Глава 5

ЭКСПЕРТНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В экономике и управлении используют как объективные данные, так и мнения людей. Поэтому важными составляющими организационно-экономического моделирования являются современные экспертные технологии, основанные на теории и практике экспертных оценок.

5.1. Примеры процедур экспертных оценок

Согласно англо-русскому словарю «expert» — это специалист. Однако в русском языке слово «эксперт» приобрело дополнительные нюансы. Под экспертом понимают не просто специалиста (например, выпускника вуза), а только такого, кто обладает высокой квалификацией. И, кроме того, умеющего использовать свою интуицию для решения поставленных перед ним задач. Например, для диагностики, прогнозирования, выбора варианта технического или управленческого решения.

Ударение в слове «эксперт», как и в словах «маркетинг» и «творог», можно ставить как на первый слог, так и на второй. Оба варианта признаются нормой. Ударение на первый слог соответствует английскому языку, ударение на второй слог больше подходит для русского языка.

Рассмотрим ряд примеров процедур экспертных оценок, одновременно вводя нужные для дальнейшего обсуждения термины.

Индивидуальные и коллективные экспертные оценки. Экспертные оценки бывают *индивидуальные* и *коллективные*. *Индивидуальные оценки* — это оценки одного специалиста. Например, преподаватель единолично ставит на экзамене оценку студенту. Врач ставит диагноз больному и назначает лечение. Инспектор ГИБДД экспертно оценивает соблюдение правил дорожного движения водителем и прописывает лечение — штраф за нарушение правил.

Но в сложных случаях заболевания или при угрозе отчисления студента за плохую учебу обращаются к *коллективному* мнению *экспертной комиссии* — симпозиуму врачей или комиссии преподавателей. Классический пример коллективной экспертной оценки — решение суда присяжных. По простым делам судья принимает решение единолично, при рассмотрении тяжких преступлений законодательством предусмотрена возможность участия в принятии решений комиссии экспертов — присяжных заседателей.

Аналогичная ситуация — в армии. Обычно командующий принимает решение единолично. Но в сложных и ответственных ситуациях проводят военный совет. Один из наиболее известных примеров такого рода — военный совет 1812 г. в Филях, на котором под председательством М.И. Кутузова решался вопрос: «Давать или не давать французам сражение под Москвой?»

Работа экспертной комиссии может быть растянута во времени. Например, лечащий врач может отправить пациента на обследование врачам-специалистам, дать распоряжение провести различные анализы, флюорографию и т.п. Собрав мнения экспертов (в данном случае — врачей-специалистов) и проанализировав объективные данные, лечащий врач формулирует окончательное решение, выражающее мнение всей экспертной комиссии.

Индивидуальная экспертная оценка может потребовать от специалиста выполнения большого объема работы. Например, подготовка рецензии на рукопись книги или заключения оппонента о диссертации, представленной к защите на соискание ученой степени. Обычно эксперт должен следовать тем или иным правилам, приведенным в нормативной и методической документации по определенному виду экспертной деятельности. Например, при оценке диссертации эксперт должен исходить из нормативных документов Высшей аттестационной комиссии РФ.

Индивидуальная экспертная оценка научно-технических проектов. В структуры государственной власти постоянно поступают научно-технические проекты, подготовленные различными организациями и отдельными гражданами. По каждой заявке требуется принять решение о целесообразности осуществления проекта и необходимом для этого содействии со стороны структур государственной власти (финансировании, организационных решениях).

Первый шаг — проект направляется на экспертизу. Эксперт вместе с проектом получает задание примерно следующего содержания.

Вопросы, которые должны быть отражены в заключении эксперта

1. Актуальность проекта.
2. Краткая характеристика положения в данной области в стране и за рубежом.
3. Научное значение проекта.
4. Научная новизна предлагаемых решений.
5. Прикладное значение проекта.
6. Новизна предлагаемых технических (технологических) решений.
7. Существующие отечественные и зарубежные аналоги (марка, тип, фирма, страна).
8. В чем заключается преимущество предлагаемых решений по сравнению с существующими в данной области в стране и за рубежом.
9. Сравнительные данные экономических показателей объекта и его аналогов (в сопоставимом виде).
10. Оценка потенциала разработчика

— наличие научно-технического задела в данной области и в чем он выражается;

— наличие научно-производственной базы.

11. Обоснованность стоимости работ, оценка структуры затрат.

12. Реальность достижения поставленных целей:

— в предлагаемые сроки;

— предлагаемыми способами (методами) и ресурсами.

13. Возможность серийного освоения предлагаемого проекта.

14. Последствия создания и использования проекта:

— научные и научно-технические;

— экологические;

— гуманитарные;

— экономические;

— социальные.

15. Выводы:

— необходимость реализации проекта (полная, частичная);

— целесообразность финансирования (в целом, частично);

— рекомендации эксперта.

Мнение эксперта должно быть выражено в специальном документе — *заключении*. На все 15 приведенных выше вопросов эксперт должен ответить в своем заключении. Ясно, что этот документ должен быть достаточно объемным, а подготовка его трудоемка.

Когда нужна формализация мнений экспертов? Цели экспертизы могут быть различны. Так, отзыв официального оппонента заканчивается выводом о том, соответствует или нет рассмотренная им диссертация требованиям ВАК РФ. Рецензент научного журнала делает в конце своего заключения вывод о том, может или нет данная статья быть опубликована в журнале. В этих двух случаях нет необходимости сравнивать между собой различные объекты экспертизы.

Однако часто необходимо проводить такое сравнение. Научно-технические или инвестиционные проекты нельзя рассматривать отдельно друг от друга, поскольку ограничено суммарное финансирование, выделенное на всю совокупность проектов.

Насколько подходят для сравнения объектов экспертизы обширные заключения, подготовленные различными экспертами? С одной стороны, эти заключения содержат результаты высококвалифицированного труда по оценке содержания проектов. С другой стороны, написанные в свободной манере заключения не всегда позволяют сопоставить между собой отдельные характеристики проектов. Поэтому эксперты заполняют еще один формализованный документ.

Карта оценки объекта экспертизы

Научная значимость:
1. Исключительно высокая
2. Значительная
3. Невысокая
4. Неопределимая (в настоящее время)
5. Отсутствует

Практическая значимость:
1. Исключительно высокая
2. Значительная
3. Невысокая
4. Неопределимая (в настоящее время)
5. Отсутствует

Научная новизна, оригинальность:
1. Не имеет аналогов
2. Нет аналогов в стране, есть за рубежом
3. Нет аналогов за рубежом, есть в стране
4. Есть сведения об отдельных отечественных и зарубежных аналогах
5. Научная новизна отсутствует

Методы и способы достижения цели:
1. Новые
2. Современные
3. Традиционные
4. Устаревшие

5. Неадекватные

Потенциал исполнителей в рассматриваемой области:

1. Достаточный
2. Недостаточный в части научного задела (опыта работы)
3. Недостаточный в части материально-технической (лабораторно-экспериментальной) базы
4. Недостаточный в части состава исполнителей
5. Данных для оценки недостаточно

Срок работы:

1. Реальный
2. Завышен
3. Занижен
4. Данных для оценки недостаточно

Стоимость работ (объем финансирования):

1. Приемлемая
2. Завышена
3. Занижена
4. Данных для оценки недостаточно

Рекомендуемый приоритет осуществления:

1. Работа первостепенной важности
2. Работа высокой важности
3. Работа представляет определенный интерес
4. Работа представляет незначительный интерес, но заслуживает поддержки при наличии достаточных средств
5. Работа поддержки не заслуживает

Дата______ Эксперт__________________Подпись__________

(Ф.И.О.)

При заполнении «Карты оценки объекта экспертизы» ничего писать не надо, следует лишь обвести номера тех пунктов в каждом из разделов, которые соответствуют мнению экспертов. В разделе «Потенциал исполнителей» могут быть обведены несколько номеров, в остальных разделах — по одному. По «Карте оценки объекта экспертизы» легко сравнивать мнения экспертов между собой, а также сопоставлять различные объекты экспертизы.

Обратим внимание, что в конце «Карты оценки объекта экспертизы» предусмотрена подпись эксперта. Это связано с тем, что эксперт несет ответственность за свое заключение — уголовную, административную, материальную, гражданско-правовую. Экспертные исследования принципиально отличаются от маркетинговых и социологических, в которых подчеркивается анонимность опрашиваемых (см. главу 1).

Типы вопросов и пилотаж. В экспертных исследованиях, а также в выборочных маркетинговых и социологических опросах используют три типа вопросов — закрытые, открытые и полузакрытые, они же полуоткрытые. Достоинства и недостатки различных типов вопросов уже обсуждались в главе 1. Ясно, что «Вопросы, которые должны быть отражены в заключении эксперта», являются открытыми, а «Карта оценки объекта экспертизы» состоит из закрытых вопросов.

Отметим, что на этапе подготовки важного экспертного опроса проводят «пилотное» исследование («пилотаж») — апробацию документов и процедур анализа ответов, которые будут собраны в ходе будущего опроса. В пилотаже участвует небольшое число экспертов, цель работы которых — проверить доступность задач опроса и документации адекватному пониманию экспертов, работоспособность расчетных процедур, уточнить формулировки вопросов и способы сбора и анализа экспертных мнений. В частности, в рамках пилотного исследования может быть проведена предварительная экспертиза, специально посвященная отработке перечня и формулировок вопросов.

Оценка и выбор вариантов с помощью экспертов. Рассмотрим несколько процедур коллективных экспертных оценок, начиная с простейших, при этом вводя и обсуждая используемые в дальнейшем понятия.

Оценка номеров в КВН. Простейший пример коллективных экспертных оценок — оценка номеров в известной игре КВН (Клуб Веселых и Находчивых). Экспертной комиссией является жюри. Просмотрев номер, каждый из членов жюри поднимают планшет со своей оценкой. Затем симпатичная девушка (технический работник, не член жюри) вычисляет среднюю арифметическую оценку, которая и объявляется как коллективное мнение жюри (ниже увидим, что такой подход некорректен с точки зрения теории измерений). Обратим внимание на эту девушку (технического работника), которая после обработки экспертных мнений выставляет оценку на стенд, делая результаты экспертизы доступными всем желающим. Она представляет коллектив тех, кто обеспечивает организацию и проведение экспертизы. Этот коллектив называют «рабочей группой» (РГ) [16, гл.12] или «группой сопровождения» [22].

Таким образом, два основных объекта рассмотрения в настоящей главе — это *экспертная комиссия* (ЭК) и *рабочая группа* (РГ).

Фигурное катание. В фигурном катании процедура обработки оценок экспертов усложняется — перед усреднением *отбрасываются самая большая и самая маленькая оценки.* Это делается для того, чтобы не было соблазна завысить оценку одной спортсменке (например, соотечественнице) или занизить другой. Такие резко выделяющиеся из общего ряда оценки будут сразу отброшены.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — оценки n экспертов. При проведении КВН в качестве коллективной экспертной оценки используют среднее арифметическое всех n оценок

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

В фигурном катании нужно переставить элементы выборки в порядке возрастания (точнее, неубывания) и получить вариационный ряд $X(1) \leqslant X(2) \leqslant \ldots \leqslant X(n)$, исключить минимум $X(1)$ и максимум $X(n)$, а затем в качестве коллективной экспертной оценки взять урезанное среднее арифметическое, т.е. среднее арифметическое оставшихся (n — 2) членов вариационного ряда

$$X^* = \frac{X(2) + X(3) + \ldots + X(n-1)}{n-2}.$$

С точки зрения прикладной математической статистики X^* — это робастная оценка теоретического среднего, нацеленная на борьбу с аномальными (резко выделяющимися) результатами наблюдений [18]. Поскольку ясно, что аномальные результаты порождены внешними влияниями на судей фигурного катания, искажающими их профессиональные экспертные оценки, то простое изменение правил расчетов итоговой оценки (переход от среднего арифметического к урезанному среднему) позволяет уберечь экспертов от вызванных извне уклонений от решения поставленных перед ними задач.

Итак, *правила обработки оценок экспертов* существенно влияют на объективность выводов экспертной комиссии.

Экспертный выбор. Экспертные оценки часто используются при выборе — одного варианта технических устройств из нескольких, группы космонавтов из многих претендентов, набора проектов научно-исследовательских работ для финансирования из массы заявок, получателей экологических кредитов из многих желающих, выбор инвестиционных проектов для реализации среди представленных, и т.д.

Типовая ситуация такова. Заказчик формулирует технические требования к будущему изделию. Объявляется конкурс (тендер), итогом которого должен быть выбор той или иной разработки для серийного выпуска. Допущенные к конкурсу организации к заданному сроку представляют опытные образцы. Как правило, оказывается, что эти образцы несравнимы, каждый из них по каким-то важным показателям качества лучше других, а по другим важным показателям — хуже того или иного из остальных образцов. Например, у одного опытного образца дальность полета больше, у другого — расход топлива на 1000 км меньше, у третьего — потолок полета выше, у четвертого — броня крепче, у пятого — под крыльями можно дополнительно подвесить две ракеты. Какой стратегический бомбардировщик (из разработанных разными конструкторскими бюро и представленных на тендер) выбрать для серийного производства?

Задача экспертной комиссии — выбрать опытный образец для запуска в серийное производство. Есть два принципиально разных подхода к решению этой задачи.

Первый из них основан на сравнении образцов. Например, каждый из экспертов упорядочивает образцы в соответствии со своими предпочтениями. Полученные от экспертов *упорядочения* (*ранжировки*) обрабатываются теми или иными математическими методами с целью расчета итогового мнения комиссии экспертов. В другом варианте организации экспертизы эксперту образцы предъявляются попарно для сравнения, математический анализ результатов *парных сравнений* позволяет найти итоговое мнение. В третьем варианте каждого эксперта просят выбрать три лучших образца, и т.д.

