием $x(t)$ и дисперсией

$$D\big(x(t)\big) = \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2 D(E_k) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2\ . \qquad (3.35)$$

Следовательно, нижняя $x_{\text{нижн}}(t)$ и верхняя $x_{\text{нижн}}(t)$ $x_{\text{верх}}(t)$ доверительные границы для прогностической функции (с учетом как трендовой, так и периодической составляющих) имеют вид:

$$x_{нижн}(t) = a^*(t-\overline{t}) + d^* + f^*(t) - \Delta(t),\ \ x_{верх}(t) =$$

$$= a^*(t-\overline{t}) + d^* + f^*(t) + \Delta(t),$$

где

$$\Delta(t) = U(\gamma)\sqrt{D\cdot\left(x\cdot(t)\right)} = U\left(\gamma\right)\sigma\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2}\ . \qquad (3.36)$$

Здесь γ — доверительная вероятность, $U(\gamma)$ — квантиль нормального распределения порядка $\frac{1+\gamma}{2}$. В формуле (3.36) $D \cdot (x \cdot (t))$ — состоятельная оценка дисперсии точечного прогноза $x^*(t)$. В соответствии с (3.35) она является произведением состоятельной оценки σ^* среднего квадратического отклонения σ случайных погрешностей E_k на известную статистику детерминированную функцию от t. Величину σ^* рассчитывают согласно (3.27) и (3.32).

Подведем итоги. По сравнению с эвристическими алгоритмами, разобранными в [22] и других литературных источниках, разработанная в настоящем разделе теория позволила:

1) дать общее обоснование этим алгоритмам в рамках асимптотических методов математической статистики и указать условия их применимости (формула (3.23));

2) выявить принципиально важные условия (3.24), необходимые и достаточные для несмещенности и состоятельности рассматриваемых оценок;

3) построить доверительные интервалы для зависимости (прогностической функции) и ее трендовой составляющей.

В рамках математической статистики удается провести анализ не всех распространенных эвристических алгоритмов. Так, довольно часто рекомендуют вначале провести сглаживание («выравнивание») временного ряда, например, методом скользящих средних [22, с.137]. При этом периодическая (сезонная) составляющая меняется, а погрешности (отклонения от суммы трендовой и периодической составляющих) становятся зависимыми случайными величинами, что делает невозможным применение описанных в настоящем разделе методов.

Пример применения непараметрического метода наименьших квадратов в модели с периодической составляющей. Обработаем фактические данные ОАО «Магнитогорский металлургический комбинат» о закупочных ценах на лом черных металлов (табл.3.4). Как показывают обсуждения в разд.3.4, может быть использована рассмотренная в настоящем разделе аддитивная модель (3.19) линейного тренда с периодической составляющей. Для облегчения понимания оставим из каждого квартала данные только по одному месяцу. Введем условные моменты времени, а именно, будем измерять время в кварталах, начиная с первого квартала 2003 г. Исходные данные для демонстрации примера применения непараметрического метода наименьших квадратов в модели с периодической составляющей — пары чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, ..., 12$, — представлены в табл.3.9 в столбцах (3) и (4) соответственно.

Таблица 3.9

Построение модели прогнозирования цен на лом марки 3А

№ п/п	Период	Условные моменты времени	Закупочные цены, руб./т	Оценка тренда	Отклонения от оценки тренда	Восстановленные значения	Кажущиеся невязки
k		t_k	x_k	$y^*(t_k)$	$x_k - y^*(t_k)$	x_k^*	$x_k - x_k^*$
1	янв.03	1	2 750	2 800	–50	2 424	326
2	апр.03	2	3 800	3 012	788	3 545	255
3	июл.03	3	2 900	3 224	–324	2 655	245
4	окт.03	4	3 100	3 437	–337	3 848	–748
5	янв.04	5	2 761	3 649	–888	3 273	–512
6	апр.04	6	4 602	3 861	741	4394	208
7	июл.04	7	3 540	4 073	–533	3504	36
8	окт.04	8	5 268	4 286	982	4 697	571
9	янв.05	9	4 307	4 498	–191	4 122	185
10	апр.05	10	4 779	4 710	69	5 243	–464
11	июл.05	11	4 071	4 922	–851	4 353	–280
12	окт.05	12	5 723	5 135	588	5546	177

По формулам (3.3) найдем оценки параметров a^* и d^*, что позволяет построить оценку трендовой составляющей

$$y^*(t) = a^*(t - \bar{t}) + d^* = 212{,}26\,(t - 6{,}5) + 3967{,}17 = \\ = 212{,}26\,t + 2587{,}48.$$

Численные значения трендовой составляющей приведены в столбце (5) табл.3.9.

Рассчитав отклонения исходных значений закупочных цен от оценок трендовой составляющей (столбец (6) табл.3.9), возведя их в квадрат и сложив, получаем остаточную сумму квадратов $SS = 4\ 539\ 214$ и $SS/n = SS/12 = 378\ 267{,}83$.

Сгруппировав отклонения исходных значений закупочных цен от оценок трендовой составляющей по месяцам (табл.3.10), наглядно убеждаемся в наличии периодической составляющей. Взяв среднее арифметическое отклонений от тренда за конкретный месяц, рассчитываем оценку $f^*(t_s)$ периодической составляющей (в соответствии с формулой (3.29)). Результаты приведены в табл. 3.10.

Таблица 3.10

Оценивание периодической составляющей

Номер квартала s	Месяц	Отклонения от тренда			Оценка $g_s^* = f^*(t_s)$ периодической составляющей
		в 2003 г.	в 2004 г.	в 2005 г.	
1	Январь	–50	–888	–191	–376
2	Апрель	788	741	69	533
3	Июль	–324	–533	–851	–569
4	Октябрь	–337	982	588	411

Рассчитав по формуле (3.30) оценки периодической составляющей на весь интервал времени и сложив их с оценками трендловой составляющей, получаем в соответствии с формулой (3.31) оценку зависимости, «очищенную» от случайной составляющей, т.е. восстановленные значения (столбец (7) табл.3.9). Кажущиеся невязки, т.е. отклонения исходных значений закупочных цен от восстановленных значений, приведены в столбце (8) табл.3.9. Сравнивая столбцы (6) и (8), убеждаемся в целесообразности введения в модель периодической составляющей. В 9 случаях из 12 абсолютные величины отклонений уменьшились, в остальных трех, хотя и возросли, но лищь до среднего уровня среди остальных.

Возведя в квадрат оценки периодической составляющей (табл.3.10), сложив эти квадраты, умножив на число лет и поделив на n, получаем, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f^*(t_k)\right)^2 = 229\,537.$$

В соответствии с формулой (3.27) оценкой дисперсии случайной составляющей является

$$(\sigma^*)^2 = \frac{SS}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f^*(t_k)\right)^2 = 378\,267{,}83 - 229\,537 = 148\,731,$$

а оценкой среднего квадратического отклонения

$$\sigma^* = \sqrt{148731} = 385{,}7\ .$$

В соответствии с формулами (3.21) и (3.22) оценим дисперсии оценок параметров

$$D^*(a^*) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 D^*(E_k) = \frac{(\sigma^*)^2}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t})^2} = \frac{143731}{143} = 1040,$$

$$D^*(d^*) = \frac{(\sigma^*)^2}{n} = \frac{143731}{12} = 12394.$$

Средние квадратические отклонения a^* и d^* оцениваются как 32,25 и 111,33 соответственно, а доверительные интервалы, соответствующие доверительной вероятности 0,95, таковы:

$[a_{\min}; a_{\max}] = [149{,}05; 275{,}47]$, $[d_{\min}; d_{\max}] = [3748{,}96; 4185{,}38]$.

Первое из условий (3.24) выполнено в силу построения оценок периодической составляющей по целому числу периодов. Действительно, согласно данным табл.3.10 сумма оценок периодической составляющей для 12 точек наблюдений равна

(–3), незначительное отклонение от 0 вызвано ошибками округления.

В соответствии с формулой (3.22) смещение оценки a* оценивается как

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f^*(t_k) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t}) f^*(t_k)}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t})^2} = \frac{5568}{143} = 38{,}94 .$$

Таким образом, смещение имеет тот же порядок, что и среднее квадратичное отклонение оценки a*, и заведомо меньше, чем полуширина доверительного интервала. Дальнейшее сравнение может быть проведено на основе оценки дисперсии смещения — случайной величины

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t}) f^*(t_k)}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t})^2} .$$

Алгоритм вычисления дисперсии Z аналогичен таковым для периодической составляющей и интервального прогноза (см. (3.33) и (3.35) соответственно), но более сложен, поэтому не включен в учебник.

Таким образом, можно считать, что предположения (3.24) модели (3.19) выполнены для данных табл.3.9.

Перейдем к оценке дисперсий значений периодической составляющей. Как следует из равенства (3.33),

$$D(g_s^*) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} h_{ks}^2, \ \ s = 1, 2, \ldots, q ,$$

где $h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j-1)q,\, j = 1, 2, \ldots, m\}$, и

$h_{ks} = -c_k r_s - \frac{1}{n}$ при иных значениях индекса суммирования k,

и $r_s = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (t_{s+(j-1)q} - \overline{t})$.

Начнем со значения $s = 1$ (периодическая составляющая для января). Тогда $r_1 = \frac{1}{3}\big((1-6,5)+(5-6,5)+(9-6,5)\big) = -1,5$. Понадобятся значения

$$c_k = \frac{t_k - \overline{t}}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t})^2} = \frac{t_k - 6,5}{143} = \frac{k - 6,5}{143}.$$

Расчет удобно проводить с помощью таблицы (табл.3.11).

Таблица 3.11

Расчет дисперсии периодической составляющей

k	$t_k - \overline{t}$	$c_k r_1$	$-1/n$	$+1/m$	h_{k1}	h_{k1}^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	–5,5	0,0577	–0,0833	0,3333	0,3077	0,09468
2	–4,5	0,0472	–0,0833	–	–0,0361	0,00130
3	–3,5	0,0367	–0,0833	–	–0,0466	0,00217
4	–2,5	0,0262	–0,0833	–	–0,0571	0,00326
5	–1,5	0,0157	–0,0833	0,3333	0,2657	0,07060
6	–0,5	0,0052	–0,0833	–	–0,0781	0,00610
7	0,5	–0,0052	–0,0833	–	–0,0885	0,00783
8	1,5	–0,0157	–0,0833	–	– 0,0990	0,00980
9	2,5	–0,0262	–0,0833	0,3333	0,2238	0,05009
10	3,5	–0,0367	–0,0833	–	0,1200	0,01440
11	4,5	–0,0472	–0,0833	–	0,1305	0,01703
12	5,5	–0,0577	–0,0833	–	0,1410	0,01988

В таблице 3.11 столбец (3) получен из столбца (2) умножением на $\frac{r_1}{143} = \frac{-1,5}{143} = -0,01049$, каждый элемент столбца (6) равен сумма элементов столбцов (3), (4) и (5), стоящих в той же строке, а в столбце (7) стоят квадраты соседних элементов из столбца (6). Цель построения табл.3.11 — расчет суммы элементов столбца (7). Эта сумма равна 0,28275. Следовательно,

$$\sqrt{D^*(g_1^*)} = \sigma^* \sqrt{\sum_{k=1}^{n} h_{k1}^2} = 385,7 \times \sqrt{0,28275} = 204,8 \ .$$

Доверительный интервал для значения периодической составляющей в январе (–376– 1,96 × 204,8; –376 + 1,96 × 204,8) захватывает 0 (при доверительной вероятности 0,95), отличие значения периодической составляющей от 0 не значимо (на уровне значимости 0,05).

Аналогичный случай для значения $s = 2$ (периодическая составляющая для апреля) дает

$$\sum_{k=1}^{n} h_{k2}^2 = 0,25524, \ \sqrt{D^*(g_2^*)} = \sigma^* \sqrt{\sum_{k=1}^{n} h_{k2}^2} = 385,7 \times \sqrt{0,25524} = 194,86$$

.

Доверительный интервал для значения периодической составляющей в апреле (533– 1,96 × 194,86; 533 + 1,96 × 194,86) = (533– 381,93; 533 + 381,93) не захватывает 0 (при доверительной вероятности 0,95), отличие значения периодической составляющей от 0 значимо (на уровне значимости 0,05).

Приступим к завершающему этапу анализа данных табл.3.9 — построению интервального прогноза. Необходимо рассчитать величины $w_{ks} = c_k(t - \overline{t} - r_s) + \frac{1}{m}$, если $k \in \{s + (j - 1)q, j = 1, 2, \dots m\}$, и $w_{ks} = c(t - \overline{t} - r_s)$ при всех остальных значениях индекса суммирования k, где r_s — то же, что и в формуле (3.33), поскольку точечный прогноз $x^*(t)$ является несмещенным, асимптотически нормальным, а его дисперсия оценивается согласно (3.35) так:

$$D^*(x^*(t)) = (\sigma^*)^2 \sum_{k=1}^{n} w_{ks}^2 \ .$$

Начнем с прогноза на январь 2006 г. (по данным за 2003–2005 гг.). Тогда $t = 13$, $s = 1$, $r_1 = -1,5$, $w_{k1} = 8c_k + \frac{1}{3}$, если $k \in \{1 + 4(j - 1), j = 1, 2, 3\}$, и $w_{k1} = 8c_k$ при всех остальных значениях индекса суммирования. При этом

$$8c_k = 8\frac{k-6,5}{143} = \frac{8k-52}{143} .$$

Расчет удобно проводить с помощью таблицы (табл.3.12).

Таблица 3.12

Расчет дисперсии прогностической функции

k	$\frac{8k-52}{143}$	$1/m$	w_{k1}	w_{k1}^2
1	–0,3077	0,3333	0,0256	0,00066
2	–0,2517	—	–0,2517	0,06336
3	–0,1958	—	–0,1958	0,03834
4	–0,1399	—	–0,1399	0,01957
5	–0,0839	0,3333	0,2494	0,06220
6	–0,0280	—	–0,0280	0,00078
7	0,0280	—	0,0280	0,00078
8	0,0839	—	0,0839	0,00700
9	0,1399	0,3333	0,4732	0,22392
10	0,1958	—	0,1958	0,03834
11	0,2517	—	0,2517	0,06336
12	0,3077	—	0,3077	0,09468

Сумма значений, стоящих в последнем столбце табл.3.12, равна 0,61299. Согласно формуле (3.36)

$$\Delta(13) = U(0,95)\sqrt{D^*(x^*(13))} = 1,96 \times 385,7 \times \sqrt{0,61299} = 591,88 .$$

Согласно (3.31) точечный прогноз таков:

$$x^*(13) = a^*(13-\overline{t}) + d^* + f^*(13) =$$

$$212,26 \times 13 + 2587,48 + (-376) = 4971 .$$

Нижняя и верхняя доверительные границы для прогностической функции (с учетом как трендовой, так и периодической составляющих) имеют вид:

$$x_{нижн}(13) = 4971 - 592 = 4379, \quad x_{верх}(13) = 4971 + 592 = 5563 .$$

Реальное значение (табл.3.7) — 4336. Оно практически совпадает с прогнозным значением $x_{нижн}(13)$. Прогноз оправдался.

Аналогичные расчеты для апреля 2006 г. (t = 14, s = 2, r_2 = –0,5) дают

$$\Delta(14) = 1,96 \times 385,7 \times \sqrt{0,72480} = 643,60 .$$

Точечный прогноз равен $x^*(14)$ = 6092, а нижняя и верхняя доверительные границы таковы: $x_{нижн}(14)$ = 5448, $x_{верх}(14)$ = 6736. Реальное значение (табл.3.7) — 5430. Оно практически совпадает с прогнозным значением $x_{нижн}(14)$. Как и в предыдущем случае, прогноз оправдался.

Как показано в настоящей главе, метод наименьших квадратов — мощный инструмент организационно-экономического моделирования. Этот раздел эконометрики приносит ощутимую пользу экономистам и управленцам (менеджерам).

Литература

1. *Бобровиков В.* STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов. 2-е изд. — СПб.: Питер, 2003. — 688 с.

2. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

3. Кендэл М. Ранговые корреляции. — М.: Статистика, 1975. — 216 с.

4. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть I. — М.-Л.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. — 432 с.

5. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 648 с.

6. *Красильников В.В.* Статистика объектов нечисловой природы. — Набережные Челны: Изд-во Камского политехнического института, 2001. — 144 с.

7. *Крюкова Е.М.* Применение методов организационно-экономического прогнозирования в отрасли лома черных металлов / Заводская лаборатория. 2008. Т.74. №7. С.67– 72.

8. *Майстров Л.Е.* Теория вероятностей: Исторический очерк. — М.: Наука, 1967. — 320 с.

9. *Макаров Л.П.* Образование и потребление лома черных металлов / Рынок вторичных металлов. — 2003. №5. С. 7–9.

10. *Медведев В.Н., Орлов А.И.* Программно-алгоритмическое обеспечение статистических методов в САПР стандартов. — В сб.: Тезисы докладов III Всесоюзной школы-семинара “Программно-алгоритмическое обеспечение прикладного многомерного статистического анализа”. — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1987. — С. 313–314.

11. *Муравьева В.С.* Точка встречи: асимптотическое распределение уровня качества и временного лага / Заводская лаборатория. 2008. Т.74. №3. С.70–73.

12. *Муравьева В.С., Орлов А.И.* Организационно-экономические проблемы прогнозирования на промышленном предприятии/ Управление большими системами. Выпуск 17. — М.: ИПУ РАН, 2007. — С.143–158.

13. *Муравьева В.С., Орлов А.И.* Непараметрическое оценивание точки пересечения регрессионных прямых / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т.74. №1. С.63–68.

14. *Орлов А.И.* Оценка размерности модели в регрессии. — В сб.: Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. Ученые записки по статистике, т.36. — М.: Наука, 1980. — С.92–99.

15. *Орлов А.И.* Асимптотика некоторых оценок размерности модели в регрессии. — В сб.: Прикладная статистика. Ученые записки по статистике, т.45. — М.: Наука, 1983. — С.260–265.

16. *Орлов А.И.* Метод оценивания длины периода и периодической составляющей сигнала. — В сб.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. — Пермь: Изд-во Пермского государственного университета, 1999. — С.38–49.

17. *Орлов А.И.* Эконометрика. Изд. 3-е, перераб. и дополн. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

18. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М. : Экзамен, 2006. — 671 с.

19. *Орлов А.И.* Статистические методы прогнозирования. — В кн.: Малая российская энциклопедия прогностики. — М.: Институт экономических стратегий, 2007. — С.148–153.

20. *Орлов А.И.* Непараметрический метод наименьших квадратов: учет сезонности. — В сб.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. Вып.21. — Пермь: Перм. ун-т, 2008. — С.135–148.

21. *Плотников А.Ю.* Базисные условия поставки международных контрактов Инкотермс–2000. — Экономика, 2002.

22. Практикум по эконометрике: Учеб. пособие / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко и др.; Под ред. И.И. Елисеевой. — М.: Финансы и статистика. 2001. — 192 с.

23. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980. — 456 с.

24. *Сидельников Ю.В., Танасова А.С.* Прогнозирование знака разности между ценой металла и форвардного контракта на него (на примере меди, алюминия, никеля) / Заводская лаборатория. 2006. №11. С. 59–65.

25. *Супрун И.В.* Российский рынок лома и прогноз цен на 2007 год / Рынок вторичных металлов. — 2005. №6. С. 10–13.

26. *Robinson D.E.* Estimates for the points of intersection of two polynomial regressions / Journal of American Statistical Association. 1964. V.19. N 2. P.214–238.

Контрольные вопросы и задачи

1. Имеются данные за несколько лет о торговом обороте Y западногерманского предприятия и его расходах на рекламу X. Данные представлены в табл. 3.13.

Таблица 3.13

Расходы на рекламу и торговый оборот предприятия.

Годы, t	68	69	70	71	72	73	74	75
Расходы на рекламу $X(t)$, тыс. марок	4	4	5	6	8	8	10	11
Торговый оборот $Y(t)$, млн.марок	4	5	6	6	8	10	12	13

С помощью метода наименьших квадратов определите коэффициенты линейной регрессии $Y = aX + b$. Постройте график (заданные точки (x_i, y_i) и прямую $Y = a^*X + b^*$). Найдите доверительные границы для регрессионной зависимости (при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$). Нанесите доверительные границы на график. Сделайте точечный и интервальный прогноз для торгового оборота при расходах на рекламу, равных 15 (тыс. марок ФРГ).

Аналогичным образом изучите зависимости расходах на рекламу X и торгового оборота Y от времени t (за начало отсчета целесообразно взять 1971 год).

2. Исходные данные (табл.3.14) — набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1,2,...,n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции). Предполагается, что переменные связаны зависимостью

$$x_k = a\, t_k + b + e_k,\ k = 1, 2, ..., n,$$

где a и b — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость.

Таблица 3.14

Исходные данные для расчетов по методу наименьших квадратов

t_k	1	3	4	7	9	10
x_k	12	20	20	32	35	42

Методом наименьших квадратов оцените параметры a и b линейной зависимости. Выпишите восстановленную зависимость.

Вычислите восстановленные значения зависимой переменной, сравните их с исходными значениями (найдите разности) и проверьте условие точности вычислений (при отсутствии ошибок в вычислениях сумма исходных значений должна равняться сумме восстановленных).

Найдите остаточную сумму квадратов и оцените дисперсию погрешностей.

Выпишите точечный прогноз, а также верхнюю и нижнюю доверительные границы для него (для доверительной вероятности 0,95).

Рассчитайте прогнозное значение и доверительные границы для него для момента $t = 12$.

Как изменятся результаты, если доверительная вероятность будет увеличена? А если она будет уменьшена?

3. Покажите, что формулы (3.1), (3.3) и (3.4) задают одну и ту же оценку a^* параметра a.

4. Выведите формулы расчета асимптотических доверительных границ для параметров a и d (с заменой в выражениях для дисперсий оценок a^* и d^* неизвестной величины σ^2 на ее состоятельную оценку).

5. Разработайте методы проверки статистических гипотез о равенстве параметров a и d определенным значениям, прежде всего 0.

6. Как в методе наименьших квадратов используются преобразования переменных?

7. Как связаны коэффициент линейной корреляции Пирсона и непараметрический коэффициент ранговой корреляции Спирмена?

8. Как метод наименьших квадратов используется для прогнозирования цен в отрасли лома черных металлов?

9. Как метод линеаризации позволяет построить доверительный интервал для точки пересечения двух регрессионных прямых?

10. Сравните модели порождения данных при наличии периодической составляющей (разд.3.7) и без таковой (разд.3.1). Что при расчетах по методу наименьших квадратов является общим и в чем проявляется различие?

11. Примените методы раздела 3.7 к данным табл.3.4 (шесть вариантов — соответственно зависимым переменным X1 — X6). Образец расчетов приведен в примере в конце раздела 3.7.

Темы докладов, рефератов, исследовательских работ

1. Примеры практического использования метода наименьших квадратов.

2. Для непараметрической модели метода наименьших квадратов в случае линейной функции одной переменной разработайте алгоритмы

а) расчета доверительных границ для коэффициентов модели;

б) проверки гипотез относительно этих коэффициентов.

3. Докажите, что сумма исходных значений зависимой переменной должны быть равна сумме восстановленных значений.

4. Критерии качества регрессионной модели.

5. Доказательство теоремы о предельном геометрическом распределении первого локального минимума остаточной дисперсии как оценки степени многочлена, описывающего зависимость.

6. Состоятельные оценки степени многочлена, описывающего регрессионную зависимость.

7. Использование непараметрических оценок плотности для восстановления зависимости.

8. Статистические методы прогнозирования и роль в них метода наименьших квадратов (на основе [19]).

9. Разработайте способы проверки условий применимости методов раздела 3.7 (условий (3.24)). Для этого изучите распределение случайной величины

$$Z = \frac{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t})f^*(t_k)}{\sum_{k=1}^{n}(t_k - \overline{t})^2}.$$

Докажите асимптотическую нормальность случайной величины Z, найдите ее математическое ожидание и дисперсию, проведите вычисления для данных табл. 3.9.

10. Методы выявления информативного подмножества признаков в регрессионном анализе (на основе [23]).

11. Проблема мультиколлениарности в регрессионном анализе (на основе [23]). (Мультиколлинеарность (multicollinearity) — ситуация, при которой одна или более независимых переменных, входящих в уравнение регрессии, являются точными линейными функциями от одной или более других независимых переменных того же уравнения. При приближении к такой ситуации оценки параметров модели становятся неустойчивыми. Чтобы сделать их более устойчивыми, применяют специальные приемы, например, гребневую регрессию.)

12. Варианты метода наименьших квадратов в нелинейных (по параметрам) моделях.

13. Применение матричной алгебры в линейном регрессионном анализе.

14. Регрессионный анализ в статистике нечисловых данных.

15. Регрессионный анализ интервальных данных.

16. Регрессионный анализ нечетких переменных (см. Приложение 2 к настоящему учебнику).

Глава 4

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНФЛЯЦИИ

Каждый день мы встречаемся с такими экономическими величинами, как цены на товары и услуги. Как правило, они изменяются с течением времени. Вполне естественно подвергнуть динамику цен на товары и услуги анализу с позиций организационно-экономического моделирования и эконометрики.

Под инфляцией в настоящей главе, как и в учебнике [17], понимаем повсеместно наблюдаемый рост цен. Как следствие, покупательная способность денежных единиц (рублей, евро, долларов США и др.) падает. Следовательно, при анализе экономических процессов, протяженных во времени, при сравнении стоимостных характеристик необходимо переходить к сопоставимым ценам. Это невозможно сделать без расчета индекса роста цен, т.е. индекса инфляции. Проблема состоит в том, что цены на разные товары растут с различной скоростью, и необходимо эти скорости усреднять. Продемонстрируем свойства индекса инфляции и алгоритмы его расчета на примере минимальной потребительской корзины продовольственных товаров, которая была разработана в Институте высоких статистических технологий и эконометрики на основе физиологических норм потребления. Затем разберем различные применения индексов инфляции в экономических расчетах.

4.1. Определение и расчет индекса инфляции

Краткая история инфляции в России на рубеже тысячелетий. Цены на продовольственные товары (хлеб, молоко и т.п.) в СССР определялись государственными органами и не менялись в течение десятилетий — с начала 60-х. Конец этого периода — 2 апреля 1991 г., когда Постановлением Правительства СССР цены на основные потребительские товары были подняты в 2–3 раза. По сообщению Государственного комитета по статистике, к концу 1991 г. (к моменту развала СССР) цены выросли в 2,6 раза. Со 2 января 1992 г. началась — уже в Российской Федерации — т.н. «либерализация цен», в ходе которой торговые организации стали самостоятельно устанавливать цены. В результате за год цены выросли в 26,1 раз. С тех пор рост цен не прекращался. К июлю 2007 г. цены выросли примерно в 60 000 раз, а к декабрю 2008 г. — в 100 000 раз. Однако в январе 1998 г. была проведена т.н. «деноминация», во всех записях стоимостных характеристик были отброшены три нуля, т.е. цены (и доходы) формально уменьшились в 1000 раз. Как следствие, цены июля 2007 г. в 60 раз превышают цены марта 1991 г. (и предыдущих лет), а цены декабря 2008 г. — соответственно в 100 раз.

Итак, цены к июлю 2007 г. выросли в 60 раз, т.е. покупательная способность рубля сократилась в 60 раз. Другими словами, 60 руб. июля 2007 г. соответствуют 1 руб. 1990 г. Это простое соотношение позволяет сопоставлять доходы и расходы, разделенные 17 годами.

Замечание. С течением времени любая конкретная дата уходит в прошлое. А вместе с ней — и все конкретные численные значения экономических величин. Примем для сравнения цен март 1991 г. и июль 2007 г. Первая из этих дат — конец стабильности цен в СССР, вторая — начало мирового экономического кризиса, прервавшего рост российской экономики в период стабильности (1999– 2007). Читатель сможет перейти к интересующему его моменту с помощью эконометрических методов, разобранных в настоящей главе.

Пример приведения к сопоставимым ценам. Рассмотрим часто обсуждаемый экономический показатель — среднюю заработную плату в России. По данным государственных статистических органов средняя заработная плата в 1990 г. составляла 303 руб., а в апреле 2007 г. — 12510 руб. Рост в 41,29 раза. Однако цены выросли в 60 раз, поэтому нынешние 12510 руб. соответствуют $12510/60 = 208{,}50$ руб. 1990 г., т.е. в настоящее время реальная средняя заработная плата составляет $208{,}50/303 \times 100\% = 68{,}81\%$ от уровня 1990 г., другими словами, сократилась в 1,45 раза. При этом способе расчета мы привели данные 2007 г. к сопоставимым ценам 1990 г.

Можно поступить и противоположным образом — привести данные 1990 г. к сопоставимым ценам 2007 г. А именно, если проиндексировать заработную плату 1990 г., т.е. умножить ее на индекс инфляции, показывающий рост цен (в рассматриваемом случае — на 60), то получим $303 \times 60 = 18180$ руб. — вот такой должна была бы быть средняя заработная плата в 2007 г., если бы она росла теми же темпами, как и цены. Проиндексированная заработная плата в $18180/12510 = 1{,}45$ раз выше реально начисленной, т.е. реальная средняя заработная плата уменьшилась за 17 лет в 1,45 раз, как и было получено при предыдущем расчете.

Рост цен для различных товаров и услуг. Цены на те или иные товары и услуги растут с различной скоростью. Например, в табл.4.1 приведены данные о ценах на несколько видов товаров и услуг.

Таблица 4.1

Примеры цен (в руб.) товаров и услуг в 1990 и 2007 гг. (Москва)

№	Наименование товара (услуги)	Цены		Рост цен
		1990	2007	
1	Одна поездка в метро	0,05	17,00	340
2	Батон белого хлеба «Нарезной»	0,13	9,50– 11,80	73– 91
3	Газета	0,03	2,00– 6,60	67– 220
4	Водка среднего качества (0,5 л)	10–00	80,00– 120,00	8– 12
5	Электроэнергия (1 квт-ч)	0,04	2,08	52

Наблюдаем значительное различие в темпах роста цен — в десятки раз. Поэтому для получения сводного показателя необходимо усреднять темпы роста цен для отдельных товаров и услуг. Этот факт подчеркивает и названия рассматриваемых в настоящей главе показателей — индексы инфляции, индексы потребительских цен. Введем используемые в дальнейшем понятия.

Индексы и их применение. Индекс (лат. *index* — показатель, список) — это статистический относительный показатель, характеризующий соотношение во времени (динамический индекс) или в пространстве (территориальный индекс) социально-экономических явлений. Речь идет о ценах на товары и услуги, объемах производства, себестоимости, объемах продаж и др. Индексы делятся на индивидуальные и сводные. Так, индивидуальный динамический индекс описывает изменение тех или иных явлений во времени. Например, изменения цены на отдельный товар, объема выплавки стали, урожайности картофеля. Для вычисления индивидуального индекса значение измеряемой величины в текущем периоде делят на ее значение в базисном периоде. Сводный индекс служит для сопоставления непосредственно несоизмеримых, разнородных явлений. Например, объемов продаж различных продовольственных товаров (в килограммах). Для требуемого сопоставления необходимо составные элементы несоизмеримых явлений сделать соизмеримыми, выразив их общей мерой: стоимостью, трудовыми затратами и т.д. Сводные индексы обычно имеют один из трех видов:

$$I_1 = \frac{\sum x_1 f_0}{\sum x_0 f_0}, \qquad I_2 = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1}, \qquad I_3 = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_0},$$

где x — индексируемая величина, f — веса индексов, 0 и 1 — знаки соответственно базисного и текущего периодов, суммирование ведется по одному и тому же множеству «индексов суммирования» [27, с.154]. (Обратите внимание на то, что в статистических методах согласно традиции термин «индекс» может использоваться во многих разных смыслах.) Таким образом, индексы зависят от двух переменных — индексируемой величины x и весов индексов f.

Определение понятия «Индекс инфляции». В качестве примера построения и использования индексов рассмотрим индекс потребительских цен, он же — индекс инфляции.

Наблюдаем, что цены на различные товары меняются поразному. Как усреднить темпы роста цен? Одна из основных проблем в современной экономике — проблема агрегирования с целью сжатия информации (см., например, монографию [15]). Как свести к одной величине темпы роста цен различных товаров и услуг?

Уровень цен выражается в виде индекса. Он является измерителем соотношения между совокупной ценой определенного набора товаров, называемого «рыночной корзиной» (или «потребительской корзиной»), для данного (текущего) момента времени, и совокупной ценой идентичной либо сходной группы товаров в базовый момент времени.

Первое, что приходит в голову — усреднить индексы для отдельных товаров и услуг. Но какое среднее взять? Среднее арифметическое? Среднее геометрическое? Среднее гармоническое? Среднее квадратическое? В экономике используется много различных видов средних (см., например, главу 6 ниже). Опишем наиболее распространенный подход.

Рассмотрим конкретного покупателя товаров и услуг, т.е. конкретного экономического субъекта: физическое лицо, домохозяйство или фирму. Он покупает не один товар, а много. Обозначим через n количество типов товаров или услуг (далее кратко — товаров), которые он хочет и может купить. Пусть

$$Qi = Qi(t),\ i=1,2,\ldots,n,$$

— объемы покупок этих товаров в момент времени t по ценам:

$$pi = pi(t),\ i=1,2,\ldots,n$$

(имеется в виду цена за единицу измерения соответствующего товара, например, за штуку или килограмм…).

Подход к измерению роста цен основан на выборе и фиксации потребительской корзины $(Q_1(t),\ Q_2(t),\ \ldots,\ Q_n(t))$, ***не меняющейся со временем,*** т.е. $(Q_1(t),\ Q_2(t),\ \ldots,\ Q_n(t)) \equiv (Q_1,\ Q_2,$

…, Q_n). Стоимость $S(t)$ потребительской корзины в момент времени t такова:

$$S(t)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n} p_i(t)Q_i\,.$$

Затем необходимо сравнить стоимости $S(t_1)$ и $S(t_2)$ потребительской корзины (Q_1, Q_2, …, Q_n) в старых $p_i(t_1)$, $i=1,2,\ldots,n$, и новых $p_i(t_2)$, $i=1,2,\ldots,n$, ценах.

Определение. *Индексом инфляции называется*

$$I(t_1,t_2)=\frac{S(t_2)}{S(t_1)}=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} p_i(t_2)Q_i}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} p_i(t_1)Q_i}\,.$$

Здесь индексируемая величина — цены, а весами служат объемы потребления, зафиксированные в принятой исследователем потребительской корзине.

С математической точки зрения индекс инфляции — это функция двух переменных, а именно, двух моментов времени — начального, или базового, момента t_1 и конечного, или текущего, момента t_2. Когда говорят об инфляции за определенный промежуток времени, то t_1 — начало этого промежутка (года, месяца), а t_2 — его конец. Обычно $t_1 < t_2$, хотя в приведенном определении это не требуется.

Подчеркнем, что каждой конкретной потребительской корзине соответствует свой индекс инфляции. Потребительская корзина — это *инструмент экономиста*, предназначенный для усреднения индивидуальных индексов инфляции

$$I(t_1,t_2)=\frac{p_i(t_2)}{p_i(t_1)},\quad i=1,2,\ldots,n\,,$$

— темпов роста цен отдельных товаров (услуг). Потребительская корзина не имеет отношения к реальному потреблению экономического субъекта. В частности, структура реального потребления в соответствии с законом Энгеля меняется в зависимости от дохода этого субъекта, в то время как потребительская корзина, используемая для расчета индекса инфляции, зафиксирована и никак не связана с доходом субъекта.

Обсудим подробнее различие понятий «реальное потребление» и «фиксированная потребительская корзина, используемая при расчете индекса инфляции». Расходы на покупки товаров и услуг некоторого экономического субъекта

$$C = C(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t) Q_i(t)$$

следует сопоставлять с его доходом D. Если $D - C > 0$, то экономическое положение субъекта благоприятно, его доход больше расходов. Если же $D - C < 0$, то его положение неблагоприятно, доход меньше расходов. Это означает, что он расходует ранее накопленные средства, делает долги (в частности, берет кредиты) и т.д.

Из сказанного вытекает, что величина расходов $C(t)$ обязательно регулируется экономическим субъектом в соответствии с его доходом. Изменение (рост) цен $pi(t)$ с течением времени t делает невозможным сохранение прежней структуры потребления (Q_1, Q_2, …, Q_n), если рост дохода отстает от роста цен. Структура потребления изменяется, сокращается потребление относительно дорогих товаров и услуг, в порядке компенсации увеличивается потребление относительно дешевых. Например, уменьшается потребление мяса и увеличивается — хлеба и картофеля. При быстром росте цен возможен и другой эффект — «бегство от рубля». В связи с обесцениванием сбережений экономические субъекты направляют доход на текущее потребление, ценой отказа от накопления средств на приобретение дорогостоящих товаров длительного пользования.

Таким образом, реальное потребление товаров и услуг определяется как действующими ценами, так и величиной доходов экономических субъектов. Чтобы измерять рост цен, нужно избавиться от влияния изменения доходов. Именно для этого зафиксирована потребительская корзина, используемая для измерения инфляции.

Замечание. Приведем выписку из «Экономического словаря» (http://abc.informbureau.com). «Закон Энгеля — зависимость доли расходов на продукты питания в доходах семьи от их уровня, установленная в XIX в. немецким статистиком и экономистом Эрнстом Энгелем (1821–1896). Согласно этому закону по мере роста доходов семьи падает доля расходов на продовольствие, почти не меняется удельный вес затрат на жилище, отопление, освещение, одежду; зато растет доля расходов на прочие нужды (прежде всего на сбережения) Выведенная Энгелем эмпирическая зависимость подтверждается длительным опытом экономического развития. Статистические ряды показывают, что в структуре расходов американских семей за 1909–1985 гг. устойчиво снижается доля физических и материально-вещественных потребностей (продуктов питания — на 35%, расходов на жилище — на 5,5%, предметов домашнего обихода — на 26%, расходов на одежду и обувь — на 47%). В то же время систематически возрастает удельный вес более высоких «гуманитарных» потребностей в образовании, медицинском обслуживании, организации досуга и отдыха. Об этом же свидетельствует и статистика семейных бюджетов в СССР (табл.4.2).

Таблица 4.2

Расходы на питание в СССР (1963 г.)

Совокупный доход в месяц (руб.)	Расходы на питание, %
До 75	51,5
75–100	42,7
100– 150	35,8
150–200	31,9
Свыше 200	28,4
Все семьи	34,3

Современная западная наука существенно дополнила развитые Энгелем положения, используя для этого новый аналитический аппарат. На основе формулы эластичности спроса по доходам подсчитано, что в конце 1980-х гг. в США с ростом дохода на 1% спрос на продукты питания возрастал на 0,77%, на одежду — на 0,32%, на транспортные средства — на 1,1%, на жилище — на 0,89%, на медицинские услуги — на 1,9%, на предметы роскоши — на 3,6%, на спортивные товары — на 3,7%, на услуги такси — на 2,8%»

(http://abc.informbureau.com/html/caeii_yiaaess.html)

Разброс цен в пространстве. В определении индекса инфляции участвуют цены $p_i(t)$. Однако цены меняются при переходе от одной торговой точки к другой. Это отражено и в табл.4.1. Два полностью идентичных батона хлеба могут продаваться по разной цене даже в соседних магазинах. Обсудим эффект разброса цен в пространстве и его учет при расчете индекса инфляции.

В конкретном акте купли-продажи цена товара или услуги полностью определена. Однако в современных условиях, когда в большинстве случаев продавец, а иногда и покупатель, могут влиять на цену товара или услуги, эта цена зачастую меняется от одного акта купли-продажи к другому. Можно выделить несколько вариантов.

1. Конкретный продавец меняет цену в зависимости от поведения конкретного покупателя. Пример: индивидуальный продавец на базаре.

2. В конкретном магазине цена фиксирована, но от магазина к магазину она меняется. Примеры: большинство товаров (продаваемых в магазинах и киосках), цены которых указаны для сведения покупателей.

3. Единые цены в регионе, например, на электроэнергию, услуги транспорта и почтовой связи.

В первом и втором случаях имеет быть разброс цен на однотипный товар. Этот эффект проявляется как и нашей стране, так и за рубежом. Например, в современной Франции цены на определенный товар в фешенебельных центральных магазинах и в окраинных непрестижных супермаркетах могут отличаться в несколько раз. Это — одно из проявлений так называемой «ценовой диверсификации».

Какие же цены использовать при расчете индекса инфляции? Возможны два подхода к проведению организационно-экономического исследования — средней цены и фиксированного маршрута.

Подход на основе средней цены предполагает проведение обширного статистического исследования, позволяющего с достаточной степенью точности установить распределение цены определенного товара (рассматриваемой как случайная величина). По распределению рассчитывается средняя цена. Нужные данные получают, например, в ходе проводимого органами Росстата бюджетного обследования нескольких тысяч семей, при котором ежедневно фиксируют все их расходы. Тогда достаточно получить среднее арифметическое всех цен при покупках рассматриваемого товара, осуществленных в определенный день, взвешивая их по объему покупок. В другом варианте планирования исследования на основе анализа расходов семей устанавливают доли покупок (по объему), приходящиеся на торговые организации различных типов (базары, магазины, супермаркеты и т.п.), а затем специально подготовленные наблюдатели снимают цены, действующие в этих торговых организациях.

Подход, основанный на использовании фиксированного маршрута, предполагает постоянное слежение за ценами в торговых точках, расположенных вдоль раз и навсегда выбранного маршрута (в идеальном варианте — в одном и том же магазине, в котором продаются все товары, включенные в потребительскую корзину). С помощью такой методики измерения удается избавиться от разброса цен в пространстве и сосредоточиться на изучении их динамики во времени. Именно так собирали цены сотрудники Института высоких статистических технологий и эконометрики, на основе исследовательского опыта которого подготовлен учебный материал, представленный в настоящей главе и — несколько подробнее — в учебнике [17, гл.7].