Второй подход имеет целью соизмерить сравнительную важность различных показателей качества, построить интегральный показатель качества (рейтинговую оценку), с помощью которого можно упорядочить образцы по качеству (рассчитать *рейтинг* образцов). Пусть, например, выделено (с помощью предварительного экспертного исследования) m показателей качества. Для конкретного объекта экспертизы экспертная комиссия оценивает эти показатели Y_1, Y_2, ..., Y_m, затем РГ рассчитывает значение интегрального показателя качества

$$Y = a_1Y_1 + a_2Y_2 + \ldots + a_mY_m .$$

На основе полученных значений Y можно выбрать наилучший образец, упорядочить образцы по качеству, указав рейтинг образцов, т.е. значения интегрального показателя, соответствующие образцам. Значения коэффициентов a_i (коэффициентов важности, весомости, значимости) обычно определяются с помощью той или иной экспертной процедуры.

Кроме аддитивной формы интегрального показателя, часто используют мультипликативный вариант этого показателя:

$$Z = \prod_{j=1}^{m} Y_j^{b_j} ,$$

в котором показатели степени b_j обычно также определяются экспертным путем.

В интегральный показатель иногда вводят условие, выполнение которого необходимо для дальнейшего рассмотрения объекта экспертизы. Например, для поступления в вуз необходимо набрать не менее 11 баллов из 15 возможных при сдаче трех экзаменов. Но при этом получение балла 2 на одном из экзаменов делает поступление невозможным, хотя суммы баллов 2 + 5 + 5 = 12 и 2 + 4 + 5 = 11 удовлетворяют требованиям приемной комиссии. В общем случае рассматриваемый вид интегрального показателя таков:

$$Y = \begin{cases} a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_m Y_m, & \text{если условие } A \text{ выполнено,} \\ 0, & \text{если условие } A \text{ не выполнено.} \end{cases}$$

Кроме задачи выбора наилучшего (с точки зрения экспертов) образца, описанные методы позволяют решить ряд иных практических задач, в частности, задачу распределения финансирования. Пусть имеется ряд объектов экспертизы, нуждающихся в финансировании, например, инвестиционных проектов или заявок на выполнение научно-технических проектов (работ). Естественно упорядочить объекты экспертизы по качеству (рентабельности, привлекательности и т.п.), а затем выделять необходимые объемы финансирования, начиная с наилучшего объекта. Тогда начальная часть вариационного ряда показателей качества будет соответствовать профинансированным объектам экспертизы, а заключительная — тем, кому финансирования не досталось.

На границе между этими двумя группами возможны нюансы. Например, объект экспертизы *A* нельзя профинансировать в необходимом объеме из-за недостатка средств, а вот на финансирование худшего, чем *A*, объекта экспертизы *B* средств достаточно. Тогда объект *B* будет финансироваться, а объект *A* — нет, вопреки рейтингу.

Военные советы как форма экспертной деятельности. С тех пор, как люди научились говорить, проводились совещания специалистов. Поэтому можно сказать, что экспертным оценкам столько же лет, сколько человеческому обществу. Конечно, постепенно технологии экспертного оценивания развивались. Например, появилась идея *независимой экспертизы*. Ее можно сопоставить с идеей разделения власти на законодательную, исполнительную и судебную ветви в предположении независимости ветвей власти.

Весьма важен *регламент* проведения заседания комиссии экспертов. Вот как описывал В «Капитанской дочке» (глава X) А.С. Пушкин приводит слова, с которыми генерал, комендант Оренбурга, обратился к членам военного совета:

«Теперь, господа, — продолжал он, — надлежит решить, как нам действовать противу мятежников: *наступательно* или *оборонительно*? Каждый из оных способов имеет свою выгоду и невыгоду. Действие наступательное представляет более надежды на скорейшее истребление неприятеля; действие оборонительное более верно и безопасно…. Итак, начнем собирать голоса по законному порядку, то есть, начиная с младших по чину. Г-н прапорщик! — продолжал он, обращаясь ко мне. — Извольте объяснить нам ваше мнение».

Военный совет в данном случае — это собрание экспертов (военных специалистов). Председатель собрания четко поставил задачу: надо выбрать либо наступление, либо оборону. Обсуждение идет в однозначно заданном порядке — от младших к старшим. Младшие могут спокойно высказывать свои мысли, не боясь, что их предложения будут противоречить мнению старших. Старшие имеют возможность учесть высказанные аргументы и сделать свои выступления более обоснованными.

Важность соблюдения *регламента* проведения заседания экспертной комиссии становится особенно ясной при сопоставлении с распространенным в XVII веке местничеством. Бояре постоянно спорили, кто из них главнее и, следовательно, кто должен сидеть ближе к царю и говорить раньше и больше других. Заседание постоянно прерывалось схватками, иногда не только словесными, между его участниками. Повышению эффективности заседаний весьма способствовало введение Петром I системы чинов и регламентации служебных взаимоотношений в соответствии с нею. И в настоящее время общепринятой практикой является выбор (или назначение) в начале собрания председателя и секретаря и утверждение регламента.

Наиболее известный в истории России военный совет состоялся 1 сентября 1812 г. в Филях, вскоре после Бородинского сражения. Обсуждался вопрос: «Дать французам сражение под Москвой или оставить Москву без боя?» Решение должен был принять главнокомандующий министр обороны фельдмаршал Кутузов. Обратим внимание, что военный совет, как и любая комиссия экспертов — совещательный орган, а окончательные решения принимает тот, кому это поручено. В современной деловой литературе такой человек обозначается как Лицо, Принимающее Решение, сокращенно ЛПР (по первым буквам).

Большинство экспертов, рассказав о состоянии своих войск, высказалось за сражение. Однако, учитывая тяжелые потери русской армии, ЛПР (т.е. Кутузов) принял решение оставить Москву без боя. Аргументировал это решение Кутузов так: «Оставив Москву, мы сохраним армию; потеряв армию, мы потеряем и Москву, и Россию». И 2 сентября 1812 г. русские войска без боя оставили Москву, с ними ушла и половина московского населения (около 100 тыс. человек). Как известно, это решение Кутузова предопределило поражение Наполеона в войне и изгнание захватчиков.

Итак, ЛПР поступил вопреки мнению большинства экспертов. Значит ли это, что работа экспертной комиссии пропала впустую? Отнюдь! Собранная экспертами информация была использована ЛПР. Продемонстрированный генералами русской армии боевой дух, готовность сражаться с врагом также были учтены ЛПР, наряду с теми соображениями, которые не могли знать эксперты и которые были приняты во внимание ЛПР.

Обсуждение *регламента* проведения заседаний и организации экспертного исследования в целом, взаимоотношений *ЛПР* и ЭК касаются всех видов экспертных оценок, отнюдь не только военных советов.

Перейдем к развитию экспертных исследований в XX веке.

Кибернетика — основа управления. Большое влияние на развитие исследований в области управления в целом и менеджмента (т.е управления людьми) в частности оказало появления в 1948 г. книги американского математика Норберта Винера (1894–1964) «Кибернетика, или управление и связь в животном и машине» [3]. Через два года вышла его книга «Кибернетика и общество» [4]. Началось мощное научное движение, ключевые слова которого — кибернетика, исследование операций, системный анализ, математическое моделирование, оптимальное управление, экспертные оценки и др. Оно до сих пор определяет лицо современной науки об управлении. В нашей стране огромную роль в развертывании исследований по кибернетике сыграл академик АН СССР адмирал-инженер

Аксель Иванович Берг (1893–1979). С 50-х годов до последних дней жизни он возглавлял Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика».

Один из вождей отечественного кибернетического движения академик СССР и РАН Никита Николаевич Моисеев (1917–2001) в своей книге [13] приводит ряд фактов, позволяющих проследить историю кибернетических идей. В частности, он обращает внимание на книгу профессора Бронислава Трентовского «Отношение философии к кибернетике как искусству управления народами», вышедшую в Познани в 1843 г. (за 105 лет до книги Н. Винера) на польском языке. Для образованных людей XIX в., знакомых с древнегреческим языком, слово «кибернетика» было вполне понятно. Оно означало систему взглядов, знаний, навыков, которой должен был обладать управляющий (губернатор) для того, чтобы эффективно управлять людьми и ресурсами, находящимися в его распоряжении. Большой вклад в кибернетику в целом и в теорию систем в частности внесли отечественные ученые — член Петербургской академии наук Евграф Степанович Федоров (1853–1919) и особенно Александр Александрович Богданов (1873–1928), деятель российского революционного движения, врач, философ, экономист (настоящая фамилия — Малиновский), с 1926 г. организатор и директор Института переливания крови. Погиб, производя на себе медицинский опыт. Основное сочинение А.А. Богданова — трехтомная «Всеобщая организационная наука (тектология)». Первый том напечатан в 1913 г. Полностью книга выходит в 1925–1929 г.

Многие идеи кибернетики были известны задолго до Н.Винера (хотя сам он об этом, скорее всего, и не догадывался). Почему же именно книга Н. Винера послужила толчком к развитию работ по теории управления, а не работы Трентовского, Федорова, Богданова? Одно из возможных объяснений — «Кибернетика» Винера появилась вовремя, после второй мировой войны, когда стали выделять большие ресурсы на развитие науки (это было реакцией правительств на продемонстрированную в Хиросиме и Нагасаки роль науки в практике). Подробнее эта точка зрения на развитие науки в XX в. рассмотрена в главе 3 части I учебника [19].

После второй мировой войны в рамках научного движения, включающего кибернетику, информатику, теорию управления, системный анализ, менеджмент и исследование операций, стала развиваться самостоятельная научно-практическая дисциплина — теория и практика экспертных оценок.

Метод Дельфи. Один из наиболее известных методов экспертных оценок — это *метод Дельфи*. Название дано по ассоциации с древним обычаем для получения поддержки при принятии решений обращаться в Дельфийский храм. Он был расположен у выхода ядовитых вулканических газов. Жрицы храма (пифии), надышавшись отравы, начинали пророчествовать, произнося непонятные слова. Специальные «переводчики» — жрецы храма толковали эти слова и отвечали на вопросы пришедших со своими проблемами паломников. Те спрашивали, отправляться ли в морское путешествие, вступать ли в брак, заключать ли договор с тем или иным деловым партнером, начинать ли войну, и т.д.

Технология экспертного оценивания состояла в следующем. Получив «заказ на экспертное прогнозирование», жрецы передавали его пифиям, выслушивали пророчества пифий, а затем толковали услышанное заказчику. С течением времени в храме накапливались пожертвования и памятные доски от тех, для кого прогнозы сбылись. Если же прогноз не осуществился, то сообщить об этом зачастую было некому, — заказчик лежал на морском дне или был убит в битве, разорен и продан в рабство, и т.п.

По традиции говорят, что Дельфийский храм находился в Греции. Но там нет вулканов. Видимо, он был в Италии — у Везувия или Этны, а сами описанные предсказания происходили в XII-XIV вв. Это вытекает из высшего достижения современной исторической науки — новой статистической хронологии.

В США в 60-х годах методом Дельфи назвали экспертную процедуру прогнозирования научно-технического развития. В первом туре эксперты называли вероятные даты тех или иных будущих свершений. Во втором туре каждый эксперт знакомился с прогнозами всех остальных. Если его прогноз сильно отличался от прогнозов основной массы экспертов, его просили пояснить свою позицию, и часто он изменял свои оценки, приближаясь к средним значениям. Эти средние значения и выдавались заказчику как групповое мнение. Надо сказать, что реальные результаты исследования оказались довольно скромными — хотя дата высадки американцев на Луну была предсказана с точностью до месяца, все остальные прогнозы провалились — холодного термоядерного синтеза и средства от рака в XX в. человечество не дождалось.

Однако сама методика оказалась популярной — за последующие 15 лет она использовалась не менее 40 тыс. раз. Это объяснялось впечатлением от беспрецедентного успеха предсказания даты высадки на Луну. Можно констатировать, что именно этот успех выдвинул методы экспертные оценки на роль самостоятельного научно-практического направления, с которым должны быть знакомы все инженеры и управленцы, а также деятели иных специальностей.

Средняя стоимость экспертного исследования по методу Дельфи — 5 тыс. долларов США, но в ряде случаев приходилось расходовать и более крупные суммы — до 130 тыс. долларов.

Метод сценариев. Несколько в стороне от основного русла экспертных оценок лежит *метод сценариев*, применяемый прежде всего для экспертного прогнозирования.

Рассмотрим основные идеи технологии сценарных экспертных прогнозов.

Социально-экономическое или, скажем, экологическое прогнозирование, как и любое прогнозирование вообще, может быть успешным лишь при некоторой стабильности условий. Однако решения органов власти, отдельных лиц, иные события меняют условия, и события развиваются по-иному, чем ранее предполагалось. Вполне очевидно, что после первого тура президентских выборов 1996 г. о дальнейшем развитии событий можно было говорить лишь в терминах сценариев: если во втором туре победит Б.Н. Ельцин, то будет то-то и то-то, если же победит Г.А. Зюганов, то события пойдут так-то и так-то.

Метод сценариев необходим не только в социально-экономической или экологической области. Например, при разработке методологического, программного и информационного обеспечения *анализа риска* химико-технологических проектов необходимо составить детальный каталог сценариев аварий, связанных с утечками токсических химических веществ. Каждый из таких сценариев описывает аварию своего типа, со своим индивидуальным происхождением, развитием, последствиями, возможностями предупреждения.