4.2. Практически используемые потребительские корзины и соответствующие индексы инфляции

Каждый человек, семья (домохозяйство), фирма, выбрав подходящую потребительскую корзину, может без больших трудозатрат оценивать влияние роста цен на свое экономическое положение (подробнее — в разделе 4.4 ниже).

Однако обычно индекс инфляции рассматривают для более или менее обширной совокупности экономических субъектов —

для жителей региона или страны, предприятий определенной отрасли и т.д. При этом потребительскую корзину (Q_1, Q_2, ..., Q_n) стараются приблизить к суммарным объемам потребления для рассматриваемой совокупности, а в качестве цен рассматриваются средневзвешенные цены в осуществленных актах купли-продажи.

Пример. В макроэкономике используют т.н. дефлятор валового внутреннего продукта (ВВП) — индекс цен на все произведенные в течение года конечные товары и услуги, составляющие объем ВВП, используемый для учета влияния инфляции на величину номинального ВВП. Номинальный ВВП исчисляется в текущих рыночных ценах. Чтобы определить реальную величину ВВП, необходимо выразить его в сопоставимых ценах базисного года. Для этого применяется индекс инфляции, который отражает изменение среднего уровня цен максимально широкой группы товаров и услуг (охватывающей все составляющие ВВП) за рассматриваемый период.

Согласно принятому определению, индекс инфляции определяется номенклатурой (т.е. набором, перечнем) товаров и услуг, для которых он вычисляется, объемами потребления и ценами этих товаров и услуг на начальный и на текущий моменты времени. Отсюда вытекает, в частности, что индекс инфляции для продовольственных товаров отличается, вообще говоря, от такового для промышленных товаров, для услуг и от индекса инфляции оптовых цен; индекс инфляции для москвича отличается от такового для жителя Краснодара (хотя бы потому, что климат различается, а потому и объем потребляемой энергии); индекс инфляции для машиностроительной продукции меняется от индекса инфляции в строительстве; этот индекс меняется в зависимости от индивидуальных структур потребностей в семьях и т.д. Для адекватного рассматриваемому экономическому субъекту определения индекса инфляции необходимо знать типовые объемы купли-продажи и цены в соответствующих актах купли-продажи, иначе можно говорить только о той или иной оценке этого индекса.

Конкретизация задачи вычисления индекса инфляции. Прежде всего необходимо сформулировать цель экономического анализа роста цен. Будем ориентироваться на положение основной массы населения. Это означает, в частности, что персональные компьютеры (в 2001 г. их имели 6% российских семей) и автомашины иностранных марок (в 2001 г. их имели 0,5% российских семей) в потребительскую корзину, предназначенную для использования на рубеже тысячелетий, включать нецелесообразно.

Как показывают бюджетные исследования, количество видов товаров и услуг, потребляемых физическими лицами, измеряется тысячами (а в классификаторах промышленной продукции указаны миллионы марок различных товаров). Поэтому первый шаг — ограничение номенклатуры товаров и услуг, используемых для вычисления индекса инфляции.

На рубеже тысячелетий существенная часть доходов населения России (зачастую не менее половины) идет на покупку продовольственных товаров (что по классическому закону Энгеля — см. также, например, учебник нобелевского лауреата по экономике П. Самуэльсона [25] — свидетельствует о сравнительно низком жизненном уровне). Поэтому представляется естественным рассчитать индекс инфляции для продовольственных товаров.

Потребительская корзина Центра экономической конъюнктуры. В первой половине 90-х годов Центр экономической конъюнктуры (ЦЭК) при Правительстве Российской Федерации и Государственный комитет Российской Федерации по статистике следили за движением цен по фиксированному набору товаров (табл.4.3), которые относительно постоянно бывают в магазинах (по различным причинам время от времени этот набор меняется).

Таблица 4.3

Объемы годового потребления продовольственных товаров (потребительская корзина Центра экономической конъюнктуры в сравнении с компонентами потребительской корзины ИВСТЭ)

№	Продукты питания, кг	Потребительские корзины	
		ЦЭК на 1993 г.	ИВСТЭ
1	Хлеб ржаной	92,0	65,3
2	Хлеб пшеничный	86,7	59,8

№	Продукты питания, кг	Потребительские корзины	
		ЦЭК на 1993 г.	ИВСТЭ
3	Пшено	18,1	4,9
4	Вермишель	7,3	4,9
5	Сахар	24,8	19,0
6	Масло растительное, л	10,0	3,8
7	Масло животное	3,6	2,5
8	Говядина	42,0	4,4
9	Колбаса вареная	2,2	0,7
10	Колбаса полукопченая	1,1	0,7
11	Молоко, л	184,3	110,0
12	Сметана	4,2	1,6
13	Сыр твердый	2,0	2,3
14	Яйца, шт.	183	152
15	Картофель	146,0	124,2
16	Капуста свежая	29,8	30,4
17	Лук репчатый	10,2	27,9
18	Яблоки	11,0	15,1
19	Сигареты, пачки	96	-

Потребительская корзина Института высоких статистических технологий и эконометрики (ИВСТЭ) на основе данных Института питания РАМН. Однако приведенный в табл.4.3 набор ЦЭК не полностью соответствует перечню продуктов питания, рекомендованному медиками. И дело не только в сигаретах.

Рассмотрим минимальную потребительскую корзину физиологически необходимых продовольственных товаров, разработанную в 1993 г. Институтом высоких статистических технологий и эконометрики на основе исходных данных Института питания Российской академии медицинских наук (РАМН). Эти данные использовались также Министерством труда Российской Федерации. Рассматриваемую минимальную потребительскую корзину обозначим сокращенно «корзина ИВСТЭ». В отличие от приведенной выше корзины Центра экономической конъюнктуры в ней содержание белков, жиров и углеводам соответствует (минимальным) медицинским нормам. В корзине ИВСТЭ продукты питания разделены на 11 групп:

1. Хлеб и хлебопродукты;
2. Картофель;
3. Овощи;
4. Фрукты и ягоды;
5. Сахар;
6. Мясопродукты;
7. Рыба и рыбопродукты;
8. Молоко и молочные продукты;
9. Яйца;
10. Масло растительное и маргарин;
11. Прочие.

Общая стоимость «прочих» видов продуктов — до 6% от стоимости первых 10 групп продуктов данной потребительской корзины.

На основе физиологических норм потребления Института питания РАМН в ИВСТЭ составлена минимальная потребительская корзина, т.е. указан годовой объем потребления по основным продовольственным товарам, необходимый для поддержания нормальной жизнедеятельности человеческого организма (табл.4.4). При разработке корзины специалисты Института питания исходили из трех принципов:

1. Суммарное содержание белков, жиров, углеводов и калорий должно быть не менее нормативов, определяющих согласно науке о питании (как части медицины) возможность продолжения существования человеческого организма без физиологического вырождения.
2. На основе включенных в корзину продуктов может быть разработано меню трехразового питания на год.
3. Стоимость корзины должна быть минимальна.

Первый и третий принципы позволяют сформулировать задачу оптимизации (линейного программирования). Ее решение таково (в расчете на день): 812 г черного хлеба, 705 г картофеля, 180 г молока и 10 г сыра. Хотя этот набор продуктов обеспечивает необходимое количество белков, жиров, углеводов и калорий, ежедневно питаться таким образом невозможно. Второй принцип обеспечивает человека полноценным трехразовым питанием. Но стоимость корзины возрастает примерно на четверть.

Потребительская корзина, представленная в табл.4.4, не описывает реальное потребление большинства граждан. Например, типовой москвич покупает значительно больше колбасы, сала, копченостей, чем включено в корзину, и в несколько раз меньше муки. Корзина табл.4.4 предназначена прежде всего для измерения инфляции. Однако еще одно ее использование — оценка (снизу) минимально допустимых расходов на продовольственные товары, обеспечивающих нормальную жизнедеятельность человеческого организма. Таковы расходы в некоторых закрытых учреждениях — больницах, тюрьмах, приютах, домах престарелых.

Таблица 4.4

Номенклатура, годовые нормы потребления и цены для потребительской корзины ИВСТЭ

Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 14.03.91	Цена на 14.03.94	Рост цен, раз
1. Хлеб и хлебопродукты				
1.1 Мука пшеничная	18,5	0–46	646	1404
1.2 Рис	3,5	0–88	620	705
1.3 Другие крупы	4,9	0–62	750	1210
1.4 Хлеб пшеничный	59,8	0–50	720	1440
1.5 Хлеб ржаной	65,3	0–20	390	1950
1.6 Макаронные изделия	4,9	0–70	1200	1714
2. Картофель	124,2	0–10	490	4900
3. Овощи				
3.1 Капуста	30,4	0–20	500	2500
3.2 Огурцы и помидоры	2,8	0–85	2500	2941
3.3 Столовые корнеплоды	40,6	0–20	450	2250
3.4 Прочие (лук и др.)	27,9	0–50	900	1800
4. Фрукты и ягоды				
4.1 Яблоки свежие	15,1	1–50	960	640
4.2 Яблоки сушены	1,0	3–00	1900	633
5. Сахар и кондитерские изделия				

Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 14.03.91	Цена на 14.03.94	Рост цен, раз
5.1 Сахар	19,0	0–90	650	722
5.2 Конфеты	0,8	4–50	3500	778
5.3 Печенье и торты	1,2	1–40	14700	3357
6. Мясо и мясопродукты				
6.1 Говядина	4,4	2–00	2700	1350
6.2 Баранина	0,8	1–80	1940	1078
6.3 Свинина	1,4	2–00	2300	1150
6.4 Субпродукты (печень)	0,5	1–40	3500	2500
6.5 Птица	16,1	2–40	2600	1083
6.6 Сало	0,7	2–40	3300	1375
6.7 Копчености	0,7	3–70	15000	4054
7. Рыба и рыбопродукты				
7.1 Свежая (минтай)	10,9	0–37	2200	5946
7.2 Сельди	0,8	1–40	2500	1786
8. Молоко и молочные продукты				
8.1 Молоко, кефир, л	110,0	0–32	520	1625
8.2 Сметана, сливки	1,6	1–70	2500	1471
8.3 Масло животное	2,5	3–60	4000	1111
8.4 Творог	9,8	1–00	2000	2000
8.5 Сыр и брынза	2,3	3–60	6000	1667
9. Яйца, шт.	152,0	0–09	100	1111
10. Масло растительное, маргарин				
10.1 Масло растительное, л	3,8	1–80	2000	1111
10.2 Маргарин	6,3	1–20	2000	1667
11. Прочие (6% от стоимости товаров групп 1–10)				

Примечание. Пункт 1.3 — геркулес (в этой таблице и далее).

Расчет стоимости минимальной потребительской корзины продовольственных товаров. Чтобы получить индекс инфляции, рассчитаем стоимость минимальной потребительской корзины продовольственных товаров, исходя из объемов потребления, заданных в разработках Института питания, и цен по состоянию на март 1991 г. (т.е. до первого значительного повышения цен в апреле 1991 г. и их «либерализации» в январе 1992 г.) и — в качестве примера — на март 1994 г. (очевидно, расчеты могут быть проведены и на любой иной момент времени) с целью установить динамику цен за полные три года.

Исходные данные для расчета приведены в табл.4.4. Мы видим, что темпы роста цен на различные продукты питания существенно отличаются друг от друга. Минимальный рост цен — в 633 раза (яблоки сушеные), максимальный — в 5946 раз (минтай).

Для нахождения расходов на определенные продукты питания (в расчете на год) достаточно умножить цены на объемы потребления, как это сделано в табл.4.5. Там же приведены годовые расходы для каждой из 11 товарных групп.

Таблица 4.5

Годовые расходы на покупку продуктов, в рублях

Наименование продуктов питания и групп продуктов	Годовые расходы по ценам на 14.03.91	Годовые расходы по ценам на 14.03.94
1. Хлеб и хлебопродукты		
1.1 Мука пшеничная	8–51	11951
1.2 Рис	3–08	2170
1.3 Прочие крупы	3–04	3675
1.4 Хлеб пшеничный	29–90	43056
1.5 Хлеб ржаной	13–06	25467
1.6 Макаронные изделия	3–43	5880
Всего по группе 1:	61–02	92199
2. Картофель	12–42	60858
3. Овощи		
3.1 Капуста	6–08	15200
3.2 Огурцы и помидоры	2–38	7000
3.3 Столовые корнеплоды	8–12	18270
3.4 Прочие (лук и др.)	13–95	25110
Всего по группе 3:	30–53	65580
4. Фрукты и ягоды		

Наименование продуктов питания и групп продуктов	Годовые расходы по ценам на 14.03.91	Годовые расходы по ценам на 14.03.94
4.1 Яблоки свежие	22–65	14496
4.2 Яблоки сушеные	3–00	1900
Всего по группе 4:	25–65	16396
5. Сахар и кондитерские изделия		
5.1 Сахар	17–10	12350
5.2 Конфеты	3–60	2800
5.3 Печенье и торты	1–68	5640
Всего по группе 5:	22–38	20790
6. Мясо и мясопродукты		
6.1 Говядина	8–80	11880
6.2 Баранина	1–44	1552
6.3 Свинина	2–80	3220
6.4 Субпродукты (печень)	0–70	1750
6.5 Птица	38–64	41860
6.6 Сало	1–68	2310
6.7 Копчености	2–59	10500
Всего по группе 6:	56–65	73072
7. Рыба и рыбопродукты		
7.1 Свежая (минтай)	4–03	23980
7.2 Сельди	1–12	2000
Всего по группе 7:	5–15	25980
8. Молоко и молочные продукты		
8.1 Молоко, кефир	35–20	57200
8.2 Сметана, сливки	2–72	4000
8.3 Масло животное	9–00	10000
8.4 Творог	9–80	19600
8.5 Сыр и брынза	8–28	13800
Всего по группе 8:	65–00	104600
9. Яйца	13–68	15200
10. Масло растительное, маргарин		

Наименование продуктов питания и групп продуктов	Годовые расходы по ценам на 14.03.91	Годовые расходы по ценам на 14.03.94
10.1 Масло растительное 10.2 Маргарин Всего по группе 10:	6–84 7–56 14–40	7600 12600 20200
Всего по 10 группам:	306–89	490675
11. Прочие (6% от стоимости товаров групп 1–10)	18–41	29441
Суммарная стоимость минимальной потребительской корзины продуктов питания в расчете на год	325–30	520116
Ее стоимость в расчете на месяц	27–11	43499

Как вытекает из табл.4.5, индекс инфляции (роста цен) по продуктам питания исходя из минимальной потребительской корзины ИВСТЭ, составленной по физиологическим нормам потребления продуктов питания для города Москвы (согласно разработкам Института питания РАМН и Министерства труда РФ), за три года (14.03.91– 14.03.94) составил (520116–00) / (325–30)= 1598,88 или 159788 %.

Таблицы типа приведенных выше табл.4.4 и 4.5 могут быть составлены любым исследователем (студентом, менеджером или иным заинтересованным гражданином, сотрудником той или иной фирмы, органа власти, профсоюзной организации) с целью изучения динамики реального экономического положения. В табл.4.6 приведены рассчитанные сотрудниками ИВСТЭ по независимо собранной информации значения стоимости потребительской корзины и индекса инфляции за 1991– 2007 гг.

Таблица 4.6

Стоимость потребительской корзины ИВСТЭ и индекс инфляции

№ п/п	Дата снятия цен t	Стоимость потребительской корзины S(t) (руб.)	Индекс инфляции I(31.03.91; t)
1	31.03.91	26.60	1.00
2	14.08.93	17,691.00	665.08

№ п/п	Дата снятия цен t	Стоимость потребительской корзины S(t) (руб.)	Индекс инфляции I(31.03.91; t)
3	15.11.93	28,050.00	1054.51
4	14.03.94	40,883.00	1536.95
5	14.04.94	44,441.00	1670.71
6	28.04.94	47,778.00	1796.17
7	26.05.94	52,600.00	1977.44
8	08.09.94	58,614.00	2203.53
9	06.10.94	55,358.00	2081.13
10	10.11.94	72,867.00	2739.36
11	01.12.94	78,955.00	2968.23
12	29.12.94	97,897.00	3680.34
13	02.02.95	129,165.00	4855.83
14	02.03.95	151,375.00	5690.79
15	30.03.95	160,817.00	6045.75
16	27.04.95	159,780.00	6006.77
17	01.06.95	167,590.00	6300.38
18	29.06.95	170,721.00	6418.08
19	27.07.95	175,499.00	6597.71
20	31.08.95	173,676.00	6529.17
21	28.09.95	217,542.00	8178.27
22	26.10.95	243,479.00	9153.35
23	30.11.95	222,417.00	8361.54
24	28.12.95	265,716.00	9989.32
25	01.02.96	287,472.55	10,807.24
26	05.03.96	297,958.00	11,201.43
27	05.04.96	304,033.44	11,429.83
28	08.05.96	305,809.55	11,496.60
29	05.06.96	302,381.69	11,367.73
30	03.07.96	306,065.21	11,506.21
31	03.08.96	308,963.42	11,615.17
32	07.09.96	288,835.07	10,858.46
33	01.10.96	278,235.35	10,459.98
34	05.11.96	287,094.77	10,793.04
35	04.12.96	298,024.76	11,203.94

№ п/п	Дата снятия цен t	Стоимость потребительской корзины S(t) (руб.)	Индекс инфляции I(31.03.91; t)
36	03.01.97	314,287.16	11,815.31
37	04.02.97	334,738.24	12,584.14
38	04.01.98	345.72	12.997
39	03.01.99	630.07	20.395
40	05.01.00	737.80	27.737
41	03.01.01	886.84	33.340
42	03.01.02	1051.79	39.541
43	03.01.03	1210.62	45.512
44	03.01.04	1355.91	50.974
45	14.05.2004	1369.10	51,470
46	11.01.05	1463.98	55.037
47	10.01.06	1525.62	57.354
48	26.11.06	1571.26	59,070
49	10.01.07	1580.89	59,432
50	02.07.07	1644.38	61,819
51	30.12.07	2286.54	85,960

Примечание. В табл.4.6 целая часть отделяется от дробной десятичной точкой, а запятая используется для деления числа по разрядам. Учитывается проведенная 01.01.98 деноминация рубля. Стоимость потребительской корзины приводится без включения группы «прочие».

4.3. Свойства индексов инфляции

Перед тем, как переходить к рассмотрению примеров использования индексов инфляции в экономических расчетах, целесообразно рассмотреть некоторые их свойства.

Соотношение индексов инфляции для трех моментов времени. Рассмотрим три произвольных момента времени t_1, t_2, t_3 и соответствующие индексы инфляции $I(t_1, t_1)$, $I(t_2, t_3)$, и $I(t_1, t_3)$. Из определения индекса инфляции как отношения стоимостей потребительской корзины в соответствующие моменты времени вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.1 (теорема умножения). *Для любых трех моментов времени t_1, t_2, t_3 справедливо равенство*

$$I(t_1, t_3) = I(t_1, t_2)\, I(t_2, t_3).$$

Доказательство. По определению индекса инфляции

$$I(t_1, t_2) = \frac{S(t_2)}{S(t_1)}, \quad I(t_2, t_3) = \frac{S(t_3)}{S(t_2)}.$$

где $S(t)$ — стоимость потребительской корзины в момент времени t. Следовательно,

$$I(t_1, t_2) I(t_2, t_3) = \frac{S(t_2)}{S(t_1)} \frac{S(t_3)}{S(t_2)}.$$

В числителе и знаменателе стоит одно и то же выражение $S(t_2)$. Сократим на него, получим

$$I(t_1, t_2) I(t_2, t_3) = \frac{S(t_3)}{S(t_1)}.$$

Выражение справа — это по определению индекс инфляции $I(t_1, t_3)$. Теорема 4.1 доказана.

Пусть, например, t_1 — это 31 декабря 2004 г., t_2 — это 31 декабря 2005 г., t_3 — это 31 декабря 2006 г. Тогда $I(t_1, t_2)$ — это индекс инфляции за 2005 г., равный 10,9% (официальные данные Росстата). А $I(t_2, t_3)$ — это индекс инфляции за 2006 г., согласно тому же источнику он равен 9%. Теорема умножения дает возможность рассчитать по этим данным индекс инфляции за два года (2005– 2006), т.е. с 31 декабря 2004 г. по 31 декабря 2006 г.

Согласно приведенному определению индекс инфляции — действительное число. Если цены постоянны, то индекс инфляции равен 1. Если цены растут, то индекс инфляции больше 1. Однако часто приводят индекс инфляции в процентах. При этом в процентах выражают отклонение от ситуации постоянных цен, т.е. отклонение от 1. Обозначим через $a = a(t_1, t_2)$, или $a\% = a(t_1, t_2)\%$ индекс инфляции в процентах за интервал времени (t_1, t_2). Тогда

$$a(t_1, t_2)\% = \big(I(t_1, t_2) - 1\big) \times 100\%, \quad I(t_1, t_2) = 1 + \frac{a(t_1, t_2)}{100}.$$

Или в сокращенной форме:

$$a\% = 100(I - 1)\%, \quad I = 1 + \frac{a\%}{100}$$

Чтобы перейти к выражению индекса инфляции в процентах, надо значение «в разах» уменьшить на 1 и результат умножить на 100. Наоборот, чтобы от процентов перейти к «разам», надо значение «в «процентах» поделить на 100 и результат увеличить на 1.

Таким образом, 1,25 и 25% — это две записи одного и того же значения индекса инфляции. Инфляция 9% за 2006 г. означает, что цены выросли в среднем в 1,09 раза. Рост цен в 1992 г. в 26,1 раз означает, что индекс инфляции за этот год составил $(26{,}1 - 1) \times 100\% = 2510\%$.

Итак, используют два основных способа записи индекса инфляции — в «разах» и в «процентах». В «разах» — это именно тот способ, который дан в определении индекса инфляции как отношения стоимостей потребительской корзины в два момента времени. Однако в средствах массовой информации предпочитают приводить инфляцию в «процентах».

В теореме умножения индексы инфляции выражены «в разах». Следовательно, для расчета индекса инфляции за два года надо от «процентов» перейти к «разам». Индекс инфляции за 2005 г. составляет

$$I(t_1, t_2) = 1 + \frac{10{,}9}{100} = 1{,}109,$$

а индекс инфляции за 2006 г. равен

$$I(t_1, t_2) = 1 + \frac{9}{100} = 1{,}09.$$

По теореме умножения индекс инфляции за два года таков:

$$I(t_1, t_3) = I(t_1, t_2)\, I(t_2, t_3) = 1{,}109 \times 1{,}09 = 1{,}20881.$$

Переведем в проценты:

$$I(t_1, t_3) = 100(1{,}20881 - 1)\% = 20{,}881\%.$$

С достаточной для практики точностью можно округлить: $I(t_1, t_3) = 20{,}9\%$.

Обратите внимание, что при сложении индексов инфляции, выраженных «в процентах», получим $10{,}9\% + 9\% = 19{,}9\%$, что меньше правильного результата 20,881% почти на 1%. К сожалению, неверная рекомендация о сложении «процентов» (вместо умножения «разов») иногда встречается в литературных источниках.

Теорема умножения позволяет переходить от индексов инфляции за отдельные недели к индексам инфляции за месяц (четыре недели), от помесячных индексов инфляции — к квартальным и годовым, от годовых — к индексам инфляции за несколько лет. Например, индекс инфляции за второй квартал — с 01.04.94 по 01.07.94 — т.е. $I(01.04.94, 01.07.94)$, выражается через индексы инфляции за апрель $I(01.04.94, 01.05.94)$, май $I(01.05.94, 01.06.94)$ и июнь $I(01.06.94, 01.07.94)$ соответственно как произведение этих индексов, т.е. находится по формуле

$$I(01.04.94,\ 01.07.94) = \\ = I(01.04.94,\ 01.05.94)\ I(01.05.94,\ 01.06.94) \\ I(01.06.94,\ 01.07.94).$$

Аналогично индекс инфляции за год равен произведению двенадцати индексов инфляции: за январь, февраль, март и остальные девять месяцев.

Насколько велика ошибка от сложения индексов инфляции в «процентах»? Найдем ее в общем виде. Поскольку для любых чисел x и y справедливо тождество

$$(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy,$$

то, как легко проверить, для индексов инфляции «в процентах»

$$i(t_1, t_2) = 100(I(t_1, t_2) - 1)$$

(в прежних обозначениях $i(t_1, t_2) = a$) справедливо тождество

$$i(t_1,t_3) = i(t_1,t_2) + i(t_2,t_3) + \frac{i(t_1,t_2)\,i(t_2,t_3)}{100}.$$

Если индексы инфляции «в процентах» $i(t_1, t_2)$ и $i(t_2, t_3)$ малы, т.е. индексы инфляции «в разах» $I(t_1, t_2)$ и $I(t_2, t_3)$ мало отличаются от единицы, то справедлива приближенная формула

$$i(t_1,t_3) = i(t_1,t_2) + i(t_2,t_3).$$

Погрешность этой формулы, измеряемая в процентах, равна

$$\frac{i(t_1,t_2)\,i(t_2,t_3)}{100}$$

Эта величина становится заметной, если сомножители — порядка десятков и сотен (процентов).Если формула применяется несколько раз, то погрешность накапливается. Противоположный случай — при малых индексах инфляции погрешность приближенной формулы мала (является бесконечно малой более высокого порядка).

Период удвоения цен. Рассмотрим пример. В известном учебнике экономической теории [10] рассмотрена связь между ежегодным увеличением цен и числом лет, необходимых для увеличения цен вдвое. Приведено правило, которое вначале выглядит совершенно непонятным:

(*приблизительное количество лет, необходимое для удвоения удвоение цен*) = 70 / (*темп ежегодного увеличения уровня цен* в %).

Действительно, пусть n — количество лет, необходимое для удвоения цен, а x — темп ежегодного увеличения уровня цен (в % — $100x\%$). При «подходе профана» рост за n лет составит $100nx$, а потому срок удвоения цен должен находиться из условия

$$100nx = 100, \qquad n = 100 / (100x),$$

т.е. в числителе дроби должно стоять число 100, а не 70. В чем дело?

А дело в том, что рост описывается не линейной функцией, а экспоненциальной, надо не складывать, а возводить в степень. За n лет рост цен составит $(1 + x)^n$. Период удвоения находится из уравнения

$$(1 + x)^n = 2.$$

Тогда

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+x)}$$

Воспользуемся приближенной формулой математического анализа

$$\ln (1 + x) = x + O(x^2),$$

тогда с точностью до бесконечно малых более высокого порядка

$$n = 100 \ln 2 \,/\, 100\, x.$$

Остается заметить, что

$$100 \ln 2 = 100 \times 0{,}69314718,$$

т.е. с достаточной для подобных расчетов точностью 100 ln 2 = 70. «Таинственное» правило полностью обосновано.

Следствия теоремы умножения. Эта теорема позволяет без труда сменить начало отсчета. Например, в табл.4.6 начальный момент времени — 31 марта 1991 г. (можно заменить на 1990 г., поскольку цены были постоянными). Поскольку по теореме умножения

$$I(t_2, t) = \frac{I(t_2, t)}{I(t_1, t_2)},$$

то без труда можно перейти к отсчету инфляции от первого дня третьего тысячелетия. Действительно, в соответствии со строкой 41 табл. 4.6 имеем:

$$I(01.01.01,t)=\frac{I(31.03.91,t)}{I(31.03.91,01.01.01)}=\frac{I(31.03.91,t)}{33,34}.$$

Например, получаем, что инфляция за 6 лет (2001–2006) составляет

$$I(01.01.01,10.01.07)=\frac{59,432}{33,340}=1,7826,$$

т.е. 78,26%.

Обсудим соотношение инфляции по месяцам и за год, а также понятие среднего темпа роста цен и среднемесячной инфляции. Пусть I_1 — индекс инфляции за январь, I_2 — за февраль, I_3 — за март, ..., I_{12} — за декабрь, а $I_{\text{год}}$ — за год в целом. Тогда согласно теореме умножения

$$I_{\text{год}} = I_1\, I_2\, I_3 \ldots I_{12}.$$

Как ввести понятие среднего индекса инфляции? Естественно исходить из требования, чтобы при подстановке среднего индекса инфляции вместо всех усредняемых величин итог не изменялся. Пусть $I_1\, I_2\, I_3 \ldots I_k$.- индексы инфляции за k последовательных интервалов времени, а $I_{\text{ср}}$ — средний индекс инфляции для этой совокупности. Тогда исходное требование — это требование выполнения равенства

$$I_1\, I_2\, I_3 \ldots I_k = I_{cp}^k.$$

Таким образом,

$$I_{cp} = \sqrt[k]{I_1 I_2 I_2 \ldots I_k},$$

т.е. средний индекс инфляции рассчитывается как среднее геометрическое. Например, средний индекс инфляции за 2005–2006 годы равен (по официальным данным)

$$I_{cp}\sqrt{1,109\times 1,09}=1,09946\cdot$$

Отметим, что всегда среднее геометрическое меньше среднего арифметического

$$\sqrt[k]{I_1 I_2 I_3 \ldots I_k} < \frac{I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_k}{k},$$

за исключением единственного случая, когда все усредняемые величины равны между собой (и равны их среднему арифметическому и среднему геометрическому). Среднее арифметическое индексов инфляции за 2005 г. и 2006 г. равно (1,109 + 1,09)/2 = 2,199/2 = 1,0995, что больше среднего геометрического 1,09946, хотя превышение и невелико.

Среднемесячная инфляция, как и средний темп роста для любого временного ряда, рассчитывается в предположении, что ежемесячный рост цен не меняется от месяца к месяцу. Для данных табл.4.5 она равна

$$\sqrt[36]{1598,88} = 1,2274 \text{ или } 22,74\ \%.$$

Другими словами, с 14.03.91 по 14.03.94 цены каждый месяц увеличивались в среднем на 22,74%.

Примеры ошибок при расчетах с индексами инфляции. Информация об индексах инфляции и рассуждения, связанные с ними, постоянно появляются на страницах печати и обсуждаются в иных средствах массовой информации. К сожалению, достаточно широко распространены ошибки.

Так, в одной из экономических (!) газет была помещена публикация, в которой основной исходный материал для обсуждения — индексы инфляции по месяцам (табл.4.7).

Таблица 4.7

Индексы инфляции по месяцам

Месяц	Индекс инфляции	Месяц	Индекс инфляции	Месяц	Индекс инфляции
Январь	1,00	Май	1,29	Сентябрь	1,22
Февраль	1,23	Июнь	1,30	Октябрь	1,19
Март	1,19	Июль	1,23	Ноябрь	1,23
Апрель	1,25	Август	1,22	Декабрь	1,25

Автору публикации были нужны индексы инфляции за несколько месяцев. Рассчитывая их, он без каких-либо сомнений пользовался ранее рассмотренной приближенной формулой (сложение индексов «в процентах») вместо точной (перемножение индексов инфляции, выраженных «в разах»). В результате он получил для периода январь-декабрь (т.е. за год) значение индекса инфляции 3,60 (поскольку 0% + 23% + 19% + 25% + 29% + 30% + 23% + 22% + 22% + 19% + 23% + 25% = 260%), в то время как на самом деле индекс инфляции, рассчитанный в результате перемножения индексов по месяцам, равен 10,23. Допущенная ошибка в 10,23/3,60 = 2,84 раза существенно исказила дальнейшие расчеты (фонда оплаты труда, средней зарплаты и других экономических характеристик) в рассматриваемой публикации, названной в специализированной экономической газете не как-нибудь, а «консультацией»!

В еженедельнике «Аргументы и факты» в апреле 1994 г. в рубрике «Прогноз» помещена беседа журналистки Татьяны Коростиковой с первым заместителем министра экономики России Яковом Уринсоном [7], в которой Я. Уринсон прогнозирует:

«…Мы предполагаем рост цен за 1994 г. в 5 раз…

В месяц- 7– 8%…».

Сказанное противоречиво. Если индекс инфляции за год равен 5,0, то за месяц, очевидно, рост цен равен в среднем

$$\sqrt[12]{5,0} = 1,1435$$

т.е. 14,35% в месяц, а не 7– 8%. Если же рост цен составляет 7– 8% в месяц, то индекс инфляции за год лежит между

$$(1,07)^{12} = 2,25 \text{ и } (1,08)^{12} = 2,\ 25$$

т.е. по крайней мере в два раза меньше, чем названный в беседе достаточно реальный прогноз — рост в 5 раз. Остается неясным, кто дезориентировал читателя многотиражного издания — чиновник или журналист. Наш запрос об этом в редакцию «Аргументов и фактов» остался без ответа.

Покажем на примере этих данных накопление погрешностей при использовании приближенной формулы, основанной на суммировании индексов инфляции «в процентах». Если в месяц рост на 14,35%, то за год по приближенной формуле — на $14{,}35 \times 12 = 172{,}2\%$ (вместо 400% — рост в 5 раз). Если в месяц — на 7%, то за год — на $7 \times 12 = 84\%$ (вместо 125%). Если в месяц — на 8%, то за год — на $8 \times 12 = 96\%$ (вместо 152%).

Приведенных примеров достаточно для констатации того, что к сообщениям в средствах массовой информации, посвященным росту цен, следует относиться с известной осторожностью.

Теорема сложения. Целью введения индекса инфляции была выдвинута необходимость усреднения индивидуальных темпов роста цен (индивидуальных индексов инфляции)

$$I_i(t_1, t_2) = \frac{p_i(t_2)}{p_i(t_1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Однако индекс инфляции был определен не как среднее таких величин, а как отношение стоимостей потребительских корзин. Тем не менее индекс инфляции действительно является средним взвешенным арифметическим индивидуальных индексов инфляции, как показывает следующая теорема.

Теорема 4.2 (теорема сложения). *Существуют положительные весовые коэффициенты* β_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *такие, что*

$$I(t_1, t_2) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \beta_i I_i(t_1, t_2),$$

причем $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 1$. *При этом* β_i *— это доля стоимости потребительской корзины, приходящаяся на соответствующий (i-й) товар (услугу) в начальный (базовый) момент времени,*

$$\beta_i = \frac{p_i(t_1)Q_i}{S(t_1)} = \frac{p_i(t_1)Q_i}{\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} p_k(t_1)Q_k}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство дается следующей последовательностью преобразований:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\beta_i I_i(t_1,t_2)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{p_i(t_1)Q_i}{S(t_1)}\times\frac{p_i(t_2)}{p_i(t_1)}=$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{p_i(t_2)Q_i}{S(t_1)}=\frac{1}{S(t_1)}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}p_i(t_2)Q_i=\frac{S(t_2)}{S(t_1)}=I(t_1,t_2).$$

(сокращается выражение $p_i(t_1)$, оказывающееся как в числителе, так и в знаменателе i—го слагаемого).

Теорема сложения справедлива и в случае, когда вместо индивидуальных коэффициентов инфляции стоят групповые (доказательство опущено). Например, при расчете индекса инфляции по потребительской корзине ИВСТЭ (табл.4.4) можно сначала рассчитать индексы инфляции по 10 группам, выделенным в этой корзине (хлеб и хлебопродукты, овощи, сахар и кондитерские изделия и др.), а затем объединить их в единый индекс с помощью весовых коэффициентов согласно теореме сложения. Аналогично можно, получив индексы инфляции отдельно по продовольственной корзине, отдельно по товарам повседневного спроса, длительного спроса, отдельно по различным видам услуг (жилищно-коммунальных, транспортных, информационных и др.), получить итоговый индекс инфляции по объединенной корзине, например, предусмотренной в Федеральном Законе «О прожиточном минимуме в Российской Федерации» (в редакции Федеральных законов РФ от 27.05.2000 №75-ФЗ, от 22.08.2004 №122-ФЗ). Большое значение имеет теорема сложения при расчета дефлятора валового внутреннего продукта (с целью приведения его к сопоставимым ценам), поскольку потребительская корзина при этом должна охватывать весь спектр конечных товаров и услуг, производимых на территории страны за год.

4.4. Использование индекса инфляции в экономических расчетах

Хорошо известно, что в любой стране стоимость ее денежных единиц со временем меняется. Например, на один доллар

США полвека назад можно было купить примерно в восемь раз больше материальных ценностей (например, продовольствия), чем сейчас (см. таблицу пересчета в учебнике [10]), а если сравнивать с временами Тома Сойера — в 100 раз больше. Причем стоимость денежных единиц с течением времени, как правило, падает. Этому есть две основные причины — банковский процент и инфляция. В экономике есть инструменты для учета изменения стоимости денежных единиц с течением времени. Один из наиболее известных — расчет *NPV* (*Net Present Value*) — чистой текущей стоимости. Однако бухгалтерский учет и построенный на данных баланса предприятия экономический анализ финансово-хозяйственной деятельности российского предприятия пока что, как правило, игнорируют сам факт наличия инфляции. Отличие финансиста от бухгалтера проявляется, в частности, в том, что имеет дело с величинами, выраженными в номинальных денежных единицах (поскольку в документах первичного бухгалтерского учета используются именно они), а финансист не может игнорировать изменение покупательной способности денежных единиц во времени.

В настоящем разделе обсудим некоторые возможности использования индекса инфляции в экономических расчетах в процессе подготовки и принятия решений. Чтобы избежать непродуктивных эмоций при обсуждения современного экономического положения, отнесем большинство рассматриваемых примеров к ушедшей в историю середине 1990-х годов.

Будем пользоваться как данными ИВСТЭ (табл.4.6), так и официальными (табл.4.8). Сравнение столбцов (4) и (5) показывает, что официальная статистика занижала реальную инфляцию в 1,5– 2,0 раза. Именно это было причиной того, что ИВСТЭ по заказу Минобороны РФ в 90-е годы проводил сбор и анализ данных о динамике цен. Заказчика интересовали размеры финансирования НИР в реальных (сопоставимых) ценах. Часть полученных результатов была опубликована [5, 11, 21]. Мониторинг цен продолжается [20, 22].

Необходимо отметить, что в начале XXI в. темпы роста цен, фиксируемые независимыми исследователями (в частности, ИВСТЭ) и официальной статистикой, достаточно близки. Прежние расхождения были порождены реалиями 90-х годов и остались в прошлом тысячелетии. Однако начиная с 2007 г. проявились расхождения нового типа (см. ниже). Специалисты отмечают нерешенные проблемы в области измерения инфляции, имеющие расхождения в подходах, отсутствие прозрачности в деятельности официальных статистических органов [23].

Таблица 4.8

Индексы инфляции в РФ (1992–2007) (по данным официальных статистических органов)

Год	Индекс инфляции	Индекс инфляции в %	Накопленная инфляция с января 1992	Накопленная инфляция с марта 1991	Данные ИВСТЭ к столбцу (4)
(1)		(2)	(3)	(4)	(5)
1991				2,6	-
1992	26,1	25100	26,1	67,86	-
1993	9,4	840	245,34	637,88	1235,42
1994	3,15	215	772,82	2009,33	3680,34
1995	2,31	131	1785,22	4641,56	9989,32
1996	1,218	21,8	2174,39	5653,42	11815,31
1997	1,11	11,0	2413,58	6274,30	12997
1998	1,844	84,4	4,451	11,572	20,395
1999	1,365	36,5	6,075	15,795	27,737
2000	1,202	20,2	7,303	18,986	33,340
2001	1,186	18,6	8,661	22,517	39,541
2002	1,151	15,1	9,968	25,917	45,512
2003	1,12	12,0	11,164	29,028	50,974
2004	1,117	11,7	12,471	32,424	55037
2005	1,109	10,9	13,830	35,958	57,354
2006	1,09	9,0	15,075	39,194	59,342
2007	1,119	11,9	17,830	46,358	85,960

Примечание. Накопленные индексы инфляции с 1998 г. даются с учетом деноминации.

Переход к сопоставимым ценам. Индекс инфляции даст возможность перехода к сопоставимым ценам, расходам, доходам и другим экономическим величинам. Например, по данным ИВСТЭ (ср. табл.4.6, в которой приведены значения индекса инфляции на 02.03.95 и 30.03.95) индекс инфляции за 4 года — с 14.03.91 г. по 16.03.95 г. — составил 5936. Это означает, что покупательной способности 1 рубля марта 1991 г. соответствует примерно 6000 (а точнее 5936) рублей марта 1995 г.

Рассмотрим приведение доходов к неизменным ценам. Пусть Иван Иванович Иванов получал в 1990 г. 300 руб. в месяц, а в начале мая 1995 г. ему выдали 1 миллион руб. за апрель (т.е за предыдущий месяц). Увеличились его доходы или уменьшились?

Номинальная заработная плата выросла в 1000000/300 = 3333 раза. Однако индекс инфляции на 18 мая 1995 г. составлял 6180 (дата взята исходя из того, что средства, полученные в начале мая, Иван Иванович Иванов тратит в течение этого месяца). Это значит, что 1 руб. 1990 г. соответствовал по покупательной способности 6180 руб. в ценах на 18.05.95 г. Следовательно, в ценах 1990 г. доход И.И. Иванова составлял 1000000/7080 6180 =161 руб. 81 коп., т.е. 53,9 % от дохода в 1990 г.

Можно поступить наоборот, привести доход 1990 г. к ценам на 18 мая 1995 г. Для этого достаточно умножить его на индекс инфляции: доход 1990 г. соответствует $300 \times 6180 = 1$ миллион 854 тыс. руб. в ценах мая 1995 г., что в 1854000/100000 = 1,854 раза больше, чем месячный доход в 1990 г. Следовательно, доход мая 1995 г. составляет 100 (1/1,854)% = 53,9% от дохода 1990 г. Нетрудно показать, что оба способа расчетов приводят к одному и тому же результату.