Таким образом, метод сценариев — это метод декомпозиции задачи прогнозирования, предусматривающий выделение набора отдельных вариантов развития событий (сценариев), в совокупности охватывающих все возможные варианты развития. При этом каждый отдельный сценарий должен допускать возможность достаточно точного прогнозирования, а общее число сценариев должно быть обозримо.

Возможность подобной декомпозиции не очевидна. При применении метода сценариев необходимо осуществить два этапа исследования:

— построение исчерпывающего, но обозримого набора сценариев;

— прогнозирование в рамках каждого конкретного сценария с целью получения ответов на интересующие исследователя вопросы.

Каждый из этих этапов лишь частично формализуем. Существенная часть рассуждений проводится на качественном уровне, как это принято в общественно-экономических и гуманитарных науках. Одна из причин заключается в том, что стремление к излишней формализации и математизации приводит к *искусственному* внесению определенности там, где ее нет по существу, либо к использованию громоздкого математического аппарата. Так, рассуждения на словесном уровне считаются доказательными в большинстве ситуаций, в то время как попытка уточнить смысл используемых слов с помощью, например, теории нечетких множеств, приводит к весьма громоздким математическим моделям.

Набор сценариев должен быть обозрим. Приходится исключать различные маловероятные события — прилет инопланетян, падение астероида, массовые эпидемии ранее неизвестных болезней, и т.д. Само по себе создание набора сценариев — предмет экспертного исследования. Кроме того, эксперты могут оценить вероятности реализации того или иного сценария.

Прогнозирование в рамках каждого конкретного сценария с целью получения ответов на интересующие исследователя вопросы также осуществляется в соответствии с описанной выше методологией прогнозирования. При стабильных условиях могут быть применены статистические методы прогнозирования временных рядов. Однако этому предшествует анализ с помощью экспертов, причем зачастую прогнозирование на словесном уровне является достаточным (для получения интересующих исследователя и ЛПР выводов) и не требующим количественного уточнения.

Как известно, при принятии решений на основе *анализа ситуации* (как говорят, при *ситуационном анализе*), в том числе анализа результатов прогнозных исследований, можно исходить из различных критериев. Так, можно ориентироваться на то, что ситуация сложится наихудшим, или наилучшим, или средним (в каком-либо смысле) образом. Можно попытаться наметить мероприятия, обеспечивающие минимально допустимые полезные результаты при любом варианте развития ситуации, и т.д.

Мозговой штурм. Еще один вариант экспертного оценивания — *мозговой штурм*. Организуется он как собрание экспертов, на выступления которых наложено одно, но очень существенное ограничение — нельзя критиковать предложения других. Можно их развивать, можно высказывать свои идеи, но нельзя критиковать! В ходе заседания эксперты, «заражаясь» друг от друга, высказывают все более экстравагантные соображения. Часа через два записываемое на магнитофон или видеокамеру заседание заканчивается, и начинается второй этап мозгового штурма — анализ высказанных идей. Обычно за время дискуссии высказывается около 100 идей. Из них примерно 30 заслуживают дальнейшей проработки, 5–6 идей дают возможность сформулировать прикладные проекты, а 2–3 идеи оказываются в итоге приносящими полезный эффект — прибыль, перевод конфликта в сотрудничество, повышение экологической безопасности, оздоровление окружающей природной среды и т.п.

При этом интерпретация идей — творческий процесс. Например, при обсуждении возможностей защиты кораблей от торпедной атаки была высказана идея: «Выстроить матросов вдоль борта и дуть на торпеду, чтобы изменить ее курс». После проработки эта идея привела к созданию устройств, создающих волны, сбивающиеся торпеду с курса.

Экспертные оценки на современном этапе. В настоящее время практически все виды трудовой деятельности так или иначе связаны с проведением экспертиз. Врачи и преподаватели, управленцы (менеджеры) и инженеры, юристы и экономисты — все они в той или иной степени эксперты. Классифицировать основные виды экспертной деятельности можно по областям конкретной профессиональной деятельности, а также по тем задачам, которые решают с помощью экспертных исследований.

По областям конкретной профессиональной деятельности выделяют, в частности, следующие виды экспертиз:

— строительная,
— медицинская,
— судебная,
— экологическая, в том числе объектов недропользования,
— товароведческая,
— экспертиза качества товаров,
— патентная,
— страховая,
— аудит,
— экспертиза при оценке имущества, бизнеса, нематериальных активов, и т.д. [9].

Экспертная деятельность в конкретных областях обычно регулируется соответствующими нормативными актами и осуществляется в соответствии с теми или иными методическими материалами. В дальнейших главах в качестве примера нормативного регулирования экспертной деятельности будем рассматривать Федеральный закон от 23 ноября 1995 г. N 174-ФЗ «Об экологической экспертизе» [7].

При классификации по решаемым задачам выделяют [9] оценочные и управленческие экспертизы.

Результатами *оценочных экспертиз* являются:

— численные оценки объектов (значений показателей, параметров, характеристик объектов);

— отнесение объектов экспертизы к тому или иному виду объектов, классу объектов, сорту;

— ранжирования объектов по тому или иному свойству, качеству, показателю, критерию;

— рейтинги, позволяющие определить численные значения, характеризующие сравнительную предпочтительность объектов экспертизы;

— индексы, позволяющие оценить (характеризующие) состояние объектов экспертизы,

— иные объекты числовой или нечисловой природы, используемые для оценивания объектов экспертизы (конкретные виды объектов нечисловой природы рассматриваются в следующих главах учебника).

Примерами результатов оценочных экспертиз, в частности, являются:

— результаты определения победителей конкурсов, тендеров, подрядных торгов, иных соревнований;

— рейтинги организаций (промышленных предприятий, вузов, банков, страховых компаний), ценных бумаг, политических деятелей, бизнесменов и спортсменов;

— индексы (Доу-Джонса и др.), характеризующие движение курсов ценных бумаг на биржах.

Результатом *управленческих экспертиз* является подготовка рекомендаций и заключений на всех этапах цикла выработки, принятия и реализации управленческих решений. К их числу относятся экспертизы при:

— выработке стратегии и тактики (определении стратегических целей, приоритетов деятельности, планов, организационных структур, разработке бизнес-планов и т.д.);

— подготовке аналитических материалов и проведении ситуационного анализа, включая разработку прогнозов и сценариев;

— генерировании и отборе альтернативных вариантов решений;

— оценке альтернативных вариантов решений и определении наиболее предпочтительного из них;

— контроле хода реализации принятых решений;

— корректировке принятых ранее управленческих решений на основании оценки хода реализации принятых решений.

Конечно, эти перечни не являются исчерпывающими. Они позволяют составить представление о том, насколько разнообразны задачи экспертных оценок и области их практического применения.

Нельзя не согласиться с мнением проф. Б.Г.Литвака, что экспертизы необходимы на всех стадиях управленческого цикла, в какой бы области деятельности ни принималось решение [9]. Без профессиональной экспертизы нет сегодня профессионально принятого решения!

Разработана масса методов получения экспертных оценок. В одних с каждым экспертом работают отдельно, он даже не знает, кто еще является экспертом, а потому высказывает свое мнение независимо от авторитетов. В других экспертов собирают вместе для подготовки материалов для ЛПР, при этом эксперты обсуждают проблему друг с другом, учатся друг у друга, и неверные мнения отбрасываются. В одних методах число экспертов фиксировано и таково, чтобы статистические методы проверки согласованности мнений и затем их усреднения позволяли принимать обоснованные решения. В других — число экспертов растет в процессе проведения экспертизы, например, при использовании метода «снежного кома» (о нем — ниже). Не меньше существует и методов обработки ответов экспертов, в том числе весьма насыщенных математикой и компьютеризированных. В дальнейшем на основе методологии, развитой в [15, 17, 19], будет рассмотрен ряд современных методов экспертных оценок.

5.2. Экспертные ранжировки и методы средних рангов

Познакомимся с часто используемым видом экспертных оценок — методами средних рангов. Разберем метод средних арифметических рангов, метод медианных рангов, а затем и метод согласования ранжировок (упорядочений), полученных с помощью нескольких экспертных процедур.

Современная теория измерений и экспертные оценки. Как проводить анализ собранных рабочей группой ответов экспертов? Отметим сразу же, что для более углубленного рассмотрения проблем экспертных оценок понадобятся некоторые понятия *теории измерений* (глава 6), служащей основой теории экспертных оценок, прежде всего той ее части, которая связана с анализом заключений экспертов, выраженных в качественном (а не в количественном) виде. Теория измерений интересует нас, в частности, в связи с агрегированием мнений экспертов, построением обобщенных показателей (их называют также рейтингами).

Получаемые от экспертов мнения часто выражены в *порядковой шкале*, т.е. эксперт может сказать (и обосновать), что один тип продукции будет более привлекателен для потребителей. Что один показатель качества продукции более важен, чем другой, первый технологический объект более опасен, чем второй, и т.д. Но он не в состоянии сказать, *во сколько раз* или *на сколько* более важен, соответственно, более опасен. Поэтому экспертов часто просят дать ранжировку (упорядочение) объектов экспертизы, т.е. расположить их в порядке возрастания (или, точнее, неубывания) интенсивности интересующей организаторов экспертизы характеристики.

Ранжировки определяются и изучаются с помощью рангов. Ранг — это номер (объекта экспертизы) в упорядоченном ряду. Формально ранги выражаются числами 1, 2, 3, ..., но весьма важно то, что с этими числами нельзя делать привычные арифметические операции. Например, хотя $1 + 2 = 3$, но нельзя утверждать, что для объекта, стоящем на третьем месте в упорядочении (в другой терминологии — ранжировке), интенсивность изучаемой характеристики равна сумме интенсивностей объектов с рангами 1 и 2. Так, один из видов экспертного оценивания — оценки достижений спортсменов. Разве можно сказать, что спортсмен, занявший третье место, достиг того же, что и спортсмены, занявшие первое и второе места, вместе взятые? Поэтому очевидно, что для анализа подобного рода качественных данных необходима не обычная арифметика, а другая теория, дающая базу для разработки, изучения и применения конкретных методов расчета. Эта другая теория и есть теория измерений (ТИ). Основы ТИ рассмотрены ниже в главе 6.

Рассмотрим в качестве примера необходимости применения результатов ТИ, касающихся средних величин в порядковой шкале, один сюжет, связанный с ранжировками и рейтингами.

Сравнение на основе средних баллов. В настоящее время распространены экспертные, маркетинговые, квалиметрические, социологические и иные опросы, в которых используются балльные оценки. В таких исследованиях опрашиваемых просят выставить баллы объектам, изделиям, технологическим процессам, предприятиям, проектам. Или же заявкам на выполнение научно-исследовательских работ, идеям, проблемам, программам, политикам и т.п. Затем рассчитывают средние баллы и рассматривают их *как интегральные* (*т.е. обобщенные, итоговые*) *оценки,* выставленные объектам экспертизы коллективом опрошенных экспертов. Упорядочение по интегральным оценкам дает итоговое мнение комиссии экспертов.

Однако какими формулами пользоваться для вычисления средних величин? Ведь средних величин существует, как известно, весьма много разных видов.

По традиции обычно применяют *среднее арифметическое*. Специалисты по теории измерений уже более 35 лет знают, что *такой способ некорректен*, поскольку баллы обычно измерены в *порядковой* шкале. Обоснованным является использование медиан в качестве средних баллов. Однако полностью *игнорировать средние арифметические нецелесообразно из-за их привычности и распространенности*. Поэтому ***представляется рациональным использовать одновременно оба метода — и метод средних арифметических баллов, и методов медиан баллов.*** Такая рекомендация находится в согласии с общенаучной *концепцией устойчивости* [14], рекомендующей применять различные методы для обработки одних и тех же данных с целью выделить выводы, получаемые одновременно при всех методах. Такие выводы, видимо, соответствуют реальной действительности, в то время как заключения, меняющиеся от метода к методу, зависят от субъективизма исследователя, выбирающего метод обработки исходных экспертных оценок.

Пример сравнения восьми проектов. Рассмотрим на протяжении настоящего раздела конкретный пример применения только что сформулированного подхода. В качестве баллов будем использовать ранги, присвоенные проектам в соответствии с их упорядочениями, полученными в результате работы экспертов.

В рассматриваемом далее примере по заданию руководства фирмы анализировались восемь проектов, предлагаемых для включения в план стратегического развития фирмы. Они обозначены следующим образом: Д, Л, М-К, Б, Г-Б, Сол, Стеф, К (по фамилиям менеджеров, предложивших их для рассмотрения). Все восемь проекты были направлены 12 экспертам, включенным в экспертную комиссию, организованную по решению Правления фирмы. В приведенной ниже табл.5.1 приведены ранги восьми проектов, присвоенные им каждым из 12 экспертов.

Ранги (т.е места в упорядоченном ряду) присваивались в соответствии с представлениями экспертов о целесообразности включения проектов в стратегический план фирмы. При этом эксперт присваивает ранг 1 самому лучшему проекту, который обязательно надо реализовать. Ранг 2 получает от эксперта второй по привлекательности проект, …, наконец, ранг 8 — наиболее сомнительный проект, который реализовывать стоит лишь в последнюю очередь.

Например, первый эксперт считает, что самый лучший проект — это М-К, затем идет проект Б, следующий — Л, затем идут (по уменьшению привлекательности) Сол, Д, Стеф, К, Г-Б. Таким образом, его мнение выражается ранжировкой

$$\text{М-К} < \text{Б} < \text{Л} < \text{Сол} < \text{Д} < \text{Стеф} < \text{К} < \text{Г-Б}.$$

В табл.5.1 эта ранжировка представлена в виде строки 1, которую можно заполнять последовательно: видим, что Д стоит на 5 месте, а потому записываем на пересечении строки 1 и столбца Д ранг 5. Проект Л стоит на 3-м месте — записываем ранг 3, и т.д. Возможен случай связанных рангов (см. примечание к табл.5.1).