Средняя зарплата. Сопоставим инфляцию со средней заработной платой. В марте 1991 г. она равнялась приблизительно 300 руб. в месяц, т.е. минимальная продуктовая корзина ИВСТЭ составляла около 8,9 % от средней заработной платы. В марте 1994 г. среднемесячная зарплата в Москве составила 206076 руб. (данные Московского городского статистического комитета), следовательно, стоимость корзины ИВСТЭ составляла 4349900 / 206076 %=21,11% от нее. Если судить по ценам на продукты, за три года уровень жизни основной массы населения понизился в 21,1/11,4 = 1,85 раз.

В октябре 1995 г. в Москве средняя заработная плата — 520 тыс. руб., а стоимость потребительской корзины ИВСТЭ — 196,6 тыс. руб., т.е. 37,8% от средней зарплаты, падение уровня жизни — в 4,2 раза.

По данным Госкомстата РФ средняя заработная плата составляла в 1990 г. 303 руб., в октябре 1993 г. — 93 тыс. руб., в январе 1995 г. — 303 тыс. руб. Поскольку зарплата тратится в основном в следующем месяце после получки, то рассмотрим индексы инфляции на 15.11.93 г. и 02.02.95 г., равные 1054 и 4856 соответственно (см. табл.4). В ценах 1990 г. средняя зарплата составила 88 руб.24 коп. и 62 руб.40 коп. соответственно, т.е. 26,48% и 20,59% от зарплаты 1990 г.

Среднемесячная заработная плата в РФ (номинальная и в процентах от уровня 1990 г.) представлена в табл.4.9. Она составлена по данным Пенсионного фонда РФ, использующего сведения о средней заработной плате при расчета величин пенсий. Обратим внимание, что средняя заработная плата в декабре 1994 г. (354 тыс. руб.) больше, чем в январе 1995 г. (303 тыс. руб.). Проявляется эффект конца года — дополнительные выплаты по итогам года в сочетании с некоторым затишьем производственной деятельности в начале следующего года.

Таблица 4.9

Среднемесячная заработная плата в РФ

№ п/п	Дата	Среднемесячная заработная плата в РФ (по данным Пенсионного фонда РФ, ноябрь 2004), руб.	Индекс инфляции I(31.3.91;t)	Среднемесячная заработная плата в РФ, в % от уровня 1990
1	1990	303 (за 1990 г.)	1,00	100
2	Август 1993	65400	665,08	32,45
3	Декабрь 1994	354200	3680,34	32,08
4	Декабрь 1995	735500	9989,32	24,30
5	Декабрь 1996	1017000	11815,31	28,32

№ п/п	Дата	Среднемесячная заработная плата в РФ (по данным Пенсионного фонда РФ, ноябрь 2004), руб.	Индекс инфляции I(31.3.91;t)	Среднемесячная заработная плата в РФ, в % от уровня 1990
6	Декабрь 1997	760000	12997,00	19,30
7	Декабрь 1998	760,0	23,395	10,72
8	Декабрь 1999	1086,0	32,004	10,97
9	Декабрь 2000	1584,0	35,684	14,80
10	Декабрь 2001	1671,0	43,321	12,73

Средняя зарплата рассчитывается путем деления фонда оплаты труда на число работников. При этом объединяются доходы и низкооплачиваемых лиц и сравнительно высокооплачиваемых. Известно, что распределение доходов резко асимметрично, большому числу низкооплачиваемых работников соответствует малое число лиц с высокими доходами. За 1991–1995-е годы дифференциация доходов резко увеличилась. Это означает, что доходы основной массы трудящихся сдвинулись влево относительно средней зарплаты. По нашей оценке 50% получают не более 70% от средней зарплаты (медиана распределения), т.е. не более 212100 руб. по состоянию на январь 1995 г., а наиболее массовой является оплата в 50% от средней (мода распределения), т.е. около 150 тыс. руб. в месяц.

Известно, что типичное распределение доходов таково, что мода величин доходов весьма меньше медианы, которая в свою очередь существенно меньше среднего арифметического (центральная часть распределения доходов — за исключением больших доходов — хорошо приближается логарифмически нормальным распределением). Дифференциация доходов в России быстро нарастала вплоть до второй половины 1990-х годов и сильно превзошла уровень всех т.н. промышленно развитых стран. Правда, уровень Бразилии и Кении пока не достигнут, но и климат в этих странах существенно иной, так что минимальное жизнеобеспечение требует существенно меньших затрат.

Доходы отдельных слоев трудящихся снизились еще существеннее. Зарплата профессора Московского государственного института электроники и математики (технического университета) составляла в марте 1994 г. — 42 руб.92 коп. (в ценах 1990 г.), в июле 1995 г. — 43 руб. 01 коп., т.е. с 1990 г. (400 руб.) снизилась в 9,3 раза, дошла до уровня прежней студенческой стипендии. А студенческие стипендии снизились примерно в той же пропорции и составляли 4– 5 руб. в ценах 1990 г.

Кроме того, необходимо учесть, что Госкомстат (и Росстат) учитывает начисленную зарплату, а не выплаченную. В отдельные периоды отечественной истории выплата заработной платы откладывалась надолго.

Минимальная зарплата и прожиточный минимум. Минимальная зарплата в сентябре 1994 г. (22500 руб.) и в мае 1995 г. (43700 руб.) составляла 38% и 23,4% соответственно от стоимости минимальной физиологически необходимой продовольственной корзины. После подъема до 55 тыс. руб. она в сентябре 1995 г. составляла около 26,34% от стоимости корзины, т.е. реально уменьшилась в 1,44 раза по сравнению с сентябрем 1994 г. В дальнейшем уменьшение стало еще более заметным.

Минимальная зарплата вместе с единой тарифной сеткой во многом определяла зарплату работников бюджетной сферы. Учитывая снижение коэффициентов тарифной сетки, проведенное весной 1995 г., снижение в 1,5 раза покупательной способности минимальной зарплаты, необходимо заключить, что в сентябре 1995 г. доход бюджетников в 2 раза меньше, чем год назад.

Оценим прожиточный минимум. Бюджетные обследования в 1990 г. показали, что для лиц с низкими доходами расходы на продовольствие составляют около 50% всех расходов, т.е. на промтовары и услуги идет около 50% доходов. Это соотношение подтвердило и проведенное ИВСТЭ бюджетное обследование конца 1995 г. Исходя из него, среднедушевой прожиточный минимум можно оценить, умножая на 2,0 стоимость минимальной продовольственной корзины ИВСТЭ (этот метод расчета прожиточного минимума разработан американской исследовательницей бедности польского происхождения М. Оршански [29]). Например, на 28 декабря 1995 г. — 531432 руб. (см. табл.4.6). Т.е. прожиточный уровень для семьи из трех человек — муж, жена и ребенок — должен был на 28 декабря 1995 г. составлять 1,594 миллиона руб. (в месяц). Например, муж должен получать 900 тыс. руб., жена — 700 тыс. руб. в месяц (чистыми, т.е. после вычета подоходного налога). В декабре 1995 г. средняя заработная плата составляла 735500 руб. (табл.4.9). Сопоставление приведенных численных значений показывает, что среднеоплачиваемые работники не могли обеспечить прожиточный минимум для своей семьи (муж и жена суммарно могли заработать лишь 1,471 млн. «грязными», что заметно меньше прожиточного минимума).

Численные значения стоимостей потребительских корзин и индексов инфляции рассчитаны ИВСТЭ в основном по ценам на продукты в Москве и Подмосковье. Однако для других регионов численные значения отличаются мало. Для Москвы индекс инфляции на 27.07.95 г. — 6598, а для Иванова на 1.08.95 г. — 7542. Поскольку потребительская корзина на 14.03.91 г. в областном центре г. Иванове была на 95 коп. дешевле, то и на 1.08.95 г. она несколько дешевле, чем была бы при том же индексе инфляции в Москве, и равна 193452 руб., а прожиточный минимум равен 386905 руб. Этот и другие подобные расчеты показывают, что приведенные выше численные значения для Москвы в качестве первого приближения можно использовать для различных регионов России.

Индексы инфляции с помощью описанной выше методики можно рассчитать для любого региона, профессиональной или социальной группы, отдельного предприятия или даже конкретной семьи. Эти значения могут быть эффективно использованы на трехсторонних переговорах между профсоюзами, работодателями и представителями государства.

Проценты по вкладам в банк, плата за кредит и инфляция. Рассмотрим банк, честно выполняющий свои обязательства. Пусть он дает 10% в месяц по депозитным вкладам. Тогда 1 руб., положенный в банк, через месяц превращается в 1,1 руб., а через 2 — по формуле сложных процентов — в $1,1^2 = 1,21$

руб., …, через год — в $1{,}1^{12} = 3{,}14$ руб. Однако за год росли не только вклады, но и цены. Например, с 19.05.94 г. по 18.05.95 г. индекс инфляции составил 3,73. Значит, в ценах на момент оформления вкладов итог годового хранения равен 3,14 / 3,73 = 0,84 руб. Хранение оказалось невыгодным — реальная стоимость вклада уменьшилась на 16%, несмотря на, казалось бы, очень выгодные условия банка. Другими словами, реальный процент платы за депозит отказался отрицательным, равным (–16)% в годовом исчислении, при том, что в номинальных руб. договор с банком обеспечивает 214% годовых.

Пусть фирма получила кредит под 200% годовых. Значит, вместо 1 рубля, полученного в настоящий момент в кредит, через год ей надо отдать 3 рубля. Пусть она взяла кредит 19.05.94 г., а отдает 18.05.95 г. Тогда в ценах на момент взятия кредита она отдает 3/3,73 = 0,80 руб. за 1 руб. кредита (в сопоставимых ценах на момент выдачи кредита). Таким образом, кредит частично превратился в подарок — возвращать надо на 20% меньше, чем получил, реальная ставка кредита отрицательна, она равна (–20)%! Такова была типичная ситуация в России в течение ряда лет начиная с 1992 г., особенно в 1992–1994 гг. Но бесплатных подарков в бизнесе не бывает — за них надо платить по другим каналам, как правило, криминальным.

Сколько стоит доллар? На 14 августа 1993 г. курс доллара США составлял в РФ 1984,5 руб., а инфляция — 665,08. Следовательно, в сопоставимых ценах 1990 г. реальный курс доллара США равнялся 1984,5 / 665,08 = 2 руб. 98 коп.

В июле 1995 г. индекс инфляции около 6500 (табл.4), а курс доллара США — около 4500 руб. за доллар. Следовательно, доллар США стоит 4500 / 6500 = 0,69 руб. в ценах 1990 г., т.е. примерно соответствует официальному обменному курсу в 1980-х годах. Сопоставим с тем, что в сентябре 1994 г. курс доллара был около 2000, а индекс инфляции — около 2200, т.е. доллар стоил около 0,91 руб. в ценах 1990 г. Реальная покупательная способность доллара упала за 10 месяцев в 1,32 раза.

Пик реального курса доллара приходился на время после дефолта 1998 г. На начало января 1999 г. курс был 20 руб.65 коп. при индексе инфляции 20,395, т.е. в реальном исчислении он составлял 20,65/20,395 = 1 руб. 01 коп. За год до этого, в начале

1998 г., индекс инфляции равнялся 12,997, курс доллара — 5 руб.96 коп., в реальном исчислении 5,96 / 12, 997 = 0,46, т.е 46 коп. — в 2 с лишним раза меньше, чем в начале 1999 г.

В середине 2003 г. курс доллара был несколько больше 30 руб. (30 руб. 38 коп.), индекс инфляции составлял 48,56, следовательно, 1 доллар США по своей покупательной способности в России на июль 2003 г. соответствовал 63 копейкам начала 1991 г. В начале 2004 г. курс доллара составлял около 28 руб. 50 коп. при индексе инфляции 50,974, следовательно, 1 доллар США по своей покупательной способности в России на начало 2004 г. соответствовал 55 копейкам начала 1991 г. Всего за полгода доллар подешевел на 15%.

В конце июля 2007 г. курс доллара США — 25 руб. 41 коп. при индексе инфляции 61,819, следовательно, реальный его курс — 41 копейка (в сопоставимых ценах 1990 г.).

В конце декабря 2008 г. курс доллара США — 29 руб. 00 коп. при индексе инфляции около 100, следовательнго, его реальный курс — 29 копеек (в сопоставимых ценах 1990 г.).

Реальный курс доллара США на любой момент времени можно получить, располагая двумя широко доступными временными рядами — ежедневными данными о номинальном курсе доллара США на Московской межбанковской валютной бирже и рядом значений индексов инфляции (табл.4.6 и 4.8). В 90-е годы был распространен миф о том, что можно избавиться от влияния инфляции, ведя расчеты в долларах США. Этот миф опровергается приведенными выше результатами расчетов. Инфляция уменьшает покупательную способность доллара США — как в нашей стране, так и в самих США [10], а также и в других странах.

Как известно, курс доллара США в РФ определяется в результате торгов на Московской межбанковской валютной бирже. Каковы свойства валютного рынка? Легко видно, что это отнюдь не рынок чистой конкуренции [10, 25]. Игроки не являются равноправными. Участвующие в торгах коммерческие банки административно зависят от Центрального Банка РФ. Другой инструмент влияния Центрального Банка — долларовые или рублевые интервенции. Необходимо признать, что реально курс доллара во многом определяется руководством страны, решающим поставленные перед собой задачи, действуя через Центральный Банк РФ. Не будем пытаться обсуждать эти задачи, констатируем только, что официальный курс доллара США в РФ определяется во многом административным путем. Возникает естественный вопрос — а каков же реальный курс?

Международные сопоставления на основе паритета покупательной способности. Процитируем типичную публикацию в средствах массовой информации:

«Российский рубль входит в число самых недооцененных мировых валют по паритету покупательной способности, говорится в очередном исследовании журнала The Economist. Исходя из результатов исследования справедливая цена доллара составляет 15,2 руб. Однако участники рынка считают, что подешеветь до 15 руб. доллар сможет лишь через 15–20 лет.

Индекс «Биг Мака» основывается на паритете покупательской способности (ППС), рассчитанной с помощью одинакового во всех странах мира продукта (в данном случае «Биг Мака»). Согласно методике расчета индекса «Биг Мака», курсы валют должны быть такими, чтобы стоимость этого продукта была во всех странах одинаковой.

Индекс «Биг Мака», рассчитанный журналом The Economist, показал, что рубль недооценен на 41%. При этом китайский юань, например, недооценен на 58%» (ежедневная деловая газета «РБК Daily», 09.07.2007).

Обсудим три вопроса. По каким причинам реальное соотношение валют может отличаться от официального? Как установить реальный курс? Какие последствия влечет пересчет с официальных курсов на реальные?

Если официальный курс доллара США по отношению к рублю выше реального, то это означает, что государство защищает отечественных товаропроизводителей, поскольку зарубежные товары (из долларовой зоны) продаются внутри страны дороже, чем было бы при соответствии официального курса реальному. Государство поддерживает также работу отечественных предприятий на экспорт, искусственно занижая издержки производства. Одновременно завышение официального курса ставит препятствия на пути закупки новейших зарубежных технологий, делает невыгодным получение кредитов. Ясно, что возвращать долги в долларах легче при низком курсе доллара, чем при высоком. Остановившись на сказанном, констатируем, что в те или иные периоды своего развития государство, ведущее активную экономическую политику, имеет основания устанавливать официальный курс обмена валюты, отличный от реального, соответствующего свободному рынку.

Как же установить реальный курс? Принцип *паритета покупательной способности* (ППС) предлагает исходить из того, что одна и та же потребительская корзина должна стоить одинаково в разных странах. Если потребительская корзина ИВСТЭ стоит в начале июля 2007 г. в Москве 1644 руб.,. а в Нью-Йорке, к примеру, 100 долларов, то приравниваем: 1644 руб. = 100 долларов США, т.е. курс доллара по ППС — 16 руб. 44 коп. В процитированной публикации из СМИ приравнивалась стоимость «Биг Мака» — продукта, который в распространенной по многим странам мира сети ресторанов быстрого питания «Макдоналдс» всюду изготавливается по одной и той же рецептуре. Другими словами, в качестве используемой для сравнения потребительской корзины берется набор товаров и услуг, необходимых для изготовления «Биг Мака» (включая продукты питания, электроэнергию, оплату труда, амортизацию оборудования и т.п.). Надо отметить, что в зависимости от конкретной методики международного сопоставления, выбранной тем или иным экономистом (в частности, конкретной потребительской корзины и способа измерения ее стоимости), оценки реального курса валют по ППС могут заметно различаться. Например, курс доллара США — от 8 до 15 рублей (по состоянию на 2007 г.). Несмотря на разногласия, общий вывод одинаков — курс доллара США в РФ завышен в несколько раз.

Международные сопоставления на основе ППС приводят к принципиально иным результатам, чем на основе официальных курсов обмена валют. В качестве примера приведем табл.4.10, демонстрирующую это различие на примере валового национального дохода (ВНД) десяти ведущих стран мира [6]. Таблица составлена на основе «Доклада о мировом развитии», представленного Всемирным банком в 2004 г. [3]. Валовой национальный доход страны — одна из основных её макроэкономических характеристик

[10, 25]. ВНД меньше валового национального продукта (ВНП) на величину амортизационных отчислений. Другими словами, ВНД аккумулирует добавленную стоимость, произведенную живым трудом в течение года, в то время как в ВНП входят и перенесенные на вновь созданные товары и услуги результаты прошлого труда. Все показатели табл.4.10 рассчитаны специалистами Всемирного банка по принятым в этой организации методикам.

Таблица 4.10

Валовой национальный доход (ВНД) на 2002 г., млрд. долларов

№	Страна	Объем ВНД	Место в мире по ППС	Объем ВНД по ППС
1	США	10110	1	10100
2	Китай	1210	6	5625
3	Япония	4266	2	3315
4	Индия	502	11	2691
5	Германия	1870	3	2163
6	Франция	1343	5	1556
7	Великобритания	1486	4	1523
8	Италия	1098	7	1467
9	Бразилия	497	12	1266
10	Россия	308	16	1127

В табл.4.10 страны упорядочены в соответствии с убыванием объема ВНД, рассчитанного по паритету покупательной способности. Видно, что упорядочение по этому показателю значительно отличается от упорядочения по ВНД, соответствующего средним обменным курсам 2002 г. Китай с шестого места поднялся на второе, далеко опередив Японию, Германию, Великобританию, Францию, которые предшествовали ему по «официальному» ВНД. Индия поднялась с одиннадцатого места на четвертое, Бразилия — с двенадцатого на девятое, Россия — с шестнадцатого на десятое. Соответственно сдвинулись вниз ведущие европейские страны.

Особенно интересно обсудить положение экономики Китая в мире. По некоторым оценкам, уже сейчас Китай обладает самой мощной экономикой в мире, его ВВП превышает ВВП

США. По «экономической силе» на первом месте — Китай, на втором — Европейский Союз, и только на третьем — США. Это упорядочение необходимо учитывать российским организациям при стратегическом планировании. А студентам, нацеленным на перспективу, пора учить китайский язык.

Проблема учета инфляции при экономическом анализе финансово-хозяйственной деятельности предприятия. Индексы инфляции используются для пересчета номинальных цен в неизменные (сопоставимые). Другими словами, для приведения доходов и расходов к ценам определенного момента времени. Потребительские корзины для промышленных предприятий, конечно, должны включать промышленные товары, а потому отличаться от потребительских корзин, ориентированных для изучения жизненного уровня. Однако «в первом приближении» можно использовать потребительскую корзину ИВСТЭ или применять индексы инфляции Росстата, особенно для тех организаций, для которых в структуре себестоимости выпускаемых товаров и услуг большое место занимает оплата труда.

Рассмотрим условное предприятие. В табл.4.11 представлена информация о прибыли предприятия по годам. Эти значения взяты из ежегодных отчетов, сданных в налоговые органы, и выражены в номинальных денежных единицах. Видим, что прибыль год от году растет, за 6 лет выросла на 80%. Напрашивается вывод, что предприятие процветает, его руководители заслуживают похвал и наград.

Однако не будем торопиться. Приведем прибыль к сопоставимым ценам. В качестве точки отсчета естественно взять начало тысячелетия, т.е. конец 2000 г. — начало 2001 г. Другими словами, приведем интересующую нас характеристику работы предприятия к сопоставимым ценам на 1 января 2001 г. Именно в этих ценах выражена прибыль 2000 г. Будем использовать официальные данные Росстата (табл.4.8). Индексы инфляции «в разах» приведены в столбце (4) табл.4.11.

Для приведения прибыли 2001 г. к сопоставимым ценам на начало года достаточно разделить ее на годовой индекс инфляции: 1,1/1,186 = 0,927. Вот уже первая неожиданность: реальная прибыль не выросла в 2001 г. на 10% по сравнению с 2000 г., как номинальная, а, наоборот, упала на 7,3%.

Таблица 4.11

Динамика прибыли предприятия, млн. руб.