Таблица 5.1

Ранги 8 проектов по степени привлекательности для включения в план стратегического развития фирмы

№ эксперта	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
1	5	3	1	2	8	4	6	7
2	5	4	3	1	8	2	6	7
3	1	7	5	4	8	2	3	6
4	6	4	2,5	2,5	8	1	7	5
5	8	2	4	6	3	5	1	7
6	5	6	4	3	2	1	7	8
7	6	1	2	3	5	4	8	7
8	5	1	3	2	7	4	6	8
9	6	1	3	2	5	4	7	8
10	5	3	2	1	8	4	6	7
11	7	1	3	2	6	4	5	8
12	1	6	5	3	8	4	2	7

Примечание. Эксперт № 4 считает, что проекты М-К и Б равноценны, но уступают лишь одному проекту — проекту Сол. Поэтому проекты М-К и Б должны были бы стоять на втором и третьем местах и получить баллы 2 и 3. Поскольку они равноценны, то получают средний балл $(2+3)/2 = 5/2 = 2{,}5$.

Подобная таблица может быть получена не только на основе ранжировок, но и путем выставления баллов непосредственно. Эксперты могут выставлять оценки в соответствии с определенной шкалой.

Анализируя результаты работы экспертов (т.е. упомянутую таблицу), члены аналитического подразделения Рабочей группы, анализировавшие ответы экспертов по заданию Правления фирмы, были вынуждены констатировать, что полного согласия между экспертами нет, а потому данные, приведенные в табл.1, следует подвергнуть более тщательному математическому анализу с целью получения итогового мнения комиссии экспертов.

Метод средних арифметических рангов. Сначала для получения группового мнения экспертов был применен метод средних арифметических рангов. Для этого, прежде всего, была подсчитана сумма рангов, присвоенных проектам (см. табл.5.1). Затем эта сумма была разделена на число экспертов, в результате рассчитан средний арифметический ранг (именно эта операция дала название методу). По средним рангам строится итоговая ранжировка (в другой терминологии — упорядочение), исходя из принципа — чем меньше средний ранг, тем лучше проект. Наименьший средний ранг, равный 2,625, у проекта Б, — следовательно, в итоговой ранжировке он получает ранг 1. Следующая по величине сумма, равная 3,125, у проекта М-К, — и он получает итоговый ранг 2. Проекты Л и Сол имеют одинаковые суммы (равные 3,25), значит, с точки зрения экспертов они равноценны (при рассматриваемом способе сведения вместе мнений экспертов), а потому они должны бы стоять на 3 и 4 местах и получают средний балл $(3+4)/2 = 3{,}5$. Дальнейшие результаты приведены в табл.5.2 ниже.

Итак, ранжировка по суммам рангов (или, что то же самое, по средним арифметическим рангам) имеет вид:

$$\text{Б} < \text{М–К} < \{\text{Л, Сол}\} < \text{Д} < \text{Стеф} < \text{Г–Б} < \text{К}\,. \qquad (5.1)$$

Здесь запись типа «А < Б» означает, что проект А предшествует проекту Б (т.е. проект А лучше проекта Б). Поскольку проекты Л и Сол получили одинаковую сумму баллов, то по рассматриваемому методу они эквивалентны, а потому объединены в группу (в фигурных скобках). В терминологии математической статистики ранжировка (5.1) имеет одну связь.

Метод медиан рангов. Значит, наука сказала свое слово, итог расчетов — ранжировка (5.1), и на ее основе предстоит принимать решение? Так был поставлен вопрос при обсуждении полученных результатов на заседании Правления фирмы. Но тут наиболее знакомый с организационно-экономическим моделированием член Правления вспомнил то, о чем шла речь выше. Он понял, что ответы экспертов измерены в порядковой шкале, а потому для них неправомерно проводить усреднение методом средних арифметических. Надо использовать метод медиан.

Таблица 5.2

Результаты расчетов по методу средних арифметических и методу медиан для данных, приведенных в табл.5.1

	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
Сумма рангов	60	39	37,5	31.5	76	39	64	85
Среднее арифметическое рангов	5	3,25	3,125	2,625	6,333	3,25	5,333	7,083
Итоговый ранг по среднему арифметическому	5	3,5	2	1	7	3,5	6	8
Медианы рангов	5	3	3	2,25	7,5	4	6	7
Итоговый ранг по медианам	5	2,5	2,5	1	8	4	6	7

Что это значит? Надо взять ответы экспертов, соответствующие одному из проектов, например, проекту Д. Это ранги 5, 5, 1, 6, 8, 5, 6, 5, 6, 5, 7, 1. Затем их надо расположить в порядке неубывания (проще было бы сказать — «в порядке возрастания», но поскольку некоторые ответы совпадают, то приходится использовать несколько непривычный термин «неубывание»). Получим последовательность: 1, 1, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8. На центральных местах — шестом и седьмом — стоят 5 и 5. Следовательно, медиана (в соответствии с определением) равна их среднему арифметическому, т.е. 5.

Медианы совокупностей из 12 рангов, соответствующих определенным проектам, приведены в предпоследней строке табл.5.2. (При этом медианы вычислены по обычным правилам статистики — как среднее арифметическое центральных членов вариационного ряда. Если бы число экспертов было нечетным, в качестве медианы надо было бы взять центральный член вариационного ряда.) Итоговое упорядочение комиссии экспертов по методу медиан приведено в последней строке табл.5.2. Ранжировка (т.е. упорядочение — итоговое мнение комиссии экспертов) по медианам имеет вид:

$$Б < \{М–К, Л\} < Сол < Д < Стеф < К < Г–Б . \qquad (5.2)$$

Поскольку проекты Л и М-К имеют одинаковые медианы баллов, то по рассматриваемому методу ранжирования они эквивалентны, а потому объединены в группу (кластер), т.е. с точки зрения математической статистики ранжировка (5.2) имеет одну связь.

Сравнение ранжировок по методу средних арифметических и методу медиан. Сравнение ранжировок (5.1) и (5.2) показывает их близость (похожесть). С точки зрения здравого смысла можно принять, что проекты М-К, Л, Сол упорядочены как М-К $<$ Л $<$ Сол, но из-за погрешностей экспертных оценок в одном методе признаны равноценными проекты Л и Сол (ранжировка (5.1)), а в другом — проекты М-К и Л (ранжировка (5.2)). Существенным является только расхождение, касающееся упорядочения проектов К и Г-Б: в ранжировке (5.1) Г-Б $<$ К, а в ранжировке (5.2), наоборот, К $<$ Г-Б. Однако эти проекты — наименее привлекательные из восьми рассматриваемых, и при выборе наиболее привлекательных проектов для дальнейшего обсуждения и использования на указанное расхождение можно не обращать внимания.

Рассмотренный пример демонстрирует сходство и различие ранжировок, полученных по методу средних арифметических рангов и по методу медиан, а также пользу от их совместного применения.

5.3. Метод согласования кластеризованных ранжировок

Только что проведенное сравнение ранжировок по методу средних арифметических и методу медиан оставляет ощущение недостаточно строгого подхода. Обсудим проблему согласования кластеризованных ранжировок в общем виде и разберем математический алгоритм такого согласования.

Постановка задачи. Проблема состоит в выделении общего нестрогого порядка из набора кластеризованных ранжировок (на статистическом языке — ранжировок со связями). Этот набор может отражать мнения нескольких экспертов или быть получен при обработке мнений экспертов различными методами. *Предлагается применять метод согласования кластеризованных ранжировок, позволяющий «загнать» противоречия внутрь специальным образом построенных кластеров (групп), в то время как упорядочение кластеров соответствует одновременно всем исходным упорядочениям.*

В различных прикладных областях возникает необходимость анализа нескольких кластеризованных ранжировок объектов. К таким областям относятся, прежде всего, инженерный бизнес, менеджмент, экономика, социология, экология, экология, прогнозирование, научные и технические исследования и т.д. Особенно те их разделы, что связаны с экспертными оценками (см., например, [6, 16]). В качестве объектов могут выступать образцы продукции, технологии, математические модели, проекты, кандидаты на должность и др. Кластеризованные ранжировки могут быть получены как с помощью экспертов, так и объективным путем, например, при сопоставлении математических моделей с экспериментальными данными с помощью того или иного критерия качества. Описанный ниже метод был разработан в связи с проблемами химической безопасности биосферы и экологического страхования [6].

В настоящем разделе рассматривается ***метод построения кластеризованной ранжировки, согласованной (в раскрытом ниже смысле) со всеми рассматриваемыми кластеризованными ранжировками. При этом противоречия между отдельными исходными ранжировками оказываются заключенными внутри кластеров согласованной ранжировки. В результате упорядоченность кластеров отражает общее мнение экспертов, точнее, то общее, что содержится в исходных ранжировках.***

В кластеры заключены объекты, по поводу которых некоторые из исходных ранжировок *противоречат* друг другу. Для их упорядочения необходимо провести новые исследования. Эти исследования могут быть как формально-математическими (например, вычисление медианы Кемени (о ней — ниже в главе 7), упорядочения внутри группы по средним рангам или по медианам с привлечением новых экспертов, и т.п.), так и требовать привлечения новой информации из соответствующей прикладной области, возможно, проведения дополнительных научных или прикладных работ.

Введем необходимые понятия, затем сформулируем алгоритм согласования кластеризованных ранжировок в общем виде и рассмотрим его свойства.

Пусть имеется конечное число объектов, которые мы для простоты изложения будем изображать натуральными числами 1, 2, 3, …, k и называть их совокупность «носителем». *Под кластеризованной ранжировкой, определенной на заданном носителе, понимаем следующую математическую конструкцию*. Пусть объекты разбиты на группы, которые будем называть кластерами. В кластере может быть и один элемент. Входящие в один кластер объекты будем заключать в фигурные скобки. Например, объекты 1, 2, 3, …, 10 могут быть разбиты на 7 кластеров: {1}, {2,3}, {4}, {5,6,7}, {8}, {9}, {10}. В этом разбиении один кластер {5,6,7} содержит три элемента, другой — {2,3} — два, остальные пять — по одному элементу. Кластеры не имеют общих элементов, а объединение их (как множеств) есть все рассматриваемое множество объектов (весь носитель).

Вторая составляющая кластеризованной ранжировки — это строгий линейный порядок между кластерами. Задано, какой из них первый, какой второй, и т.д. Будем изображать упорядоченность с помощью знака $<$. При этом кластеры, состоящие из одного элемента, будем для простоты записи изображать без фигурных скобок. Тогда кластеризованную ранжировку на основе введенных выше кластеров можно изобразить так:

$$A = [1 < \{2,3\} < 4 < \{5,6,7\} < 8 < 9 < 10].$$

Конкретные кластеризованные ранжировки будем заключать в квадратные скобки. Если для простоты речи термин «кластер» применять только к кластеру не менее чем из 2-х элементов, то можно сказать, что в кластеризованную ранжировку A входят два кластера {2,3} и {5,6,7} и 5 отдельных элементов.

Кластеризованная ранжировка, введенная описанным образом, является бинарным отношением на носителе — множестве {1, 2, 3, …, 10}. Его структура такова. Задано отношение эквивалентности с 7-ю классами эквивалентности, а именно, {2,3}, {5,6,7}, а остальные 5 классов состоят из оставшихся 5 отдельных элементов. Затем введен строгий линейный порядок между классами эквивалентности.

Рассматриваемый математический объект известен в литературе как *«ранжировка со связями»* (М. Холлендер, Д. Вулф, [26]), *«упорядочение»* (Дж. Кемени, Дж. Снелл, [8]), *«квазисерия»* (Б.Г. Миркин, [12]), *«совершенный квазипорядок»* (Ю.А. Шрейдер [27, с.127, 130]). Учитывая разнобой в терминологии, было признано полезным ввести собственный термин *«кластеризованная ранжировка»,* поскольку в нем явным образом названы основные элементы изучаемого математического объекта — кластеры, рассматриваемые на этапе согласования ранжировок как классы эквивалентности, и ранжировка — строгий совершенный порядок между ними (в терминологии Ю.А. Шрейдера [27, гл.IV]).

Следующее важное понятие — *противоречивость*. Оно определяется для четверки — две кластеризованные ранжировки на одном и том же носителе и два различных объекта — элементы того же носителя. При этом два элемента из одного кластера будем связывать символом равенства $=$, как эквивалентные.

Пусть A и B — две кластеризованные ранжировки. *Пару объектов* (a,b) *назовем «противоречивой» относительно кластеризованных ранжировок A и B, если эти два элемента по-разному упорядочены в A и B, т.е. $a < b$* в *A и $a > b$ в B* (*первый вариант противоречивости*) *либо $a > b$ в A и $a < b$ в B* (*второй вариант противоречивости*). Отметим, что в соответствии с этим определением пара объектов (a,b), эквивалентная хотя бы в одной кластеризованной ранжировке, не может быть противоречивой, поскольку эквивалентность $a = b$ не образует «противоречия» ни с $a < b$, ни с $a > b$. Это свойство оказывается полезным при выделении противоречивых пар.

В качестве примера рассмотрим, кроме A, еще две кластеризованные ранжировки

$$B = [\{1,2\} < \{3,4,5\} < 6 < 7 < 9 < \{8, 10\}],$$

$$C = [3 < \{1, 4\} < 2 < 6 < \{5, 7, 8\} < \{9, 10\}].$$

Совокупность противоречивых пар объектов для двух кластеризованных ранжировок A и B назовем «ядром противоречий» и обозначим $S(A,B)$. Для рассмотренных выше в качестве примеров трех кластеризованных ранжировок A, B и C, определенных на одном и том же носителе $\{1, 2, 3,\ldots, 10\}$, имеем

$$S(A,B) = [(8, 9)],\ S(A,C) = [(1, 3), (2,4)],$$

$$S(B,C) = [(1, 3), (2, 3), (2, 4), (5, 6), (8,9)].$$

Как при ручном, так и при программном нахождении ядра можно в поисках противоречивых пар просматривать пары (1, 2), (1, 3), (1, 4), …. , (1, k), затем (2, 3), (2, 4), …, (2, k), потом (3, 4), …, (3, k), и т.д., вплоть до последней пары (k–1, k).

Пользуясь понятиями дискретной математики, «ядро противоречий» можно изобразить *графом* с вершинами в точках носителя. При этом *противоречивые пары задают ребра этого графа.* Граф для $S(A,B)$ имеет только одно ребро (одна связная компонента более чем из одной точки), для $S(A,C)$ — 2 ребра (две связные компоненты более чем из одной точки), для $S(B,C)$ — 5 ребер (три связные компоненты более чем из одной точки, а именно, {1, 2 , 3, 4}, {5, 6} и {8, 9}).

Каждую кластеризованную ранжировку, как и любое бинарное отношение, можно задать матрицей $||x(a,b)||$ из 0 и 1 порядка $k \times k$. При этом $x(a,b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a < b$ либо $a = b$. В первом случае $x(b,a) = 0$, а во втором $x(b,a) = 1$. При этом всегда хотя бы одно из чисел $x(a,b)$ и $x(b,a)$ равно 1. Из определения противоречивости пары (a,b) вытекает, что для нахождения всех таких пар достаточно поэлементно перемножить две матрицы $||x(a,b)||$ и $||y(a,b)||$, соответствующие двум кластеризованным ранжировкам, и отобрать те и только те пары, для которых $x(a,b)y(a,b) = x(b,a)y(b,a)=0$.

Предлагаемый алгоритм согласования некоторого числа (двух или более) кластеризованных ранжировок состоит из трех этапов. На первом *выделяются противоречивые пары* объектов во всех парах кластеризованных ранжировок. На втором формируются кластеры итоговой кластеризованной ранжировки (т.е. классы эквивалентности — *связные компоненты графов*, соответствующих объединению попарных ядер противоречий). На третьем этапе эти *кластеры* (*классы эквивалентности*) *упорядочиваются*. Для установления порядка между кластерами произвольно выбирается один объект из первого кластера и второй — из второго, порядок между кластерами устанавливается такой же, какой имеется между выбранными объектами в любой из рассматриваемых кластеризованных ранжировок. (Если в одной из исходных кластеризованных ранжировок имеется равенство, а в другой — неравенство, то при построении итоговой кластеризованной ранжировки используется неравенство.)

Корректность подобного упорядочивания, т.е. его независимость от выбора той или иной пары объектов при упорядочении двух кластеров и транзитивность такого упорядочения, вытекает из соответствующих теорем, доказанных в статье [6].

Два объекта из разных кластеров согласующей кластеризованной ранжировки могут оказаться эквивалентными в одной из исходных кластеризованных ранжировок (т.е. находиться в одном кластере). В таком случае надо рассмотреть упорядоченность этих объектов в какой-либо другой из исходных кластеризованных ранжировок. Если же во всех исходных кластеризованных ранжировках два рассматриваемых объекта находились в одном кластере, то естественно считать (и это является уточнением к этапу 3 алгоритма), что они находятся в одном кластере и в согласующей кластеризованной ранжировке.

Результат согласования кластеризованных ранжировок A, B, C,… обозначим $f(A, B, C,\ldots)$. Тогда

$$f(A, B) = [1<2<3<4<5<6<7<\{8, 9\}<10],$$
$$f(A, C) = [\{1,3\}<\{2, 4\}<6<\{5,7\}<8<9<10],$$
$$f(B, C) = [\{1,2,3,4\}<\{5,6\}<7<\{8,9\}<10],$$
$$f(A, B, C) = f(B, C) = [\{1,2,3,4\} <\{5,6\}<7<\{8, 9\}<10].$$

Итак, в случае $f(A, B)$ дополнительного изучения с целью упорядочения требуют только объекты 8 и 9. В случае f(А, C) кластер {5,7} появился не потому, что относительно объектов

5 и 7 имеется противоречие, а потому, что в обеих исходных ранжировках эти объекты не различаются. В случае $f(B, C)$ четыре объекта 1, 2, 3, 4 объединились в один кластер, т.е. кластеризованные ранжировки оказались настолько противоречивыми, что процедура согласования не позволила провести достаточно полную декомпозицию задачи нахождения итогового мнения экспертов.

Рассмотрим некоторые свойства алгоритмов согласования.

1. Пусть $D = f(A, B, C, \ldots)$. Если $a<b$ в согласующей кластеризованной ранжировке D, то $a<b$ или $a=b$ в каждой из исходных ранжировок A, B, C, ..., причем хотя бы в одной из них справедливо строгое неравенство.

2. Построение согласующих кластеризованных ранжировок может осуществляться поэтапно. В частности, $f(A,B,C) = f(f(A,B), f(A,C), f(B,C))$. Ясно, что *ядро противоречий для набора кластеризованных ранжировок является объединением таких ядер для всех пар рассматриваемых ранжировок*.

3. Построение согласующих кластеризованных ранжировок нацелено на выделение общего упорядочения в исходных кластеризованных ранжировках. Однако при этом некоторые общие свойства исходных кластеризованных ранжировок могут теряться. Так, при согласовании ранжировок B и C, рассмотренных выше, противоречия в упорядочении элементов 1 и 2 не было — в ранжировке B эти объекты входили в один кластер, т.е. $1 = 2$, в то время как $1<2$ в кластеризованной ранжировке C. Значит, при их отдельном рассмотрении можно принять упорядочение $1<2$. Однако в $f(B,C)$ они попали в один кластер, т.е. возможность их упорядочения исчезла. Это связано с поведением объекта 3, который «перескочил» в C на первое место и «увлек с собой в противоречие» пару (1, 2), образовав противоречивые пары и с 1, и с 2. Другими словами, связная компонента графа, соответствующего ядру противоречий, сама по себе не всегда является полным графом. Недостающие ребра при этом соответствуют парам типа (1, 2), которые сами по себе не являются противоречивыми, но «увлекаются в противоречие» другими парами.

4. Необходимость согласования кластеризованных ранжировок возникает, в частности, при разработке методики применения экспертных оценок в задачах экологического страхования и химической безопасности биосферы. Как уже говорилось в предыдущем разделе, популярным является метод упорядочения по средним рангам, в котором итоговая ранжировка строится на основе средних арифметических рангов, выставленных отдельными экспертами [10, 16]. Однако из теории измерений известно (см. главу 6 ниже), что более обоснованным является использование не средних арифметических, а медиан. Вместе с тем метод средних арифметических рангов весьма известен и широко применяется, так что просто отбросить его нецелесообразно. Участвующие в исследование и привыкшие к метод средних арифметических рангов специалисты не поймут и не примут такого решения РГ. Поэтому было принято решение об одновременном применении обеих методов. Реализация этого решения потребовала разработки приведенной выше методики согласования двух указанных кластеризованных ранжировок. Практическая апробация [20, 25] метода продемонстрировала правильность принятого решения об одновременном использовании метода средних арифметических рангов и метода медиан рангов.

5. Область применения рассматриваемого метода не ограничивается экспертными оценками. Он может быть использован, например, для сравнения качества математических моделей процесса испарения жидкости. Так, в одной из наших научно-исследовательских работ имелись данные экспериментов и результаты расчетов по 8 математическим моделям. Сравнивать модели можно по различным критериям качества. Например, по сумме модулей относительных отклонений расчетных и экспериментальных значений. Можно действовать и по-другому. Например, в каждой экспериментальной точке упорядочить модели по качеству, а потом получать единые оценки методами средних рангов и медиан. Использовались и иные методы. Затем применялись методы согласования полученных различными способами кластеризованных ранжировок. В результате оказалось возможным упорядочить модели по качеству и использовать это

упорядочение при разработке банка математических моделей, используемого в задачах химической безопасности биосферы (ср. [16, приложение 3]).

6. Отметим, что во многих случаях кластеризованные ранжировки, полученные двумя методами, совпадали или были весьма близки, как в примере, рассмотренном в предыдущем разделе. Теоретическое объяснение этому экспериментальному факту дает теорема 6.2 главы 6. Можно выдвинуть важный методологический принцип (в соответствии с общей теорией устойчивости [14]): в случае, когда объекты реально упорядочены, этот порядок выявит любой способ анализа данных. Проблема в том, что мы не знаем заранее, упорядочены ли объекты в действительности или нет. И одновременное применение двух (или более) методов позволяет найти ответ на этот вопрос. Если результаты анализа данных совпадают или почти совпадают — повышается уверенность в том, что они отражают действительность. Если результаты, полученные с помощью двух методов анализа данных, весьма различаются — значит, они не отражают реальность. Выводы, зависящие от субъективного выбора исследователем того или иного метода анализа данных, не могут использоваться для принятия объективного решения.

Итак, рассматриваемый метод согласования кластеризованных ранжировок построен в соответствии с *методологией теории устойчивости* [14], согласно которой результат обработки данных, инвариантный относительно метода обработки, соответствует реальности, а результат расчетов, зависящий от метода обработки, отражает субъективизм исследователя, а не объективные соотношения.

Применим метод согласования к ранжировкам (5.1) и (5.2). Имеется только одна противоречивая пара (К, Г-Б), и согласующая ранжировка имеет вид

$$\text{Б} < \text{М–К} < \text{Л} < \text{Сол} < \text{Д} < \text{Стеф} < \{\text{К, Г–Б}\}. \qquad (5.3)$$

5.4. Организация работы экспертной комиссии

Познакомившись с примерами процедур экспертных оценок, обсудим общие вопросы организации экспертного исследования.

Основные стадии экспертного опроса. Более подробно рассмотрим отдельные этапы типового экспертного исследования. Как показывает практический опыт, с точки зрения менеджера — организатора такого исследования целесообразно выделять следующие стадии проведения экспертного опроса.

1) *Принятие решения о необходимости проведения экспертного опроса и формулировка его цели Лицом, Принимающим Решения* (*ЛПР*). Таким образом, инициатива должна исходить от руководства, что в дальнейшем обеспечит успешное решение организационных и финансовых проблем. Очевидно, что исходный толчок может быть дан докладной запиской одного из сотрудников или дискуссией на совещании, но реальное начало работы — решение ЛПР. Цель экспертного исследования ЛПР может сформулировать по-разному, и от этой формулировки зависит выбор процедуры экспертизы.

2) *Подбор и назначение ЛПР основного состава Рабочей группы,* сокращенно РГ (обычно — научного руководителя и ответственного секретаря). При этом научный руководитель отвечает за организацию и проведение экспертного исследования в целом, а также за анализ собранных материалов и подготовку заключения экспертной комиссии. Он участвует в формировании коллектива экспертов и выдаче задания каждому эксперту (вместе с ЛПР или его представителем). Он сам — высококвалифицированный эксперт и признаваемый другими экспертами формальный и неформальный руководитель экспертной комиссии. Дело ответственного секретаря — ведение документации экспертного опроса, решение организационных задач. Назначение научного руководителя и ответственного секретаря оформляется распорядительным документом (приказом, постановлением и т.п.). Остальной состав РГ обычно формируется позже, в процессе развертывания исследования,

причем по предложениям научного руководителя и ответственного секретаря.

3) *Разработка РГ* (точнее, ее основным составом, прежде всего научным руководителем и ответственным секретарем) *и утверждение у ЛПР технического задания на проведение экспертного опроса*. На этой стадии решение о проведении экспертного опроса приобретает четкость во времени, финансовом, кадровом, материальном и организационном обеспечении. В частности, формируется костяк Рабочей Группы со своей внутренней структурой. Обычно в РГ выделяются различные группы специалистов — аналитическая, эконометрическая (специалисты по методам анализа данных), компьютерная, по работе с экспертами (например, интервьюеров), организационная. (Конечно, возможно совмещение ролей — один и тот же сотрудник может и отвечать за выбор метода анализа экспертных мнений, и сам же проводить этот анализ.) Очень важно для успеха, чтобы все перечисленные позиции были включены в ТЗ и утверждены ЛПР.

4) *Разработка аналитической группой РГ подробного сценария* (*т.е. регламента, правил*) *проведения сбора и анализа экспертных мнений* (*оценок*). Термин «сценарий» имеет примерно тот же смысл, что и в театре и кинематографе. Сценарий включает в себя, прежде всего, анкеты и опросные листы (планы интервью), определяющие конкретный вид информации, которая будет получена от экспертов (например, слова, условные градации, числа, ранжировки, разбиения или иные виды объектов нечисловой природы). Например, довольно часто экспертов просят высказаться в свободной форме, ответив при этом на некоторые количество заранее сформулированных вопросов. Кроме того, их просят заполнить формальную карту, в каждом пункте выбрав одну из нескольких градаций (см. примеры в разд.5.1).

Сценарий должен содержать и конкретные методы анализа собранной информации. Например, вычисление медианы Кемени, статистический анализ люсианов, применение иных методов статистики объектов нечисловой природы и других разделов прикладной статистики (о некоторых из названных методов речь пойдет ниже, см. также [16, 18]). Эта работа ложится на эконометрическую и компьютерную группу РГ.