№	Год	Прибыль, млн. руб.	Индекс инфляции	Накопленная инфляция	Прибыль в сопоставимых ценах
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	2000	1,0			1,0
2	2001	1,1	1,186	1,186	1,1/1,186 = 0,927
3	2002	1,3	1,151	1,365	1,3/1,365 = 0,952
4	2003	1,4	1,12	1,529	1,4/1,529 = 0,912
5	2004	1,5	1,117	1,708	1,5/1,708 = 0,878
6	2005	1,7	1,109	1,894	1,7/1,894 = 0,896
7	2006	1,8	1,09	2,064	1,8/2,064 = 0,872

Чтобы привести к сопоставимым ценам прибыль 2002 г. (и следующих лет), надо сначала найти накопленную инфляцию за прошедшие годы. За 2001–2002 гг. индекс инфляции находится путем перемножения индексов за отдельные годы: $1{,}186 \times 1{,}151 = 1{,}365$. Аналогично индекс инфляции за три года (2001–2003) равен $1{,}186 \times 1{,}151 \times 1{,}12 = 1{,}365 \times 1{,}12 = 1{,}529$. За четыре года индекс таков: $1{,}529 \times 1{,}117 = 1{,}708$. За пять лет: $1{,}708 \times 1{,}109 = 1{,}894$. Наконец, за 6 лет (2001–2006): $1{,}894 \times 1{,}09 = 2{,}064$.

Рассчитанные значения прибыли в сопоставимых ценах приведены в столбце (6) табл.4.11. Наблюдаем совсем другую картину по сравнению с номинальной прибылью. Реальная прибыль отнюдь не растет, наоборот, имеет устойчивую тенденцию к снижению. К 2006 . она снизилась на 12,6%, в то время как номинальная прибыль выросла на 80%.

И выводы получаются совсем другие. Нельзя сказать, что предприятие прогрессивно развивается. Констатируем тенденцию к застою и деградации. Руководители вряд ли заслуживают похвал и наград, наоборот, им следует тщательно проанализировать ситуацию и разработать меры улучшения работы предприятия. Хотя и надо отметить, что говорить о катастрофе преждевременно: прибыль остается положительной, ее снижение не слишком большое.

Как известно, разработана и широко применяется развернутая система коэффициентов, используемых при экономическом анализе финансово-хозяйственной деятельности предприятия [1]. Она основана на данных бухгалтерского баланса. Естественно, опирается на два столбца баланса — данные на «начало периода» и данные на «конец периода». Записывают в эти столбцы номинальные значения. В настоящее время согласно правилам бухгалтерского учета инфляцию полностью игнорируют (за исключением периодических корректировок стоимости основных фондов в соответствии с принимаемыми руководством страны нормативными документами). Это приводит к искажению оценки реального положения предприятия — если пользоваться только данными текущего бухгалтерского учета. Денежные средства преувеличиваются, а реальная стоимость основных фондов занижается. По официальной отчетности предприятие может считаться получившим хорошую прибыль, а по существу — не иметь средств для продолжения производственной деятельности, например, для закупки необходимого сырья.

Ясно, что учитывать инфляцию надо. Вопрос в другом — как именно. Потребительская корзина должна, видимо, состоять из тех товаров и услуг, которые предприятие закупает. Стоимость основных фондов может не убывать в соответствии с амортизацией, а возрастать согласно отраслевому темпу инфляции (уменьшенному на амортизационные коэффициенты), и т.д. Обсуждение конкретных методик расчетов выходят за пределы настоящего учебника.

Сколько стоит предприятие? Специалисты по оценке бизнеса используют три подхода — затратный, доходный и сравнительный [26]. Согласно первому из них важно оценить основные фонды. Для этого нужно взять их стоимость в определенный момент времени, например, в 1990 г., и умножить на индекс инфляции (и учесть амортизационные отчисления). Вспомним здесь, что официальный индекс инфляции Госкомстата-Росстата в 1,5 раза меньше , чем наш, если отсчитывать от 1990 г.

(см. табл.4.8). Есть много способов исказить экономические показатели, и «специалисты» ими умело пользуются. Занижение индекса инфляции выгодно тем, кто хочет обзавестись собственностью по заниженной цене.

В мировой практике известны различные варианты учета инфляции в бухгалтерской деятельности и в работе финансовых аналитиков [13].

4.5. Динамика цен на продовольственные товары

Проведем сравнительный анализ результатов расчетов на основе различных потребительских корзин с целью оценки точности определения темпов роста цен.

Сравнение индексов инфляции Госкомстата РФ и ИВСТЭ. Результаты расчетов по различным потребительским корзинам дают, естественно, различные значения индексов инфляции, хотя эти различия, как представляется, не слишком значительны. Так в табл.4.3 приведена потребительская корзина Центра экономической конъюнктуры (ЦЭК) при Правительстве Российской Федерации и Государственного комитета Российской Федерации по статистике, короче — корзина Госкомстата РФ. А в табл.4.4 дана потребительская корзина ИВСТЭ. Было проведено сравнение соответствующих индексов инфляции. Полученные результаты (табл.4.12) показали, что эти индексы достаточно близки.

Таблица 4.12

Сравнение результатов подсчета стоимостей потребительских корзин и индексов инфляции Госкомстата РФ и ИВСТЭ

Промежуток времени	Стоимость корзины и индекс инфляции	
	Госкомстат РФ	ИВСТЭ
с 14.03.91 по 14.03.94	30,82 / 48990,33 1589,8	26,85 / 40889,1 1598,88
с 15.11.93 по 14.03.94	31255 / 48990,33 1,57	28050 / 40889,1 1,46
с 19.05.94 по 26.05.94	56670,2 / 57667,75 1,02	55615 / 56332 1,01

Примечание. В табл.4.12 верхние числа — стоимости потребительских корзин (в руб.) соответственно на первую указанную дату и через дробь — на вторую, нижнее число — индекс инфляции за данный период.

Близость различных индексов инфляции за большой промежуток времени объясняется тем, что цены растут в целом достаточно согласованно, «аномалии» выправляются: если темп роста цены определенного продукта отстает от среднего роста цен, то имеются основания полагать, что его цена в ближайшее время сильно возрастет. Однако на малых и средних промежутках времени проявляется различие роста цен на отдельные товары.

Тем более интересно, что официально публикуемые индексы инфляции Госкомстата РФ при отсчете с 1990 г. (или, что то же самое, с 14.03.91) давали в середине 90-х по крайней мере вдвое меньшие значения, чем расчеты Института высоких статистических технологий и эконометрики (подробнее см. коллективную монографию [12] тех лет).

Изучение динамики цен в условиях реформ. Уже более семнадцати лет в России осуществляется т.н. радикальная экономическая реформа. Одним из сопутствующих ей эффектов является изменение сложившейся к 1991 г. системы цен на все товары, услуги, труд (рабочую силу). Эти изменения цен приобрели ярко выраженный инфляционный характер. В течении семнадцати лет «радикальной реформы» произошли изменения не только абсолютных величин цен, но и их пропорций.

Масштабы инфляции были определены не только дисбалансом между скопившейся к 1992 г. у населения значительной массой наличных денег и наличием товаров, но и массовым преобразованием безналичных средств предприятий в наличные деньги в период расцвета совместных предприятий и кооперативов в 1989–91 гг. (а также отменой монополии внешней торговли, в результате чего, например, около 1/3 произведенных в СССР в 1990 г. товаров массового потребления было вывезено за границу). В дальнейшем в результате применения жестких мер (например, невыплаты заработной платы), ограничивающих поступление наличных денег на рынок товаров и услуг, а также ограничивающих количество покупателей среднего класса и тем самым обеспечивающих искусственное снижение спроса, темпы инфляции заметно снизились, но инфляция не прекратилась. Болезнь не исчезла. Удалось сбить температуру больного, т.е. отключить сигнальную систему, но не вылечить болезнь. Стоит только лишь начать платить людям наемного труда заработанные ими деньги при условии корректной оценки труда как рыночного товара, как инфляционная болезнь возобновится (как это и произошло в 2007 г. — см. ниже). В августе 1998 г. инфляция была подстегнута руководством страны путем искусственного подъема курса доллара.

Институт высоких статистических технологий и эконометрики изучает динамику экономического положения граждан России на основе независимо собранной информации. Приведение к сопоставимым ценам (с помощью индексов инфляции и дефляторов) — составная часть любого экономического расчета, связанного более чем с одним моментом времени. Как показали наши наблюдения над ценами, использование публикуемых Госкомстатом РФ значений индексов инфляции приводит к систематическим ошибкам. Так, например, по нашим данным цены за 6 с небольшим лет (с марта 1991 г. по май 1997 г.) выросли в среднем примерно в 12500 раз, а по данным Госкомстата РФ — примерно в 6000 раз. Сказанное определяет актуальность использования независимой информации о ценах и индексах инфляции при анализе экономического положения России, а также при разработке прикладных моделей и методов управления в современных условиях.

Предметом описанного здесь исследования ИВСТЭ [5, 21] является оценка изменения в ходе реформ фактического среднего и минимального физиологически необходимого уровней жизни граждан РФ через сравнение индексов инфляции, вычисленных на основании потребительских корзин, и индекса изменения величины средней заработной платы.

Организация сбора и анализа данных. В 1994– 97 гг. еженедельно собрались данные о ценах 35 продуктов в 12 точках Москвы, Подмосковья и Крыма. А именно, информация о ценах собиралась в 9 точках г. Москвы; в 2-х точках Московской области (г. Раменское и г. Ногинск) и в Крыму (г. Симферополь). Регулярное измерение цен производилось с интервалом в одну неделю по 35 различным товарам.

Расчеты по собранным ценам продовольственных товаров проводились для следующих 5 потребительских корзин:

ИВСТЭ — продовольственная потребительская (продуктовая) корзина Института высоких статистических технологий и эконометрики (табл.4.4). Составлена с учетом разработок Института питания РАМН. Является сбалансированной по белкам, жирам и углеводам. Обеспечивает минимальные физиологически необходимые потребности человека;

ГКС–1 — продуктовая корзина из 19 продуктов питания (включая сигареты) Государственного комитета РФ по статистике, применявшаяся в 1993–1996 гг. (табл.4.3);

ГКС–2 — продуктовая корзина Государственного комитета РФ по статистике, используемая с 1 января 1997 г. Нормы потребления предложены Министерством труда;

Бюдж–1 — продуктовая корзина, разработанная на основе бюджетного обследования «бедных семей» студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) (среднедушевое потребление не превосходит 90% от медианы обследованной совокупности семей). Эта корзина определяет усредненные фактические объемы потребления (кг/год/человек и, соответственно, кг/мес./человек) 35 продуктовых товаров, по которым производились измерения цен при использовании корзины **ИВСТЭ**. Общий объем затрат «бедных семей» на продуктовые и иные товары предлагается находить умножением стоимости корзины **Бюдж–1** на соответствующие коэффициенты по методу Оршански;

Бюдж–2 — продовольственная потребительских корзина, разработанная на основе бюджетного обследования семей студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) (октябрь-ноябрь 1995 г.). Совокупность обследованных семей в целом характеризуется средним уровнем потребления. Эта корзина определяет усредненные фактические объемы потребления (кг/год/человек и, соответственно, кг/мес./человек) 35 продуктовых товаров, по которым производились измерения цен в корзине **ИВСТЭ**. Общий объем затрат «семей со средним достатком» на продуктовые и иные товары предлагается находить умножением стоимости корзины **Бюдж–2** на соответствующие коэффициенты.

Количество элементарных измерений (значений собранных цен продовольственных товаров) приблизительно равно 30000. Собранные данные о ценах обрабатывались на компьютерах Macintosh как известными, так и оригинальными методами. Точность вычислений равна обычной компьютерной точности на компьютере *Macintosh* при работе с числами с плавающей точкой. В дальнейшем все средние величины цен приведены с точностью до одного рубля, а величины процентов — с точностью до 1/10 процента.

При проведении мониторинга за ценами на продукты питания исследователи обычно создают компьютерную базу данных, в которую заносят сведения вида:

1) название продукта питания;

2) объем потребления продукта;

3) цена продукта;

4) дата снятия цены;

5) название торговой точки.

Кроме того, есть вполне понятная последовательность действий (алгоритм) по вычислению индекса инфляции с момента времени t_1 по момент времени t_2:

1) вычислить сумму (по всем составляющим потребительской корзины) произведений цен на объем потребления для момента времени t_1;

2) вычислить сумму произведений цен на объем потребления для момента времени t_2;

3) найти их отношение.

Для нахождения индексов инфляции по товарным группам эти действия выполняются для продуктов искомой группы.

Для вычисления индекса инфляции по продуктам питания разработаны различные программные средства для IBM PC и для персональных компьютеров фирмы «Apple».

Результаты анализа динамики цен. Приведем некоторые результаты анализа данных о ценах. Начнем с временных рядов стоимостей потребительских корзин в Москве. Оказалось, что стоимость потребительской корзины **ГКС–2** примерно в 1,5 раза меньше стоимости потребительской корзины **ГКС–1**.

Потребительская корзина **ИВСТЭ** располагалась по стоимости примерно посередине между **ГКС–1** и **ГКС–2**. Несмотря на различие стоимостей, индексы инфляции для всех трех корзин **ГКС–1, ГКС–2, ИВСТЭ** близки и составляют 8233–8896 на конец декабря 1995 г. и 10396–10890 на конец февраля 1997 г. Любопытно отметить, что **ГКС–1** имеет наименьшие значения индекса из трех корзин, а **ГКС–2** — наибольшие, если сравнивать с мартом 1991 г. (Госкомстат РФ такие сравнения не проводит), в то время как рост цен за исследуемый промежуток времени (с конца декабря 1995 г. по конец февраля 1997 г.) наибольший рост дает корзина **ИВСТЭ** (28,05%), а наименьший — **ГКС–2** (22,42%).

Совсем иная картина со стоимостями потребительских корзин **Бюдж–1** и **Бюдж–2**. Они относятся к реальному потреблению сравнительно обеспеченных москвичей, включают в себя стоимости не только продуктов, но и других товаров и услуг, в то время как корзины **ИВСТЭ**, **ГКС–1** и **ГКС–2** дают представление о стоимости минимального набора товаров и услуг, обеспечивающего физиологические потребности человека. В конце декабря 1995 г. стоимость корзины **Бюдж–1** (для «бедных») составляла 659852 руб., а корзины **Бюдж–2** (для «средних» семей) — 726364 руб., а к февралю 1997 г. они «подросли» до 832498 руб. (на 26,16%) и 950989 руб. (на 30,92%) соответственно. Эти величины больше прожиточного минимума согласно данным Московской федерации профсоюзов (750 тыс. руб. в мае 1997 г.), хотя разницу нельзя назвать заметной.

Интереснее другое — общий рост цен (на февраль 1997 г.) составил 8060–8446, т.е. примерно на 20% меньше, чем рост стоимостей корзин **ИВСТЭ**, **ГКС–1**, **ГКС–2**. Значит, «реформы» тяжелее всего ударили по наиболее дешевым товарам, предназначенным для наиболее бедной части населения. Это связано, видимо, с сокращением и прекращением дотаций для таких товаров. Правда, затем темпы роста выровнялись — при сравнении февраля 1997 г. с декабрем 1995 г. они составляют 28,05% для корзины **ИВСТЭ**, 26,27% — для **ГКС–1**, 26,16% — для **Бюдж–1** и 30,92% для **Бюдж–2**. Особняком стоит **ГКС–2**– 22,42%, заметно меньше, чем для других корзин.

В то же время наибольший рост для корзины **Бюдж–2** может указывать на тенденцию более быстрого роста цен на товары, предназначенные для более состоятельных людей.

Анализ временных рядов стоимостей потребительских корзин и индексов инфляции по Подмосковью в целом подтверждает приведенные выше выводы, сделанные по московским данным. Снова наблюдаем близость роста цен с 1991 г. для корзин **ИВСТЭ**, **ГКС–1**, **ГКС–2**, снова **ГКС–2** в полтора раза дороже **ГКС–1**, снова темп роста с декабря 1995 г. меньше всего из этих трех корзин у **ГКС–2.** Снова индексы с 1991 г. для корзин **Бюдж–1** и **Бюдж–2** на 20–25% меньше, чем для первых трех корзин. Однако с декабря 1995 г. наибольший рост стоимости корзины — не у двух последних, а у **ГКС–1** (на втором месте — корзина **ИВСТЭ**). Возможно, это отражает меньшую долю состоятельных людей в Подмосковье и соответственно меньшую ориентацию торговцев на их «покупательные» возможности.

Обращает на себя внимание меньшая величина индексов с марта 1991 г. в Подмосковье по сравнению с Москвой. Возможно, дело в том, что стоимости потребительских корзин по состоянию на 31 марта 1991 г. брались те же, что и в Москве, поскольку сведения о ценах на тот момент в Московской области у нас отсутствуют. Это приводит к занижению истинных значений индексов инфляции, поскольку и до 31 марта 1991 г. цены в Подмосковье были несколько ниже, чем в Москве. Это относится, в частности, к ценам на овощи и фрукты, молочные продукты и др.

Вполне естественно, что с марта 1991 г. цены на различные товары выросли по-разному. Так, цены на рыбу (треска, минтай) выросли примерно в 25000 раз, а цена на сахар — менее чем в 4000 раз. Цены на творог выросли в 2,5 раза больше, чем на сыр, и т.д. В Москве и Московской области рост цен достаточно хорошо согласован. Можно было бы предположить, что в рыночных условиях были исправлены диспропорции прежней дотационной плановой системы. Тогда рост цен после декабря 1995 г. должен был бы быть примерно равномерным, отражающим динамику общеэкономических процессов. Однако конкретные эмпирические данные о динамике цен отвергают это предположение.

В Москве при общем среднем росте цен на 20–30 % больше всего выросли цены на огурцы (74,8%), баранину (75,9%), птицу (74,5%), упали цены на капусту (- 4,6%), сахар (— 5,5%). В Московской области при таком же среднем росте цен больше всего выросли цены на мясо — на говядину (82,6%), свинину (88,6%), баранину (107,6%), при этом упали цены на картофель (–10%), капусту (–10%), сахар (–13,1%), конфеты (–21,1%), минтай (–6,5%), растительное масло (–20,6%) и маргарин (— 13 %).

Приходится констатировать, что цены растут непропорционально, стабилизация цен не наступила, более того, динамика цен на отдельные товары не только не согласована, но и отнюдь не близка. ***Нет никаких признаков приближения к равновесным ценам***, чего можно было бы ожидать после пяти лет «либерализации» в соответствии с учебниками экономической теории. В качестве дополнительного следствия из сказанного вытекает, что, подбирая нужным образом номенклатуру товаров для потребительской корзины, можно получить индекс инфляции желательной величины — от значительного роста (+ 80 %) до падения цен (- 20 %).

Временные ряды наименьшей, средней и наибольшей из зарегистрированных по Москве цен 35 продовольственных товаров показывают, что **такое понятие, как «цена товара», строго говоря, не корректно**. Оно применимо к единственному акту купли-продажи определенного товара в фиксированном месте, в крайнем случае — к актам купли-продажи в определенном магазине, но не к огромному городу в целом. Действительно, зафиксированные нашими сотрудниками цены на один и тот же товар в один и тот же день могут различаться в несколько раз. Так, 26 июня 1996 г. максимальная зафиксированная цена на рис превышает минимальную в 3,04 раза, а на картофель — в 3,13 раза. Аналогичное превышение для баранины 27 декабря 1996 г. равно 2,79. Типовое же превышение максимальной цены над максимальной — в 1,5 раза. Ничего странного в сказанном нет — всем московским потребителям известно, что наибольшие цены — в центральных престижных магазинах, средние — в рядовых магазинах, наименьшие — на «оптовых» рынках.

С целью обеспечение сопоставимости данных сотрудники ИВСТЭ собирали данные в одних и тех же местах (магазинах, киосках, рынках). Это позволяло отслеживать рост цен и получать корректные значения индексов инфляции. Однако это делало несколько условной стоимость потребительской корзины — потребитель, потратив время и обойдя достаточное количество мест продажи,, мог обеспечить себя теми же продуктами по менее высоким ценам. Дополнительную сложность вносит большая номенклатура видов одного и того же товара. На какой тип батона белого хлеба ориентироваться? Что понимать под говядиной — отечественную или импортную, вырезку или кости для супа? Объективно существующая свобода при решении организаторами исследования жизненного уровня подобных вопросов дает возможность для сдвига результатов в заранее заданном направлении. Объективно цены не являются стабильными в пространстве и во времени.

На практике указанные сложности в основном преодолимы. Оказалось, в частности, что стоимость потребительских корзин в различных районах Москвы отличается хотя и отличается, но не более чем на 5–10%. Отклонения в стоимости отдельных продуктов частично компенсируют друг друга.

Нами изучены вклады отдельных продовольственных товаров в стоимости потребительских корзин. Обращает на себя внимание различие между нормативными (т.е. заданными априори) корзинами **ИВСТЭ**, **ГКС–1**, **ГКС–2** и полученными в результате анализа реального потребления корзинами **Бюдж–1** и **Бюдж–2**. В реальном потреблении гораздо меньше муки, пшена, геркулеса, ржаного хлеба, картофеля, трески, минтая, молока, маргарина, но гораздо больше лука, яблок, конфет, колбасы, сельди, сливочного масла, сыра. Объяснение достаточно очевидное: корзины **ИВСТЭ**, **ГКС–1**, **ГКС–2** — это «корзины выживания», действительно минимальные по стоимости корзины, в то время как корзины **Бюдж.1** и **Бюдж.2** — это корзины реального потребления в семьях студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) различного достатка.