Традиционная ошибка — сначала собрать информацию, а потом думать, что с ней делать. В результате, как показывает печальный практический опыт, информация используется не более чем на 1–2%. Причины в том, что в большом ворохе беспорядочно собранных фактов, как правило, отсутствует необходимая упорядоченность. А именно, значения отдельных показателей собраны с пропусками, способы измерения меняются от одного эксперта к другому, от одного объекта экспертизы к другому (как говорят, определения «плывут»), сам перечень показателей не позволяет ответить на интересующие ЛПР вопросы, и т.д.

Сценарий утверждается научным руководителем ЭК.

5) *Подбор экспертов* в соответствии с их компетентностью. На этой стадии РГ составляет список возможных экспертов и оценивает степень их пригодности для планируемого исследования. Итоговый перечень должен включать по крайней мере в 1,5 раза больше потенциальных экспертов, чем то количество, которое планируется реально привлечь к работе.

6) *Формирование экспертной комиссии*. На этой стадии РГ проводит переговоры с экспертами, получает их согласие на работу в экспертной комиссии (сокращенно ЭК). Возможно, часть намеченных РГ (на стадии 5) экспертов не сможет войти в экспертную комиссию (болезнь, отпуск, командировка и др.) или откажется по тем или иным причинам (занятость, условия контракта и др.). В обязательном порядке ЛПР утверждает состав экспертной комиссии, возможно, вычеркнув или добавив часть экспертов к предложениям РГ. Проводится заключение договоров с экспертами об условиях их работы и ее оплаты. На этой же стадии завершается формирование РГ.

7) *Проведение сбора экспертной информации* в соответствии с разработанным на стадии 4 сценарием. Часто перед этим проводится набор и обучение интервьюеров — одной из групп, входящих в РГ.

8) Компьютерный *анализ экспертной информации* с помощью включенных в сценарий методов. Ему обычно предшествует компьютеризация экспертных мнений, т.е. создание и

наполнение соответствующих баз данных или электронных таблиц.

9) При применении (согласно сценарию) экспертной процедуры из нескольких туров — *повторение* двух предыдущих этапов.

10) *Итоговый анализ экспертных мнений, интерпретация полученных результатов* аналитической группой РГ и *подготовка заключительного документа* ЭК для ЛПР. Форма заключения ЭК обычно задается в ТЗ. В Федеральном законе «Об экологической экспертизе» [7] требованиям к заключению ЭК посвящена обширная глава 18.

11) Официальное *окончание* деятельности ЭК и РГ, в том числе *утверждение ЛПР заключительного документа ЭК*, подготовка и утверждение научного и финансового отчетов РГ о проведении экспертного исследования, оплата труда экспертов и сотрудников РГ, официальное прекращение деятельности (роспуск) ЭК и РГ.

Научный отчет РГ должен позволять восстанавливать все подробности деятельности ЭК на основе документов. В частности, в него должны быть включены все полученные от экспертов материалы и протоколы компьютерной обработки данных. Этот отчет может быть использован в суде и арбитражном суде в случае, если заинтересованные организации и лица сочтут нужным оспорить выводы ЭК в судебном порядке.

Подбор экспертов. Разберем подробнее отдельные стадии экспертного исследования. Начнем с подбора экспертов: кадры решают все! Каковы эксперты — таково и качество заключения экспертной комиссии.

Проблема подбора экспертов является одной из наиболее сложных в теории и практике экспертных исследований. Очевидно, в качестве экспертов необходимо использовать тех людей, чьи суждения наиболее помогут принятию адекватного решения. Но как выделить, найти, подобрать таких людей? Надо прямо сказать, что *нет методов подбора экспертов, наверняка обеспечивающих успех экспертизы*. Сейчас не будем обсуждать проблему существования различных «партий» среди экспертов и обратим внимание на иные стороны процедур подбора экспертов.

В проблеме подбора экспертов можно выделить две составляющие — *составление списка возможных экспертов* и *выбор из них экспертной комиссии в соответствии с компетентностью кандидатов*.

Составление списка возможных экспертов облегчается тогда, когда рассматриваемый вид экспертизы проводится многократно. В таких ситуациях обычно ведется *реестр* возможных экспертов, например, в области государственной экологической экспертизы или судейства фигурного катания, из которого можно выбирать по различным критериям или с помощью датчика (или таблицы) псевдослучайных чисел.

Как быть, если экспертиза проводится впервые, устоявшиеся списки возможных экспертов отсутствуют? Однако и в этом случае у каждого конкретного специалиста есть некоторое представление о том, что требуется от эксперта в подобной ситуации. Для формирования списка есть полезный метод *«снежного кома»*. Это — вспомогательное экспертное исследование. Название связано с ассоциацией с известной всем процедурой, когда небольшой снежок много раз поворачивается по поверхности свежевыпавшего снега. При каждом повороте на снежок налипает новый слой, и в результате получается большой снежный ком.

Метод «снежного кома». В качестве затравки используется подобранная РГ небольшая (3–5 человек) группа потенциальных экспертов. В методе «снежного кома» от каждого специалиста, привлекаемого в качестве эксперта, получают определенное количество (обычно 5– 10) фамилий тех, кто может быть экспертом по рассматриваемой тематике. Очевидно, некоторые из этих фамилий встречались ранее в деятельности РГ, а некоторые — новые. Каждого вновь появившегося опрашивают по той же схеме. Процесс расширения списка останавливается, когда новые фамилии практически перестают встречаться или когда список достигает необходимого размера. В результате получается достаточно обширный список возможных экспертов.

Рассмотрим условный пример. В качестве затравки РГ подобрала 5 потенциальных экспертов. Каждый из них назвал 10 новых фамилий. Всего РГ получила 50 фамилий. После исключения повторов и лиц, которые не смогут быть экспертами, в списке осталось 40%, т.е. 20 новых фамилий. На следующем туре РГ получает суммарно 200 фамилий. Пусть из них только 30% тех, которые можно добавить к списку. Это 60 человек. При их опросе получаем 600 фамилий. Если из них только 20% реально добавляется к списку, то итог этого тура — 120 фамилий. Подведем итог. В списке уже 5 + 20 + 60 + 120 = 205 фамилий. Можно остановиться, поскольку на основе этого списка, очевидно, можно сформировать ЭК (типовое число членов ЭК — от 10 до 30).

Метод *«снежного кома»* имеет и недостатки. Число туров до остановки процесса наращивания кома нельзя заранее предсказать. Нельзя априори надеяться, что в обозримой окрестности имеется достаточное число экспертов. Кроме того, ясно, что если на первом этапе все эксперты были из одного «клана», придерживались в чем-то близких взглядов или занимались сходной деятельностью, то и метод «снежного кома» даст, скорее всего, лиц из этого же «клана». Мнения и аргументы других «кланов» будут упущены.

Здесь речь идет о том, что сообщество специалистов реально разбито на группы, названные выше «кланами», и общение идет в основном внутри «кланов». Неформальная структура науки, к которой относятся «кланы», достаточно сложна для изучения. Отметим здесь, что «кланы» обычно образуются на основе крупных формальных центров (вузов, научных институтов), научных школ [23].

Компетентность экспертов. Вопрос об оценке компетентности экспертов не менее сложен. Ясно, что успешность участия в предыдущих экспертизах — хороший критерий для деятельности дегустатора, врача, судьи в спортивных соревнованиях, т.е. таких экспертов, которые участвуют в длинных сериях однотипных экспертиз. Однако, увы, наиболее интересны и важны уникальные экспертизы больших проектов, не имеющих аналогов. Использование формальных показателей экспертов (должность, ученые степень и звание, стаж, число публикаций…), очевидно, в современных быстро меняющихся условиях может носить лишь вспомогательный характер, хотя подобные показатели проще всего применять.

Часто предлагают использовать методы самооценки и взаимооценки компетентности экспертов. Обсудим их, начав с метода *самооценки*, при котором эксперт сам дает информацию о том, в каких областях он компетентен, а в каких — нет. С одной стороны, кто лучше может знать возможности эксперта, чем он сам? С другой стороны, при самооценке компетентности скорее оценивается степень самоуверенности эксперта, чем его реальная компетентность. Тем более, что само понятие *«компетентность»* строго не определено. Можно его уточнять, выделяя составляющие, но при этом усложняется предварительная часть деятельности экспертной комиссии.

Достаточно часто эксперт преувеличивает свою реальную компетентность. Например, большинство людей считают, что они хорошо разбираются в политике, экономике, проблемах образования и воспитания, семьи и медицины. На самом деле экспертов (и даже знающих людей) в этих областях весьма мало.

Бывают уклонения и в другую сторону, излишне критичное отношение к своим возможностям. Нам известен доцент МГУ им. М.В. Ломоносова, написавший добротный университетский учебник по математической статистике, который заявляет, что он не является специалистом по математической статистике. Видимо, он признает себя специалистом лишь в той узкой научной области, которой посвящены его последние научные статьи. Подобный гиперкритицизм по отношению к себе представляется непродуктивным. Более естественной выглядит рекомендация Е.С. Вентцель: «Если вы хотите изучить какой-либо предмет, напишите по нему книгу» (из личной беседы). Действительно, при написании книги приходится разбираться в рассматриваемом вопросе и к концу составления текста становиться высококвалифицированным специалистом — экспертом.

При использовании метода *взаимооценки*, когда оценку компетентности конкретного эксперта дают другие эксперты (или кандидаты в эксперты), помимо возможности проявления личностных и групповых симпатий и антипатий, играет роль малая осведомленность экспертов о профессиональных возможностях друг друга. В современных условиях достаточно хорошее знакомство с работами и возможностями друг друга может быть лишь у специалистов, много лет (не менее 3–4) работающих совместно, в одной комнате, над одной темой. Именно про такие пары можно сказать, что они «*вместе пуд соли съели*». (По примерному расчету, если каждый рабочий день обедать вместе и солить блюда из одной солонки, пуд соли будет съеден за 3,5 года.) Однако привлечение таких пар специалистов в ЭК не очень-то целесообразно, поскольку их взгляды из-за схожести жизненного пути слишком похожи друг на друга.

Если процедура экспертного опроса предполагает непосредственное общение экспертов, необходимо учитывать еще ряд обстоятельств. Большое значение имеют их личностные (социально-психологические) качества. Так, один-единственный «*говорун*» может парализовать деятельность всей комиссии на совместном заседании. К срыву могут привести и неприязненные отношения членов комиссии, и сильно различающийся научный и должностной статус членов комиссии. В подобных случаях важно соблюдение регламента работы, разработанного РГ.

Необходимо подчеркнуть, что подбор экспертов — одна из основных функций Рабочей группы, и никакие методики подбора не снимают с нее ответственности. Другими словами, именно на РГ лежит ответственность за компетентность экспертов, за их принципиальную способность решить поставленную задачу. Важным является требование к ЛПР об утверждении списка экспертов. При этом ЛПР может как добавить в комиссию отдельных экспертов, так и вычеркнуть некоторых из них — по собственным соображениям, с которыми членам РГ и ЭК знакомиться нет необходимости.

Нормативное регулирование состава экспертов. Существует ряд нормативных документов, регулирующих деятельность экспертных комиссий в тех или иных областях. Примером является Закон Российской Федерации «Об экологической экспертизе» от 23 ноября 1995 г. [7], в котором регламентируется процедура экспертизы «намечаемой хозяйственной или иной деятельности» с целью выявления возможного вреда, который может нанести рассматриваемая деятельность окружающей природной среде. В этом законе указаны дополнительные требования к экспертам, призванные обеспечить их независимость от внешних влияний. Так, в статье 16, часть 2, сказано:

«Экспертом государственной экологической экспертизы не может быть представитель заказчика документации, подлежащей государственной экологической экспертизе, или разработчика объекта государственной экологической экспертизы, гражданин, состоящий в трудовых или иных договорных отношениях с указанным заказчиком или с разработчиком объекта государственной экологической экспертизы, а также представитель юридического лица, состоящего с указанным заказчиком или с разработчиком объекта государственной экологической экспертизы в таких договорных отношениях».

Используется и принципиально иной подход к подбору экспертов, согласно которому совокупность экспертов состоит из тех, кто сам себя объявил таковыми. Примерами являются разнообразные опросы, приводимые в Интернете и регулярно публикуемые на сайте http://rbc.ru (РБК — РИА «РосБизнесКонсалтинг») и http://voxru.net (Глас РУНЕТа — служба опросов интернет-аудитории). В отличие от метода самооценки, здесь требуется и волевой импульс от эксперта — решение об участии в опросе. В случаях, когда какие-либо материалы предлагаются к обсуждению, от самовыдвинувшихся экспертов получают ответы на открытые вопросы (а не на закрытые, как в случае опросов РБК и Рунета). Письма и обращения, поступающие самотеком в средства массовой информации и в государственные органы, также можно рассматривать в рамках теории экспертных оценок. Однако надо подчеркнуть, что распределение самовыдвинувшихся экспертов по социально-экономическим группам (например, по полу и возрасту) обычно существенно отличается от того, которое имеется в обществе. Частично от этого смещения можно избавиться с помощью методов стандартизации («ремонта») выборки, разработанных в эконометрике и прикладной статистике [16, 18].

5.5. Основания для классификации экспертных методов

В настоящее время *не существует* общепринятой научно обоснованной классификации методов экспертных оценок и тем более — однозначных рекомендаций по их применению. *Попытка силой* (*административным путем*) *утвердить одну из возможных точек зрения на классификацию методов экспертных оценок может принести лишь вред*.

Однако для рассказа о многообразии экспертных технологий необходима какая-либо рабочая классификация методов. Одну из таких возможных классификаций даем ниже, перечисляя основания, по которым делим методы экспертных оценок.

Один из основных вопросов — *о цели исследования*. Что именно должна представить экспертная комиссия в результате своей работы — информацию для принятия решения ЛПР или проект самого решения? От ответа на этот методологический вопрос зависит организация работы экспертной комиссии, и он служит первым основанием для разбиения методов.

Цель — сбор информации для ЛПР. Тогда Рабочая группа должна собрать возможно больше относящейся к делу информации, аргументов «за» и «против» определенных вариантов решений. Полезен следующий метод постепенного увеличения числа экспертов. Сначала первый эксперт приводит свои соображения по рассматриваемому вопросу. Составленный им материал передается второму эксперту, который добавляет свои аргументы. Накопленный материал поступает к следующему — третьему — эксперту, а также и к первому, который имеет возможность дополнить свою аргументацию… Процедура заканчивается, когда иссякает поток новых соображений.

Отметим, что эксперты в рассматриваемом методе только поставляют информацию, аргументы «за» и «против», но не вырабатывают согласованного проекта решения. Нет никакой необходимости стремиться к тому, чтобы экспертные мнения были согласованы между собой. Более того, наибольшую пользу приносят эксперты с мышлением, отклоняющимся от массового (среднестатистического), т.е. инакомыслящие (диссиденты). Именно от них следует ожидать наиболее оригинальных аргументов. Поэтому таких специалистов надо разыскивать и включать в состав экспертной комиссии.

Цель — подготовка проекта решения для ЛПР. Основная задача при этом — разработка (формулировка, получение) коллективного мнения ЭК. Математические методы анализа экспертных оценок применяются обычно именно для решения задач, связанных с подготовкой проекта решения. При этом зачастую некритически принимают догмы согласованности и одномерности. Эти догмы «кочуют» из одной публикации в другую, поэтому целесообразно их обсудить.

Догма согласованности. Часто без всяких обоснований считается, что решение может быть принято лишь на основе согласованных мнений экспертов. Поэтому исключают из экспертной группы тех, чье мнение отличается от мнения большинства. При этом отсеиваются как неквалифицированные лица, попавшие в состав экспертной комиссии по недоразумению или по соображениям, не имеющим отношения к их профессиональному уровню, так и наиболее оригинальные мыслители, глубже проникшие в проблему, чем большинство. Следовало бы выяснить их аргументы, предоставить им возможность для обоснования их точек зрения. Вместо этого их мнением пренебрегают.

Бывает и так, что эксперты делятся на две или более групп, имеющих единые *групповые* точки зрения. Так, известен пример деления специалистов (членов Ученого совета НИИ) при оценке результатов научно-исследовательских работ на две группы: «теоретиков», явно предпочитающих НИР, в которых получены теоретические результаты, и «практиков», выбирающих те НИР, которые позволяют получать непосредственные прикладные результаты. Поэтому при голосовании с целью выявления лучшей научно-исследовательской работы за год результат зависел не от рассматриваемых работ, а от численности представителей групп «теоретиков» и «практиков», присутствующих на заседании.

Иногда заявляют, что в случае обнаружения двух или нескольких групп экспертов (вместо одной согласованной во мнениях) опрос не достиг цели. Это не так! *Цель достиг-*

нута — установлено, что единого мнения нет. Это весьма важно. И ЛПР при принятии решений должен это учитывать. Стремление обеспечить согласованность мнений экспертов любой целой может приводить к сознательному одностороннему подбору экспертов, игнорированию всех точек зрения, кроме одной, наиболее полюбившейся Рабочей группе (или даже «подсказанной» ЛПР).

Правильное решение было принято руководством НИИ после обнаружения отсутствия единомыслия среди членов Ученого совета: вместо одной премии стали присуждать две — отдельно за теоретические работы и отдельно за прикладные.

Часто не учитывают еще одного чисто математико-статистического обстоятельства. Поскольку число экспертов обычно не превышает 20– 30, то формальная статистическая согласованность мнений экспертов (установленная с помощью тех или иных критериев проверки статистических гипотез) может сочетаться с реально имеющимся разделением экспертов на группы, что делает дальнейшие расчеты не имеющими отношения к действительности. Для примера укажем на конкретным методам расчетов с помощью коэффициентов конкордации (т.е. — в переводе — согласия) на основе коэффициентов ранговой корреляции Кендалла или Спирмена (алгоритмы приведены в справочнике [2]). Необходимо напомнить, что согласно математико-статистической теории положительный результат проверки согласованности таким способом означает ни больше, ни меньше, как отклонение гипотезы о независимости и равномерной распределенности мнений экспертов на множестве всех ранжировок. Таким образом, проверяется нулевая гипотеза, согласно которой ранжировки, описывающие мнения экспертов, являются независимыми случайными бинарными отношениями, равномерно распределенными на множестве всех ранжировок. Отклонение этой нулевой гипотезы по дурной традиции толкуется как согласованность ответов экспертов. Другими словами, мы являемся жертвой заблуждений, вытекающих из своеобразного толкования слов: проверка согласованности в указанном математико-статистическом смысле вовсе не является проверкой согласованности в смысле практики экспертных оценок. (Именно ущербность рассматриваемых математико-статистических методов анализа ранжировок привела группу специалистов к разработке нового математико-статистического аппарата для проверки согласованности — непараметрических методов, основанных на т.н. *люсианах* [16, 18] и входящих в современный раздел эконометрики — *статистику нечисловых данных*). Невозможность получения обоснованного заключения о согласованности мнений экспертов по ограниченным данным можно сопоставить с невозможностью проверки нормальности теоретического распределения в случае, когда объем выборки менее 50 (это утверждение подробно обосновано в статье [21]).

Отметим, что группы экспертов с близкими мнениями можно выделить методами кластер-анализа [16, 18].

Мнения диссидентов. С целью искусственно добиться согласованности стараются уменьшить влияние мнений экспертов-*диссидентов*, т.е. инакомыслящих по сравнению с большинством. *Жесткий* способ борьбы с диссидентами состоит в игнорировании их мнений, т.е. фактически в их исключении из состава экспертной комиссии. Отбраковка экспертов, как и отбраковка резко выделяющихся результатов наблюдений (выбросов), приводит к процедурам, имеющим плохие или неизвестные статистические свойства. Так, известна *крайняя неустойчивость* классических методов отбраковки выбросов по отношению к отклонениям от предпосылок модели (см., например, учебники [16, 18]).

Мягкий способ борьбы с диссидентами состоит в применении *робастных (устойчивых) статистических процедур*. Простейший пример: если ответ эксперта — действительное число, то резко выделяющееся мнение диссидента сильно влияет на среднее арифметическое ответов экспертов и не влияет на их медиану. Поэтому разумно в качестве согласованного мнения рассматривать медиану. Однако при этом игнорируются (не достигают ЛПР) оценки и аргументы диссидентов. Другим примером является принятие решений при судействе в фигурном катании, когда с целью повышения устойчивости выводов жюри отбрасываются минимальная и максимальная из оценок судей.

В любом из двух способов борьбы с диссидентами ЛПР лишается информации, идущей от диссидентов, а потому может принять необоснованное решение, которое впоследствии приведет к отрицательным последствиям. С другой стороны, представление ЛПР всего набора мнений снимает часть ответственности и труда по подготовке окончательного решения с комиссии экспертов и рабочей группы по проведению экспертного опроса и перекладывает эту ответственность и труд на плечи ЛПР.

Догма одномерности. В устаревшей, а иногда и в современной научно-технической, управленческой и экономической литературе распространен довольно спорный подход (обычно формулируемых в рамках так называемой «квалиметрии»), согласно которому объект экспертизы всегда можно оценить *одним числом*. Странная идея! *Оценивать человека одним числом приходило в голову лишь на невольничьих рынках*. Вряд ли даже самые рьяные квалиметристы рассматривают книгу или картину как эквивалент числа — ее «рыночной стоимости». Практически все реальные объекты достаточно сложны, а потому сколько-нибудь точно описать их можно лишь с помощью многих и многих чисел, а также математических объектов нечисловой природы. Жизнь, в том числе экономическая, многомерна, а не одномерна!

Вместе с тем нельзя полностью отрицать саму идею поиска обобщенных показателей качества, технического уровня, конкурентоспособности и аналогичных. Так, каждый объект можно оценивать по многим показателям качества. Например, легковой автомобиль можно оценивать по таким показателям и группам показателей:

расход бензина на 100 км пути (в среднем);

надежность (в том числе число отказов и средняя стоимость ремонта за год);

безопасность эксплуатации;

экологическая безопасность, оцениваемая по содержанию вредных веществ в выхлопных газах;

легкость в управлении;

маневренность (в том числе радиус поворота);

быстрота набора заданной скорости (например, 100 км/ч) после начала движения;

максимальная достигаемая скорость;

длительность сохранения в салоне положительной температуры при низкой наружной температуре (например, минус пятьдесят градусов по Цельсию) и выключенном двигателе;

эстетичность (дизайн, привлекательность и «модность» внешнего вида автомобиля и отделки салона);

вес, и т.д.

Можно ли свести оценки по этим показателям вместе? Ясно, что определяющей является конкретная ситуация, для которой выбирается автомашина. Максимально достигаемая скорость важна для гонщика, но, как нам представляется, не имеет большого практического значения для водителя рядовой частной машины, особенно в городе с суровым ограничением на максимальную скорость. Для такого водителя важнее расход бензина, маневренность и надежность. Для машин различных служб спасения и государственного управления, видимо, надежность важнее, чем для частника, а расход бензина — наоборот. Для районов Крайнего Севера важна теплоизоляция салона, а для центральных районов — нет. И т.д.

Таким образом, важна конкретная (узкая) постановка задачи перед экспертами. Но такой постановки зачастую нет. А тогда «игры» по разработке обобщенного показателя качества — например, в виде линейной функции от перечисленных переменных — не могут дать объективных выводов. Альтернативой единственному обобщенному показателю является математический аппарат типа *многокритериальной оптимизации* — множества Парето и т.д. Варианты построения обобщенного (интегрального) показателя обсуждались в первом разделе настоящей главы при рассмотрении процедур экспертного выбора. Углубленное рассмотрение проводится в теории принятия решений [17, 19].

В некоторых случаях все-таки можно глобально сравнить объекты — например, с помощью тех же экспертов получить упорядочение рассматриваемых объектов — изделий или проектов. Тогда можно ***подобрать*** коэффициенты при отдельных показателях так, чтобы *упорядочение с помощью линейной фун-*

кции возможно точнее соответствовало глобальному упорядочению (например, найти эти коэффициенты методом наименьших квадратов). В подобных случаях ***не следует*** оценивать указанные коэффициенты с помощью экспертов. Эта простая идея до сих пор не стала очевидной для отдельных составителей методик по проведению экспертных опросов и анализу их результатов. Они упорно стараются заставить экспертов делать то, что они *качественно* выполнить *не в состоянии* — указывать веса, с которыми отдельные показатели качества должны входить в итоговый обобщенный показатель.

Эксперты обычно могут сравнить объекты или проекты в целом, но не могут вычленить вклад отдельных факторов. *Раз организаторы опроса спрашивают, эксперты отвечают,* но эти ответы не несут в себе надежной информации о реальности…

Перечень оснований для классификации экспертных методов. Первое основание — *цели экспертизы* — мы уже обсудили. Экспертные методы делятся на два класса в соответствии с ответом на вопрос: «Что именно должна представить экспертная комиссия в результате своей работы — информацию для принятия решения ЛПР или проект самого решения?»

Рассмотрим еще четыре основания.

Число туров. Второе основание классификации экспертных процедур — число туров. Экспертизы могут включать один тур, некоторое фиксированное число туров (два, три, …) или неопределенное число туров.

Экспертиза в один тур предполагает, что эксперты не обмениваются информацией, поскольку не общаются друг с другом. Технология такой экспертизы напоминает технологии маркетинговых и социологических выборочных обследований. Это наиболее быстрая и дешевая технология, но и в наименьшей степени использующая творческие способности экспертов, а потому дающая наименьшие полезные результаты.

Наличие нескольких туров предполагает, что эксперты получают информацию друг от друга, обрабатывают ее, получают новое знание и в соответствии с ним корректируют свои выводы. Чем больше туров, тем более тщательным является анализ ситуации, поскольку эксперты при этом обычно много раз возвращаются к рассмотрению предмета экспертизы. Но одновременно увеличивается общее время на экспертизу и возрастает ее стоимость.

Наибольшие сложности вызывают процедуры с неопределенным заранее числом туров, например, «снежный ком». Часто задают максимально возможное число туров, и тогда неопределенность сводится к тому, придется ли проводить это максимальное число туров или удастся ограничиться меньшим числом.

Порядок вовлечения экспертов. Можно уменьшить расходы, вводя в экспертизу не всех экспертов сразу, а постепенно. Так, например, если цель состоит в сборе аргументов «за» и «против», то первоначальный перечень аргументов может быть составлен одним экспертом. Второй добавит к нему свои аргументы. Суммарный материал поступит к первому и третьему, которые внесут свои аргументы и контраргументы. И так далее — добавляется по одному эксперту на каждый новый тур.

Итак, экспертные процедуры можно классифицировать на основании того, как эксперты вовлекаются в работу — одновременно или последовательно. Первый вариант — более быстрый, но и более затратный (дорогой), второй — дешевле, но дольше.

Организация общения экспертов. Четвертое основание классификации экспертных процедур — способ организации общения экспертов. Рассмотрим достоинства и недостатки каждого из элементов шкалы: отсутствие общения — заочное анонимное общение — заочное общение без анонимности — очное общение с ограничениями — очное общение без ограничений.

При отсутствии общения эксперт высказывает свое мнение, ничего не зная о других экспертах и об их мнениях. Он полностью независим, что и хорошо, и плохо. Обычно такая ситуация соответствует однотуровой экспертизе.