Продовольственные товары, на наш взгляд, можно разделить на две группы. Цены на одни растут монотонно, без всякой связи со временем года, т.е. ведут себя примерно так же, как промышленные товары. Можно предположить, что индексы инфляции, построенные по подмножеству таких товаров, представляют собой общие индексы, «очищенные от сезонности», а потому лучше описывающие реальное состояние экономики, чем исходные индексы. Однако при их применении теряется связь со стоимостью корзины выживания, обеспечивающей существование без физиологического вырождения.

Второе подмножество — это товары с ярко выраженной сезонностью, прежде всего овощи, цены на которые падают во второй половине лета и осенью, а затем начинают возрастать. Наличие этой составляющей приводит к тому, что рост стоимостей корзин практически останавливается летом, а наиболее быстрым является зимой.

Можно ли управлять процессом роста цен? Мы наблюдали результаты явно административного воздействия: в ноябре 1995 г., перед выборами в Государственную Думу, цены в Москве внезапно упали на 9%, хотя в ноябре цены обычно растут быстрее, чем в иное время года. Тем не менее необходимо констатировать, что обычно изменение цен происходит на микроэкономическом уровне, хотя и провоцируется макроэкономическими процессами, в частности, монопольными изменениями цен на энергоносители.

Ложная, на наш взгляд, идея монетаристов состоит в том, что они считают необходимым бороться с инфляцией, сокращая денежную массу в стране, например, не выплачивая вовремя зарплату и пенсии. Однако, как пишет академик-секретарь Отделения экономики РАН Д.С. Львов: «Макроэкономические расчеты показывают, что за каждый процент сокращения инфляции приходится расплачиваться тремя-пятью процентами спада производства» [9, с.11]. Основной удар монетаристской политики приходится не по инфляции, а по производству.

Процесс инфляции частично управляем административными методами. Осенью 1996 г. спрогнозированного ИВСТЭ роста цен не произошло, что объясняется изменением условий — правительство перешло к борьбе с инфляцией путем гигантского роста задолженностей по зарплате, пенсиям и другим платежам (например, детским пособиям, стипендиям студентов).

Если у населения нет денег — торговцы не поднимают цены. Так, в Москве за 2 года — с лета 1995 г. по лето 1997 г. цены выросли примерно на 50%, в то время как в г. Иваново — лишь на 15%, а импортные товары на ивановских рынках стоят на 1/3 дешевле, чем на московских (хотя эти импортные товары закупаются в Москве). Объяснить это можно тем, что экономическое положение в Иваново гораздо хуже, чем в Москве, ниже уровень доходов, больше безработных, что вынуждены учитывать торговцы.

Расчет индекса инфляции — вспомогательная задача, решение которой необходимо для приведения экономических характеристик к сопоставимому виду. Важнейшей задачей является расчет реальной заработной платы, равной частному от деления номинальной заработной платы на индекс инфляции. Известно, что цены на промышленные товары и на услуги, как правило, растут быстрее, чем на продовольствие. Поэтому рассчитываемые по продовольственным потребительским корзинам значения индексов инфляции дают оценку снизу для роста потребительских цен и стоимости жизни в целом.

Минимальный прожиточный минимум оцениваем по методу американской исследовательницы польского происхождения М. Оршански [29] с коэффициентом Энгеля 0,5. Этот метод основан на расчете стоимости минимальной продовольственной корзины и учете стоимостей остальных минимально необходимых затрат с помощью коэффициентов. Так, для «бедных семей» студентов Московского государственного института электроники и математики (технического университета) во время пробного бюджетного обследования в октябре-ноябре 1995 г. затраты на продовольствие составили 52% от всех расходов. Поэтому стоимость прожиточного минимума для них получим, приняв за 52% стоимость минимальной продовольственной корзины **ИВСТЭ**, т.е. умножив ее стоимость на 1/0,52 = 1,92.

Метод М. Оршански предполагает, что структура затрат практически не меняется. Однако, как уже отмечалось, цены на промышленные товары и на услуги растут быстрее, чем на продовольствие. Поэтому замена 1,92 на 2,00 представляется обоснованной. Полученные значения (на май 1997 г. — 700 тыс. руб. в месяц на человека) хорошо согласуется с уже цитированными данными Московской федерации профсоюзов (750 тыс. руб.). Отметим, что для всей совокупности семей, чьи бюджеты были обследованы в 1996 г., затраты на продовольствие составили 42 %, т.е. для них коэффициент Оршански равен 1/0,42 = 2,38.

Средняя (начисленная) заработная плата в Москве составляла в декабре 1996 г. 1,12 миллиона руб. (в России — 0,84 млн.). В сопоставлении со сказанным выше (с учетом логнормального характера функции распределения доходов и наличия детей) это означает, что даже в Москве по крайней мере половина семей живет ниже прожиточного уровня. В 1990 г. средняя зарплата превышала прожиточный минимум в 5,5 раз, а в 1997 г. — лишь в 1,2 раза (по России), т.е. уровень жизни упал в среднем в 4,6 раза. Он весной 1998 г. соответствовал концу 50-х — началу 60-х годов. За август-сентябрь 1998 г. корзина **ИВСТЭ** подорожала в 1,5 раза (а средняя зарплата практически не изменилась), следовательно, уровень жизни упал уже в 7 раз, и по покупательной способности зарплаты рядовые граждане «приблизились» к возможностям начала 50-х годов.

Переход к сопоставимым ценам необходимо использовать также при расчете таких макроэкономических характеристик, как валовой внутренний продукт, объем бюджетных ассигнований и т.д. С учетом сказанного выше можно утверждать, что экономика России с 1990 г. по 1998 г. была «сокращена» в 4–6 раз, что соответствует сдвигу назад по времени на 35–45 лет.

Материалы описанного исследования ИВСТЭ были опубликованы в 1998– 1999 гг. в работах [5, 21].

Инфляция в XXI веке. Использование одной и той же потребительской корзины обеспечивает возможность сопоставления результатов расчетов за различные временные периоды. Этим работы ИВСТЭ выгодно отличается от подхода официальной статистики. Как известно, Госкомстат РФ (ныне — Росстат) в 1993–2008 гг. из конъюнктурных соображений неоднократно менял состав потребительской корзины и объемы потребления входящих в нее товаров. Однако в начале XXI в. потребительская корзина официальной статистики мало отличалась от нашей. Здравый смысл восторжествовал — статистическое ведомство решило исходить из тех же разработок специалистов-диетологов РАМН, на которые мы опирались еще в 1993 г. На основе наших исследований инфляции была составлена глава 7 учебника [17] и соответствующий раздел учебного курса. Следующий шаг был сделан ИВСТЭ весной 2004 г. [22].

Студенты факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана раз в месяц собирали данные о ценах и рассчитывали индекс инфляции. С целью сопоставимости результатов студент все четыре раза собирал данные на продукты одних и тех же конкретных наименований (марок, сортов) и в одних и тех же торговых организациях. По данным за февраль, март и апрель 2004 г. методом наименьших квадратов строился точечный и непараметрический интервальный прогноз (см. главу 3 выше) на май, который затем сопоставлялся с реальностью.

Собранные данные позволили изучить разброс значений индекса инфляции в зависимости от конкретных мест сбора данных. Рассмотрим значения индекса инфляции $I(t_1, t_2)$ на текущий момент t_2 = 14 мая 2004 г., соответствующие базовому моменту t_1 = 14 марта 1991 г. (табл.4.13 — по Москве, табл.4.14 — по Московской области).

Статистические характеристики для двух выборок индексов инфляции, приведенных в табл.4.13 и 4.14, содержатся в табл.4.15. Они показывают, что индекс инфляции — это не число, а типичная нечисловая экономическая величина (см. [16] и главу 7 ниже). Индекс инфляции в Москве можно описать интервалом [39,1; 62,43], а в Московской области — интервалом [44,02; 57,32].

Таблица 4.13

Индексы инфляции в Москве в мае 2004 г.

39,10	40,50	40,56	40,70	41,56	41,73	44,03	47,18
47,18	47,30	48,40	49,27	51,45	52,67	52,70	53,04
54,60	55,00	55,01	55,33	55,62	56,40	57,15	57,29
57,65	57,72	57,80	58,26	58,40	59,59	62,43	

Таблица 4.14

Индексы инфляции в Московской области в мае 2004 г.

44,02	48,11	50,40
51,02	51,08	54,12
54,12	55,65	57,32

Таблица 4.15

Результаты статистической обработки данных об инфляции (май 2004 г.)

Статистические характеристики	Москва	Подмосковье
Минимум	39,1	44,02
Максимум	62,43	57,32
Объем выборки	31	9
Выборочное среднее арифметическое	51,47	51,76
Среднее квадратическое отклонение	6,80	4,08

Нечисловой характер индекса инфляции позволяет, тем не менее, сделать полезные для практического применения выводы:

1) В мае 2004 г. индекс инфляции равен приблизительно 50 ($\pm$20%), т.е. 50 руб. мая 2004 г. по своей покупательной способности соответствуют 1 руб. марта 1991 г.

2) Индексы инфляции в Москве и Московской области практически совпадают.

В мае 2004 г. в Москве стоимость минимальной продовольственной корзины оценивается как (27 руб. 11 коп.) × 51,47 = 1400 руб., а прожиточный минимум — как 2800 руб. в месяц.

Индекс инфляции — это эконометрический инструмент, позволяющий доказательно обсуждать и решать те или иные экономические проблемы. Например, проблему соотношения зарплаты и прожиточного минимума [28]. Средства массовой информации часто рассматривают эту тематику. К сожалению, не всегда обсуждение является доказательным, а выводы — обоснованными. Так, в статье [2] утверждается, что мы в конце 2003 г. «живем, как в 1985 году». Это не так.

Сравним уровни жизни в 1985 г. и в 2003 г. Поскольку цены на основные продовольственные товары до марта 1991 г. не росли, можно признать, что индекс инфляции с 1985 г. по конец 2003 г. совпадает с таковым с марта 1991 г. по конец 2003 г., т.е. согласно [17, 3-е изд.] с достаточной для расчетов точностью равен 50 (см. табл.4.6, 4.8). В статье [2] приведены значения средней зарплаты по стране — 199 руб. в 1985 г. и 5722 руб. в конце 2003 г. Номинальная зарплата выросла в 29 раз, а цены — в 50 раз. Значит, реальная зарплата сократилась в 1,7 раза. В 1985 г. средняя зарплата почти в 4 раза превосходила прожиточный минимум, а в 2003 г. — лишь в 2 с небольшим раза.

В 2004 г. среднестатистический гражданин РФ живет гораздо хуже, чем в 1985 г. Основную причину назвал Президент РФ В.В. Путин в Послании 2004 г. Федеральному Собранию РФ: валовой внутренний продукт (в сопоставимых ценах) в 2003 г. меньше, чем в 1989 г. (динамика макроэкономических показателей России анализируется в [19, с.285]). Большое значение имеет резко возросшая дифференциация доходов. Измеряющий ее децильный коэффициент увеличился за эти годы с 3 до 15; в развитых странах его значение — около 7.

Крупное исследование было проведено через три с половиной года. Студенты собрали данные о ценах и рассчитали индексы инфляции в Москве и Московской обл. за период с $t_1 = 14$ марта 1991 г. до $t_2 = 26$ ноября 2006 г. (табл. 4.16, 4.17). Обработка данных была проведена О.Ю. Проскуриной.

Таблица 4.16

Индексы инфляции в Москве в ноябре 2006 г.

46,14	46,44	48,26	49,21	49,27	49,71
50,29	51,05	51,07	52,52	53,64	53,75
53,83	54,36	54,68	55,07	57,16	57,83
57,83	58,7	59,11	59,12	60,41	60,41
60,53	60,57	63,81	65,9	68,01	72,15
72,15	72,15	72,15	72,23	73,3	83,61

В Москве индексы инфляции были рассчитаны по ценам в таких торговых организациях, как гипермаркет «Ашан», супермаркет «SPAR», гипермаркет «Метро», супермаркет «Перекресток», другие магазины, рынки. Проверка на однородность двух выборок — индексов инфляции в гипермаркете «Ашан» и индексов инфляции в «других магазинах», не входящих в сети — с помощью критерия Крамера-Уэлча [17] показала, что выборки однородны, а, следовательно, их можно объединить в одну.

Слушатели программы «Топ-менеджер» (Мастер делового администрирования / MBA) Академии народного хозяйства при Правительстве РФ собрали данные о ценах и рассчитали индексы инфляции в ряде регионов РФ 2006 г. (табл.4.18).

Таблица 4.17

Индексы инфляции в Московской области в ноябре 2006 г.

39,84	49,15	52,58	58,65
63,51	66,09	68,09	69,18

Таблица 4.18

Индексы инфляции по регионам России

№	Город, регион	Дата	Индекс
1	Владимир	22.02.07	44,5
		22.03.07	46,8
2	Иркутск	09.01.07	42,38
		09.02.07	42,97
3	Красноярск (1)	25.11.06	59,50
		30.01.07	61,77
4	Красноярск (2)	25.11.06	64,60
		08.02.07	66,86
5	Калужская обл., г. Малоярославец	20.12.06	46,86
		10.02.07	48,51
6	Нижний Новгород	10.11.06	43,16
		21.05.07	47,0

№	Город, регион	Дата	Индекс
7	Новосибирск	01.03.07	51,79
		01.05.07	53,74
8	Петропавловск-Камчатский	10.11.06	28,94
		25.01.07	32,96
9	Ростов-на-Дону (1)	01.02.05	51,99
		01.02.07	67,67
10	Ростов-на-Дону (2)	01.02.07	39,66
		01.03.07	46,63
11	Ростов-на-Дону (3)	01.02.07	43,83
12	Татарстан, г. Бавлы	10.11.06	33,72
		25.01.07	36,05
13	Томск	25.12.06	49,86
		01.02.07	51,03
14	Тюменская обл., п. Боровский	Янв. 07	38,37
		Март 07	41,27
15	Череповец	01.11.06	48,1
		20.01.07	54,3

Примечание. Несколько исследований, проведенных в одном городе, указаны под разными порядковыми номерами. Следует иметь в виду, что стоимости потребительской корзины ИВСТЭ в марте 1991 г. для разных регионов различаются, иногда существенно.

Статистические характеристики для выборок индексов инфляции, приведенных в табл. 4.16– 4.17, содержатся в табл.4.19. Они показывают, что индекс инфляции имеет заметный разброс, это не число, а типичная нечисловая экономическая величина [16]. В соответствии с приведенными данными индекс инфляции в Москве можно описать интервалом [46,14; 83,61], в Московской области — интервалом [39,84; 69,18]. Статистическую обработку данных, приведенных в табл.4.18, проводить было бы необоснованно, поскольку регионы, в которых проводились исследования, не представляют собой представительную (репрезентативную) выборку из генеральной совокупности регионов России (см. главу 1). Кроме того, различаются даты снятия информации о ценах. Поэтому для включения в посвященный РФ столбец отобрана лишь часть данных. Тем не менее табл.4.18 дает предварительное представление о динамике цен в регионах России. В частности, подтверждается высказанное ранее утверждение о том, что официальные статистические органы систематические занижают индексы инфляции: приведенное в табл.4.8 значение 39,194 меньше 24 из 29 индексов инфляции, замеренных слушателями Академии народного хозяйства.

Таблица 4.19

Результаты статистической обработки данных об индексах инфляции *I*(1990, 11.2006) в ноябре 2006 г.

Статистические характеристики	Москва	Подмосковье	РФ
Минимум	46,14	39,84	42,38
Максимум	83,61	69,18	64,6
Объем выборки	36	8	6
Выборочное среднее арифметическое	59,07	58,39	53,40
Среднее квадратическое отклонение	9,74	9,04	7,67

Судя по собранным данным, структура стоимости потребительской корзины в среднем по Москве сравнительно мало изменилась с марта 1991 г. по декабрь 2006 г. (рис.4.1).

Рис. 4.1. Структура стоимости минимального набора продуктов питания

Нечисловой характер индекса инфляции позволяет, тем не менее, сделать полезные для практического применения выводы:

1) в 2007 г. индекс инфляции равен приблизительно 60, т.е. современные 60 руб. по своей покупательной способности примерно соответствуют 1 руб. марта 1991 г.;

2) индексы инфляции в Москве и Московской области практически совпадают и достаточно близки к индексам инфляции по большинству других регионов РФ;

3) в ноябре 2006 г. в Москве стоимость минимальной продовольственной корзины оценивается как (27,11 руб.) ×59,07 = 1601,4 руб., а прожиточный минимум — как 3202,8 руб. в месяц (в соответствии с методом Оршански [29] с коэффициентом Энгеля С = 2,0).

Отметим для сравнения, что по методике и данным Росстата (www.gks.ru), стоимость минимального набора продуктов питания в среднем по России в конце ноября 2006 г. составила 1443,6 рубля в расчете на месяц.

В 2007– 2008гг. наблюдаем всплеск роста цен (табл.4.19–4.21). Табл.4.19 (Москва и Подмосковье) рассчитана по данным ф-та ИБМ МГТУ им. Н.Э.Баумана, табл.4.19 (РФ) и табл.4.20 получена слушателями программы «Топ-менеджер» (МБА) Бизнес-школы АНХ при Правительстве РФ, табл.4.21 — слушателями Бизнес-школы МВА МИРБИС, т.е. действующими менеджерами высшего звена организаций и предприятий различных регионов РФ и Москвы.

Таблица 4.20

Индексы инфляции в РФ на конец 2007 г. — начало 2008 г.

№	Регион	Дата t_1	$I(90,t_1)$	Дата t_2	$S(t_2)$,мес	$I(90,t_2)$	$I(t_1,t_2)$
1	Якутск	01.11.07	76,067	01.01.08	2074,67	84,519	11,1%
2	Хабаровск	30.11.07	66.87	30.12.07	1759.21	68,79	2,9%
3	Петропавловск-Камчатский	09.12.07	93,70	10.01.08	2576,69	102,31	9%
4	Малоярославец	12.06	55,09	01.08	2153,49	84,21	53%
5	Красноярск	08.12.07	82,81	12.01.08	2486,29	97,58	18%
6	Тюмень	05.12.07	75,36	10.01.08	2297,28	82,94	10%
7	Красноярск	26.10.07	47,77	10.01.08	1594,42	63,17	32,2%
8	Нижневартовск	01.11.07	54,45	01.01.08	1949,92	62,513	14,8%

№	Регион	Дата t_1	I(90,t_1)	Дата t_2	$S(t_2)$,мес	$I(90,t_2)$	$I(t_1,t_2)$
9	Екатерин-бург	01.12.07	50,28	10.01.08	2142,82	84,10	67%
10	Рязань	01.11.07	63,28	01.01.08	1785,92	69,84	10%
11	Москва	26.11.07	88,80	26.12.07	2280,69	88,84	0,05%
12	Новоси-бирск	01.12.07	84,09	13.01.08	2167,30	84,75	0,78%
13	Самара	28.11.07	67,5	08.01.08	1762,17	68,9	2%

Анализ приведенных в табл.4.19– 4.21 результатов измерений роста цен приводит к ряду интересных и практически полезных выводов [20]. В частности, в Екатеринбурге цены за полтора месяца выросли на 67%, в Красноярске за два с половиной — на 32%, в Малоярославце за последний год — на 53%. Данные Росстата — 11,9% за 2007 год. Средний результат по табл.4.20 и 4.21– 13,8 % за последние месяц-два. Средний рост цен с 1990 г. — в 81,69 раз, т.е. на один рубль можно было купить в 1990-м году столько же, сколько на 81 рубль 69 копеек в январе 2008 года. А год назад индекс инфляции был заметно меньше — 59,07 (табл.4.19, Москва). Рост на 38,3%. В три с лишним раза больше, чем по данным Росстата.

Таблица 4.21

Индексы инфляции на конец 2007 г. — начало 2008 г., Москва)

№	Дата t_1	I(90, t_1)	Дата t_2	S(t_2),мес.	I(90, t_2)	I(t_1, t_2)
1	28.12.07	115,08	30.01.08	2992.42	117,01	1,68%
2	28.12.07	73,61	29.01.08	1944.66	76,04	3,30%
3	27.12.07	76,60	31.01.08	2034,95	79,57	3,88%
4	27.12.07	65,53	31.01.08	-	68,37	4,33%
5	27.12.07	79,25	31.01.08	2074.60	81,12	2,36%
6	28.12.07	115,492	29.01.08	3109.94	121,01	5,30%
7	01.01.08	75,38	01.02.08	2035,45	79,59	5,58%
8	16.01.08	92,73	31.01.08	2472,84	96,70	4,28%
9	01.01.08	98,96	01.02.08	2695,68	105,41	6,52%
10	10.12.07	66,99	10.01.08	1735,22	67,85	1,29%

Отметим, что расхождение результатов расчетов по независимо собранной информации и данных официальной статистики частично объясняется тем, что в последние годы Росстат в очередной раз сменил потребительскую корзину. Это делает еще более неясной связь сообщаемых им численных значений инфляции с динамикой реальных экономических процессов (на эту неясность обращали внимание участники дискуссии, проведенной в ходе журналистского расследования [23]). Как следствие, констатируем, что каждое физическое и юридическое лицо может самостоятельно измерять рост цен с помощью методики, подробно изложенной в настоящей главе. Таким путем целесобразно бороться с монополией Росстата на результаты измерений инфляции.

Отметим еще одну особенность последних лет. Коэффициент Энгеля $C = 2{,}0$ при оценке прожиточного минимума был получен на основе бюджетного исследования середины 90-х. Им можно пользоваться лишь при условии постоянства структуры расходов. Однако в последние годы резко растет доля расходов на оплату жилищно-коммунальных услуг. Это означает, что доля расходов на продовольствие у всех семей и особенно у бедных заметно снижается. Следовательно, коэффициент Энгеля $C = 2{,}0$ должен быть повышен, по экспертной оценке, до 3,0 (в 2009 г.).

Инфляция за 80 лет. Нет необходимости связывать возможность расчета индекса инфляции с каким-либо определенным интервалом времени и даже с определенным социально-экономическим строем. Можно формально вычислить индексы инфляции и за весьма длительные промежутки времени. Так, например, рост цен на основные продукты питания с 1913 г. по апрель 1994 г. представлен в табл.4.22.

Таблица 4.22

Цены в 1913 г. и в апреле 1994 г. (руб./кг)

Наименование продукта	Цена в 1913 г.	Цена в апреле 1994 г.
Хлеб пшеничный	0–05	740
Хлеб ржаной	0–03	400

Наименование продукта	Цена в 1913 г.	Цена в апреле 1994 г.
Молоко	0–14	625
Сыр	0–40	6150
Масло сливочное	0–55	5100
Масло растительное.	0–13	2300
Сметана	0–30	2500
Говядина	0–23	2760
Свинина	0–20	4000
Баранина	0–17	2000

Используя объемы потребления из потребительской корзины ИВСТЭ, получаем, что индекс инфляции за 1913– 1994 гг. составил 11297, или 1129600%. Подобные расчеты позволяют оценить реальное значение количественных экономических величин, используемых в публикациях разных лет.

Отметим, что представление о прожиточном минимуме меняется со временем. Еще двадцать лет назад выход в Интернет и мобильная телефонная связь были уделом избранных, а сейчас эти услуги пора включать в прожиточный минимум. С другой стороны, во многих городах дрова перестали быть предметом первой необходимости, а потому нет необходимости и возможности отслеживать цены на дрова. Необходимость модернизации потребительских корзин создает дополнительные проблемы по обеспечению сопоставимости результатов расчетов.

Потребительские корзины, включающие в себя промтовары и услуги, и соответствующие индексы инфляции. В настоящее время, чтобы не только быть в курсе проблем, касающихся инфляции в нашей стране, но и хорошо ориентироваться в создавшейся ситуации, недостаточно отслеживать только изменение цен на продовольственные товары. Необходимо также фиксировать инфляцию и в сфере коммунальных, транспортных, медицинских, образовательных и других услуг, а также анализировать цены на промышленные товары широкого потребления. Рост цен в этих областях достаточно заметен (если в 1990 г. проезд в метро в Москве обходился в 5 коп., то в ноябре 1995 г. он стоил 1000 руб., в феврале 1999 г., после деноминации в 1000 раз — 4 рубля, в 2001 г. — разовая поездка обходилась в 5 руб., а в 2009 г. — уже в 22 руб.). Следует также отметить, что темпы роста цен на те или иные промышленные товары и услуги не всегда совпадают с темпами ростом цен на продовольственные товары. Например, наблюдалось подорожание хлебобулочных товаров примерно в 2000 раз за три года (1991–1994), а цены на компьютерные товары выросла за это время в среднем только в 80 раз.

При обсуждении проблем инфляции часто обращают внимание на то, что в настоящее время заметная часть доходов каждой семьи идет на оплату коммунальных услуг и покрытие расходов на транспорт и связь. Необходимо учитывать расходы на услуги прачечной, парикмахерской, на ремонт обуви и т.д. Увеличиваются расходы на удовлетворение культурных потребностей из-за роста цен на книги, журналы, газеты, билеты в театры и кино, спортивный инвентарь и т.д. С течением времени подобные расходы конкретных физических лиц могут и сокращаться из-за прекращения покупок книг, журналов, газет, прекращения походов в театры и т.д.

Дорогими сегодня являются и промышленные товары. Но при подсчете индекса инфляции по этим товарам возникает ряд трудностей. Например, наблюдается разброс цен по торговым точкам или имеет место временное отсутствие в магазинах некоторых товаров. Кроме того, меняется мода, многие виды одежды выходят из употребления, вместо них появляются новые. То же самое, в связи с развитием техники, происходит и с товарами длительного пользования (когда-то раньше не было телевизоров, холодильников, стиральных машин, железных дорог и самолетов). Кроме того, пока еще мы можем пользоваться отдельными бесплатными услугами в области медицины и образования, но скоро, очевидно, и это будет платным, по крайней мере частично.

Для того, чтобы подсчитать индекс инфляции по достаточно обширной потребительской корзине, включающей не только продовольственные товары, но и одежду, товары длительного пользования, услуги и т.п., необходимо иметь соответствующие нормы потребления. Определить их весьма трудно. (При нормативном подходе к экономическим явлениям — откуда взять нормы? При позитивном — как в нестабильной ситуации замерить потребительские бюджеты?) Поэтому в настоящей главе мы ограничились индексами инфляции, рассчитанными для продовольственной потребительской корзины. Индекс инфляции можно считать не только для Москвы в целом, но и для отдельных ее районов и даже для покупателей отдельных магазинов — достаточно измерить соответствующие цены; не только для населения в целом, но и для отдельных слоев и даже отдельных семей — достаточно знать соответствующие потребительские корзины.

Как уже отмечалось, в настоящее время (2009 г.), в частности, в связи с резким ростом стоимости жилищно-коммунальных услуг, коэффициент 2,0 в методе Оршански расчета прожиточного минимума представляется заниженным. Адекватное значение может быть получено в результате анализа результатов бюджетного обследования типа того, что было проведено ИВСТЭ в 1995 г. Альтернативный подход состоит в использовании иной потребительской корзины, например, предусмотренной в Федеральном Законе «О прожиточном минимуме в Российской Федерации» (в редакции Федеральных законов РФ от 27.05.2000 №75-ФЗ, от 22.08.2004 №122-ФЗ).

Инфляция и ВВП. Валовой внутренний продукт (ВВП), валовой национальный продукт (ВНД) и другие характеристики экономического положения страны рассчитываются в текущих ценах. Для перехода к неизменным ценам надо поделить на индекс инфляции (т.е. умножить на дефлятор). В 2 раза занизишь индекс инфляции — в 2 раза завысишь валовой национальный продукт, валовой внутренний продукт, национальный доход и иные макроэкономические характеристики.

По данным Правительства РФ к концу 1998 г. валовой внутренний продукт составил 55,7% от уровня 1990 г. (динамика макроэкономических показателей России анализируется в [19, с.285]). Падение больше, чем в Германии в результате разгрома фашизма. И это по официальным данным! Используя же коэффициент занижения инфляции со стороны Госкомстата РФ, равный 2, получаем более реальную цифру — 25% от уровня 1990 г. Падение в 4 раза! Эта оценка близка к выводам ряда специалистов, независимых от правительства.

Напомним, что номинальный ВВП исчисляется в текущих рыночных ценах. Чтобы определить реальный ВВП, необходимо выразить его в сопоставимых ценах базисного года. Для этого применяется так называемый дефлятор ВВП, т.е. индекс инфляции, который отражает изменение среднего уровня цен самой широкой группы товаров и услуг за определенный период, охватывающей все составляющие ВВП. Расчеты проводят с помощью т.н. «системы национальных счетов» [14].

Нет ничего удивительного в том, что дефлятор ВВП отличается от индекса инфляции Росстата. Так, индекс-дефлятор ВВП за 2006 г. по отношению к ценам 2005 г. составил 15,4%, в то время как индекс инфляции Росстата за 2006 г. равен 9%. Разные корзины — разные результаты.

Виды инфляции. Эконометрика описывает инфляцию. Причины инфляции — это предмет иных экономических наук. Однако несколько слов сказать об этом полезно.

Всегда говорят об *инфляции спроса*. Это ситуация, когда у населения много денег, *которые оно хочет истратить*, а товаров мало. Тогда цены растут. Либо непосредственно, либо через механизм « черного рынка».

Другой вид инфляции — *инфляция издержек*. Производитель вынужден повышать цену на свою продукцию, потому что его поставщики повышают цены на собственную продукцию. Этот порочный круг очень трудно разорвать.

Третий вид инфляции — *административная инфляция*. Цены повышает государство. Естественно, на то, что оно контролирует. Например, с августа по декабрь 1998 г. курс доллара США был поднят примерно в 4 раза. Последствия были понятные: адекватный подъем цен на импортные товары, потом рост цен на продукцию, для изготовления которой использовались импортные комплектующие, а затем и рост цен на чисто отечественную продукцию. В результате инфляция за год составила более 80%.

Выше уже приводились примеры административного регулирования цен. Политика государственных органов в области энергетики, транспорта, экспорта и импорта, налогообложения и других сфер государственного регулирования экономики оказывает непосредственное влияние на инфляцию.

Заключительные замечания. Нобелевский лауреат по экономике Василий Васильевич Леонтьев (1905– 1999) подсчитал, что лишь 1% ученых-экономистов анализирует вновь собранные данные, 30% используют данные, приведенные в публикациях предшественников, а остальные в своих рассуждениях вообще не обращаются к реальному миру [8]. Настоящая глава составлена на основе работ ИВСТЭ, относящихся к тому 1%, о котором писал В.В. Леонтьев.

Судя по опыту двух последних десятилетий, инфляционные процессы стали постоянной составляющей отечественной экономической жизни, и экономистам, менеджерам, инженерам различных специальностей придется учитывать их свойства в своей работе. В настоящей главе рассмотрены основы эконометрической теории инфляции. Однако не все проблемы раскрыты достаточно подробно. Кратко рассмотрим некоторые из них.

Прогнозирование индекса инфляции осуществляется с помощью методов наименьших квадратов (глава 3), экспертных технологий (глава 5), в том числе основанных на сценарном подходе, и различных иных процедур, разработанных в организационно-экономическом моделировании. Обратим внимание на периодическую составляющую во временном ряду индексов инфляции. Темп роста цен максимален в зимние месяцы (декабрь — январь), затем постепенно уменьшается до минимума в летние месяцы (июль — август), иногда переходя в дефляцию, затем снова растет. Непараметрический метод выделения периодической составляющей временного ряда рассмотрен в [17, разд. 6.3], [18, разд.10.2], а также — иной подход — в главе 3 выше.

Стоимости потребительской корзины ИВСТЭ на один и тот же момент времени в наших публикациях, как мог заметить внимательный читатель, несколько отличаются. В этом нет ничего странного, так как исходные цены на продукты несколько отличались. Строго говоря, цены, стоимости потребительских корзин, индексы инфляции и многие другие экономические величины следовало бы считать нечисловыми данными (см. главу 7 ниже, [16], [17, разд.1.5]), например, интервальными или нечеткими. Развитие нечисловой экономики — перспективное направление научных исследований.

Неоднозначность выбора потребительской корзины, приводящая к неоднозначности индекса инфляции, порождает естественный вопрос: можно ли описать рост цен однозначно, т.е. полностью определенной функцией времени? Строгий ответ известен — нет, нельзя.

Еще в 30-е годы В.В. Леонтьев показал, что однозначно можно сравнивать только состояния экономик, имеющих одинаковую отраслевую структуру, так что описывающие их вектора (объемов производства по отраслям) отличаются только множителем [8]. Реально таких двух экономик не существует. Каждый год структура экономики меняется. Поэтому, строго говоря, нельзя сравнивать состояния экономик разных стран, и даже состояния экономики одной и той же страны в разные годы. Этому же феномену посвящена теорема проф. В.В. Подиновского: любое изменение коэффициентов весомости единичных показателей качества продукции приводит к изменению упорядочения некоторых пар изделий по средневзвешенному показателю (глава 6).

Однако реально мы, несмотря на теоретический запрет, сравниваем экономическое положение в разные годы — зная, что это сравнение проводится с некоторой степенью условности, допустимой в рассматриваемых постановках прикладных задач. Точно на тех же основаниях мы должны принимать во внимание рост цен, выражаемый тем или иным индексом инфляции.

Мы почти не затрагивали историю инфляции. Наиболее быстро цены росли в Германии после первой и второй мировых войн и в СССР после гражданской войны. Немецкий писатель Эрих Мария Ремарк в своем романе «Черный обелиск» описывает Германию 1923 г. : «Доллар стал неистовствовать, он подскакивает ежедневно уже не на тысячи и десятки тысяч, а на сотни тысяч марок. Позавчера он стоил миллион двести тысяч, вчера — миллион четыреста. Ожидают, что завтра он дойдет до двух миллионов, а в конце месяца — до десяти. Рабочие получают теперь заработную плату два раза в день — утром и под вечер, и каждый раз им дают получасовой перерыв, чтобы они успели сбегать в магазины и поскорее сделать покупки — ведь если они подождут до вечера, то потеряют столько, что их дети останутся полуголодными» [24, с.420]. Рассмотрение методов выхода из инфляции находится вне рамок настоящего учебника.

Знание динамики индекса инфляции повышает обоснованность принятия хозяйственных решений. Отслеживание изменения индекса инфляции полезно и одновременно доступно всем юридическим и физическим лицам. Трудоемкость расчета одного значения индекса инфляции не превосходит 2–4 часов. Проведение такой работы обеспечивает связь обучения экономическим и управленческим дисциплинам с реальной экономической жизнью и может быть рекомендовано на всех уровнях экономических дисциплин, от средней школы до послевузовского образования. Полученные по независимо собранной информации оценки инфляции, рассмотренные в настоящей главе, используются в научных исследованиях и учебном процессе различных образовательных структур, а также в производственной деятельности предприятий и организаций, например, на Магнитогорском металлургическом комбинате.

Литература

1. *Баканов М.И., Шеремет А.Д.* Теория экономического анализа. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 416 с.

2. *Добротворский Н., Седов А.* Курс холодильника к кошельку: живем, как в 1985 году! / «Комсомольская правда», 10 декабря, 2003 г.

3. Доклад о мировом развитии 2004 г. Всемирный банк. — М.: Весь Мир, 2004.

4. *Елисеева И.И., Юзбашев М.М.* Общая теория статистики. — М.: Финансы и статистика, 1998. — 368 с.

5. Как оценивать уровень жизни? (На примере московского региона) / Орлов А.И., Жихарев В.Н., Цупин В.А., Балашов В.В. — Журнал «Обозреватель-Observer». 1999. No.5 (112). С. 80–83.

6. *Ковнир В.Н.* История экономики России: Учебное пособие. — М.: Логос, 2005. — 472 с.

7. *Коростикова Т.* Цены вырастут в 5 раз // Аргументы и факты, 1994, No.16, с.5.

8. *Леонтьев В.В.* Экономические эссе. Теория, исследования, факты и политика. — М.: Политиздат, 1991. — 414 с.

9. *Львов Д.С.* Реформы с позиции современной науки. — Научные труды Международного союза экономистов и Вольного экономического общества России. Том второй. — М.- СПб: 1995, с.7–16.

10. *Макконнелл Кэмпбелл Р., Брю Стэнли Л.* Экономикс: Принципы, проблемы и политика. В 2-х т.: Пер. с англ. 11-го изд. Т.1. — М.: Республика, 1995. — 400 с.

11. Математические модели в экономике. Расчет индекса инфляции / Орлов А.И., Балашов В.В., Куроптев О.В., Канакова Е.М., Рафальская А.С. — М.: Изд-во Московского государственного института электроники и математики (технического ун-та), 1994. — 32 с.

12. Математическое моделирование процессов налогообложения (подходы к проблеме) / Под ред. В.Н. Жихарева, А.И. Орлова и др. — М.: Изд-во ЦЭО Министерства общего и профессионального образования РФ, 1997. — 232 с.

13. *Мюллер Г., Гернон Х., Миик Г.* Учет: международная перспектива: Пер. с англ. — 2-е изд., стереотип. — М.: Финансы и статистика, 1996. — 136 с.

14. Национальное счетоводство / Под ред. Г.Д. Кулагиной. — М.: Финансы и статистика, 1997. — 448 с.

15. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

16. *Орлов А.И.* Размытые цены. Нечисловая экономика и управление инвестиционным процессом. — Журнал «Российское предпринимательство». 2001. № 12. С.103–108.

17. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. Изд. 3-е, переработанное и дополненное. — М.: Изд-во «Экзамен», 2004. — 576 с.

18. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

19. *Орлов А.И.* Теория принятия решений. — М.: Экзамен, 2006. — 573 с.

20. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование процессов управления промышленными предприятиями в условиях рисков инфляции. — Стратегическое планирование и развитие предприятий. Секция 4 / Материалы Девятого всероссийского симпозиума. Москва, 15–16 апреля 2008 г. Под ред. чл.-корр. РАН Г.Б. Клейнера. — М.: ЦЭМИ РАН, 2008. — С.124–126.

21. *Орлов А.И., Жихарев В.Н., Цупин В.А.* Анализ динамики цен на продовольственные товары в Москве и Московской области. — В сб.: Научные труды Рижского института мировой экономики. Вып.2. — Рига: РИМЭ, 1998. С.19–25.

22. *Орлов А.И., Орлова Л.А.* Интервальная оценка инфляции по независимой информации. — Журнал «Российское предпринимательство». 2004. № 10. С.44–49.

23. *Панфилова Ю., Угодников К.* Как вы считаете? — Журнал «Итоги», 2005, 14 ноября, №46(492).

24. *Ремарк Э.М.* Черный обелиск. — М.: АО «ВИТА-ЦЕНТР», 1992. — 384 с.

25. *Самуэльсон П.* Экономика. Т. 1,2. — М.: МГП «Алгон» — ВНИИСИ, 1992. — 333 с. — 415 с.

26. *Сычева Г.И., Колбачев Е.Б., Сычев В.А.* Оценка стоимости предприятия (бизнеса). — Ростов н/Д: «Феникс», 2003. — 384 с.

27. Статистический словарь / Гл. ред. М.А.Королев. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 623 с.

28. *Федосеев В.Н., Орлов А.И.* За что нас покупают (состояние рыночной мотивации труда в России). — Журнал «Российское предпринимательство». 2000. No.6. С.10–19.

29. Orshansky M. How Poverty is measured? — Monthly Labor Review, 1969, v.92, No,2, p.37–41.

Контрольные вопросы и задачи

1. Рассчитайте индекс инфляции с 14.03.1991 по 14.03.2001 на основе потребительской корзины и цен табл.4.23.

Таблица 4.23

Номенклатура, годовые нормы потребления и цены (руб.)

№ п/п	Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 14.03.1991	Цена на 14.03.2001
1	Хлеб ржаной	65,3	0–20	10
2	Столовые корнеплоды	40,6	0–20	9
3	Колбаса докторская	0,4	2–30	95
4	Молоко, кефир	110,0	0–32	17
5	Сметана, сливки	1,6	1–70	50
6	Маргарин	6,3	1–20	35

2. Гражданин Иванов в марте 1991 г. получил 200 руб., а в марте 2001 г. — 5000 руб. Во сколько раз изменился его доход? Увеличился или уменьшился? (Используйте индекс инфляции из задачи 1).

3. За январь индекс инфляции составил 50%, а за февраль — 200%. Чему равен индекс инфляции за два месяца? Каков средний темп (уровень) инфляции?

4. Выразите текущий курс доллара США в ценах марта 1991 г. (индекс инфляции можно принять равным 100).

5. Расскажите о динамике индекса инфляции в России.

6. Почему для определения индекса инфляции (в процентах) за два года нельзя складывать индексы инфляции за первый год и за второй год, выраженные в процентах?

Темы докладов, рефератов, исследовательских работ

1. Место индексов инфляции в системе экономических индексов (сравните с индексами Ласпейреса, Пааше, И.Фишера [4]).

2. Теоремы умножения (в случае четырех и более моментов времени) и сложения (для групповых индексов инфляции), их доказательства и использование.

3. Экспериментальная работа: соберите данные о ценах и рассчитайте индекс инфляции для своего региона (на основе потребительской корзины ИВСТЭ).

4. Прогнозирование индекса инфляции: методы, практическая реализация, использование для принятия управленческих решений.

5. Учет инфляции при проведении анализа финансово-хозяйственной деятельности предприятия.

6. Обеспечение сопоставимости результатов расчетов при модернизации потребительской корзины.

7. Влияние инфляции на хозяйственную жизнь.

8. Методы выхода из инфляции.