Заочное анонимное общение, например, как в методе Дельфи, означает, что эксперт знакомится с мнениями и аргументами других экспертов, но не знает, кто именно высказал то или иное положение. Следовательно, в экспертизе должно быть предусмотрено хотя бы два тура.

Заочное общение без анонимности соответствует, например, общению по Интернету. Все варианты заочной экспертизы хороши тем, что нет необходимости собирать экспертов вместе, следовательно, находить для этого удобное время и место. В будущем с распространением телеконференций грань между очным и заочным общением экспертов начнет стираться.

Оно соответствует также многим реальным процедурам принятия управленческих решений. Координация действий организаций и менеджеров с помощью заочного общения без анонимности происходит и при подготовке документов — планов, приказов, предложений, направляемых в другие организации, ответов на распоряжения и запросы властей и др. Управленческие решения обычно оформляются в виде подобных документов.

Обычно один из сотрудников — назовем его Исполнителем — готовит первоначальный вариант документа. Он размножается и рассылается на отзыв заинтересованным в нем менеджерам, а иногда и в другие организации. Исполнитель составляет сводку отзывов, с одними из замечаний соглашается, против других высказывает возражения. Затем собирают т.н. «согласительное совещание», на которое приглашают всех тех, с чьим мнением Исполнитель не согласен. В результате дискуссии по ряду позиций достигается компромисс, и возражения снимаются. Окончательное решение по проекту документа с учетом оставшихся возражений принимает ЛПР, например, генеральный директор или Совет директоров, т.е. высшая инстанция в данной организации. Именно такова процедура подготовки Законов РФ, государственных стандартов и иных ответственных документов.

Во многих случаях эта процедура упрощается и отзывы заменяются *визированием,* при котором свое согласие менеджеры выражают, накладывая на документ *визу,* т.е. расписываясь (иногда добавляя несколько слов по затрагиваемой проблеме). Например, подготовленное для отправки в другую организацию письмо или приказ по организации визируют руководители нескольких отделов, и генеральный директор его подписывает от имени фирмы, не вникая в суть (поскольку каждый день он подписывает десятки писем и приказов, то вникать некогда). Адресату уходит письмо, на обратной стороне которого указаны фамилия и телефон Исполнителя (поскольку адресат тоже хорошо знаком с процедурой подготовки документов, он понимает, что по конкретным вопросам надо обращаться к Исполнителю, а не к генеральному директору). В архиве фирмы остается письмо с визами, так что в случае необходимости легко выяснить, кто составил и одобрил документ.

Как ясно из сказанного выше, заочные экспертизы часто используются совместно с очными.

При очных экспертизах эксперты говорят, а не пишут, как при заочных, и потому успевают за то же потраченное время сообщить существенно больше. *Очная экспертиза с ограничениями* весьма распространена. Это — собрание, идущее по фиксированному регламенту. Примером является военный совет в императорской русской армии, когда эксперты (офицеры и генералы) высказывались в фиксированном порядке от младшего (по чину и должности) к старшему. Другой пример — разработка и принятие решений в Государственной Думе Российской Федерации в соответствии с регламентом, определяющим последовательность и продолжительность выступлений на заседаниях комиссий, комитетов, других структур, на пленарных заседаниях. Вспомним также технологию «мозгового штурма».

Наконец, *очная экспертиза без ограничений* — это свободная дискуссия.

Все очные экспертизы имеют недостатки, связанные с возможностями отрицательного влияния на их проведение социально-психологических свойств и клановых (партийных) пристрастий участников, а также неравенства их профессионального, должностного, научного статусов. Представьте себе, что соберутся вместе 5 лейтенантов и 3 генерала. Независимо от того, какая информация имеется у того или иного участника встречи, ход ее предсказать нетрудно: генералы будут беседовать, а лейтенанты — помалкивать. При этом вполне очевидно, что лейтенанты получили образование позже генералов, а потому обладают полезной информацией, которой нет у генералов.

Веса экспертов. Пятое основание классификации экспертных процедур — по способам введения весов для мнений экспертов. Простейший способ — все эксперты равноправны, при голосованиях по отдельным положениям разрабатываемого решения имеют по одному голосу.

Часто вводят понятия решающего голоса и совещательного голоса. Например, при защите дипломного проекта члены Государственной Аттестационной Комиссии (ГАК) имеют решающие голоса, а все остальные участники заседания — совещательные. В Федеральном законе «Об экологической экспертизе» [7] подробно расписано, представители каких организаций и структур управления могут присутствовать на заседании экспертной комиссии государственной экологической экспертизы с правом совещательного голоса.

В регламент принятия решений иногда включают положение, согласно которому при делении голосов ровно пополам принимается мнение той половины, к которой относится председатель ЭК. Это означает, что вес голоса председателя на бесконечно малую величину больше веса рядового эксперта. Впрочем, иногда председателю дают два голоса.

При голосованиях на собраниях акционеров вес каждого эксперта (участника заседания) определяется числом акций, которыми он распоряжается.

Комбинации различных видов экспертизы. Реальные экспертизы часто представляют собой комбинации различных описанных выше типов экспертиз. В качестве примера рассмотрим защиту студентом дипломного проекта. Сначала идет многотуровая очная экспертиза, проводимая научным руководителем и консультантами, в результате студент подготавливает проект к защите. Затем два эксперта работают заочно — это автор отзыва сторонней организации и заведующий кафедрой, допускающий работу к защите. Обратите внимание на различие задач этих экспертов и объемов выполняемой ими работы — один пишет подробный отзыв, второй росписью на титульном листе проекта разрешает его защиту. Наконец — очная экспертиза без ограничений (для членов ГАК — государственной аттестационной комиссии). Дипломный проект оценивается коллегиально, по большинству голосов, при этом один из экспертов (научный руководитель) знает работу подробно, а остальные — в основном лишь по докладу. Отметим, что мнения экспертов учитываются с весами, а именно, мнения членов ГАК — с весом 1, мнения всех остальных — с весом 0 (совещательный голос). Таким образом, имеем сочетание многотуровой и однотуровой, заочных и очных экспертиз. Подобные сочетания характерны для многих реально проводящихся экспертиз.

5.6. Интуиция эксперта и компьютер

Обсудим две, казалось бы, далекие друг от друга, но на самом деле тесно связанные между собой темы — роль интуиции эксперта в экспертизе и применение вычислительной техники в технологиях экспертных исследований.

Интуиция эксперта. Примером хорошего эксперта служит врач, чьи диагнозы чаще, чем у его коллег, оправдываются при вскрытии. Дело в том, что только посмертное вскрытие позволяет патологоанатому дать достоверное заключение о том, чем болел пациент, и правильно ли его лечили. Хотя это достоверное заключение уже не может принести пользы пациенту, его можно применить для оценки профессиональных возможностей врача и корректировки лечебных технологий. Причем, чем лучше врач, тем дольше придется ждать подтверждения его высокого профессионализма.

С целью создания систем компьютерной диагностики математики пытались выяснить, как работают выдающиеся врачи [5]. Для этого их просили описать используемые ими в лечебной работе методы умозаключений. Практикующие врачи приводили примерно те же формулировки, что и авторы медицинских учебников. И это вполне естественно. Однако при попытках применить сформулированные таким путем правила для диагностики вновь поступающих пациентов качество принимаемых врачебных решений резко ухудшалось — вплоть до уровня рядового выпускника мединститута. Таким образом, оказалось, что выдающиеся врачи не в состоянии описать, как именно они работают. При попытке вербализации процесса диагностики интуиция исчезала, а вместе с ней — и отличие высококвалифицированного эксперта от рядового специалиста.

Важную роль интуиции в работе эксперта трудно, а точнее, практически невозможно промоделировать математически. Как следствие, нельзя и мечтать о замене экспертных оценок компьютерными расчетами. Экспертиза — это творчество.

Роль интуиции весьма велика в различных творческих профессиях. Например, математическое творчество, по свидетельству выдающегося французского математика Ж. Адамара, основано на интуиции [1].

Экспертные оценки и экспертные системы. Хотя названия этих двух научно-практических дисциплин похожи, различие между ними колоссально. Теория экспертных оценок — это наука о методах сбора и анализа мнений людей (экспертов), опирающихся на свою интуицию. Экспертная система — это программа для компьютера, которая оперирует со знаниями в определенной предметной области с целью выработки практических рекомендаций для решения возникших проблем [24]. Значит, в экспертных системах не участвуют живые люди, есть только ранее полученные знания — результат прошлой деятельности специалистов. При формализации знаний невозможно учесть интуицию экспертов. Однако компьютерной обработке может быть подвергнут огромный объем знаний, что человек сделать не в состоянии.

Сравнительные возможности живых экспертов и экспертных систем видны при сопоставлении шахматистов и шахматных программ. Люди опираются на интуицию, а компьютеры — на расчеты. Результат известен — за пятьдесят лет компьютеры достигли уровня гроссмейстеров.

Однако речь идет об анализе довольно простой игры — шахматные правила изложены на нескольких страницах, и они строго выполняются. Реальные ситуации гораздо сложнее, и самое интересное — правила игры могут меняться.

В настоящее время экспертные системы, как и другие достижения научного движения под названием «искусственный интеллект» — помощники человека. Например, на рыболовном судне или в отдаленном поселении целесообразно иметь экспертную систему неотложной медицинской помощи. Она позволит сохранить жизнь пострадавшему, пока не появится врач. Врачу она тоже поможет — для различных справок. Но лечить будет именно врач.

В обозримом будущем та или иная рутинная работа будет передаваться (или уже передана) компьютерным системам. Например, составление бухгалтерского баланса. Но за человеком всегда останется целеполагание. Компьютер, в отличие от человека, не может знать, чего он хочет.

Эксперт и компьютер. Обсудим разные варианты взаимодействия живых экспертов и компьютерных систем.

1. Эксперту нужна различная справочная информация, и наиболее быстро он может ее получить с помощью компьютера. Так, всемирная сеть Интернет — хороший помощник эксперта. К сожалению, в сети циркулирует масса ошибочных сведений. Но ведь и информация, полученная из книг или от людей, не всегда достоверна.

2. Быстрая электронная связь с организаторами экспертизы, с другими экспертами, возможность удаленного общения (чаты, телеконференции и другие формы) резко повышает эффективность экспертной работы.

3. Автоматизированное рабочее место эксперта (например, АРМ МАТЭК (математика в экспертизе) [11, 28]) обеспечивает как сбор экспертной информации, так и ее анализ с помощью разнообразных математических методов.

4. Экспертные процедуры могут многократно использоваться на различных этапах процесса принятия решений, например, для оценки значений признаков, описывающих объекты, или для оценки коэффициентов важности (весомости) самих признаков. При этом процесс принятия решений опирается на ту или иную форму компьютерной поддержки.

5. Интегрированные системы принятия решений включают в себя разнообразные базы данных и знаний, автоматизированные места лиц, принимающих решения, экспертов и сотрудников группы сопровождения, блоки имитационных, экономико-математических и иных компьютерных моделей (в том числе блоки соответствующих экспертных систем). Такие системы действуют в составе аналитических центров крупных организационных структур, например, в Администрации Президента РФ, Центре управления полетами космических аппаратов, в

штабах высокого уровня Вооруженных Сил или в руководящих структурах транснациональных корпораций.

В качестве примера рассмотрим подробнее АРМ МАТЭК (математика в экспертизе) [27, 28]).

Автоматизированное рабочее место МАТЭК (МАТематические методы в ЭКспертных оценках). Разработано и применяется весьма большое число методов (и особенно их разновидностей) организации и проведения экспертных исследований. Для решения конкретной задачи можно использовать, как правило, не один, а много методов, и выбор наиболее подходящего из них лежит на организаторах экспертизы. (Попытки стандартизовать правила принятия подобных решений в настоящее время рассматриваются как нецелесообразные — таков один из результатов развития стандартизации в нашей стране и в мире в последние десятилетия, начиная с 70-х годов.) Автоматизированное рабочее место «МАТЭК» предоставляет организаторам экспертизы большие возможности для выбора тех или иных методов планирования, организации, проведения экспертизы, анализа экспертных оценок, обеспечивает необходимую компьютерную поддержку в проведении экспертного исследования.

АРМ «МАТЭК» предназначен для подготовки и проведения экспертизы по определенной теме. С помощью АРМ «МАТЭК» можно автоматизировать процесс подбора экспертов, работу комиссии экспертов и анализ экспертных мнений, а также подготовку опросных листов, бланков и всей отчётной документации.

Работа на АРМ в соответствии с методологией работы [9] состоит из двух частей:

А. Подготовка экспертизы.

B. Проведение экспертизы.

Этап **А** подготовки экспертизы включает в себя ввод всей информации, необходимой для проведения экспертизы. Итогом этого этапа являются два документа: «Техническое задание» (ТЗ) и «Сценарий».

Рассмотрим этап **А** подробнее. Сначала ЛПР должен сформулировать цель экспертизы, сформировать руководство рабочей группы (РГ).

Далее к работе приступает РГ. Её руководитель должен ввести данные для формирования документа ТЗ. Затем собираются данные для компоновки документа «Сценарий».

РГ может включать в себя Руководителя, Группу обработки, Группу связи и Интервьюеров.

Данные для документа ТЗ следующие: основание для проведения экспертизы, задачи экспертных опросов, сформулированные в соответствии с целью экспертизы, требования к ЭК, опросному листу, сроки выполнения экспертизы и порядок контроля за ними, финансовое обеспечение проекта.

В зависимости от того, введены или нет те или иные данные для ТЗ, они соответственно будут или не будут включены в документ ТЗ. Последний можно просмотреть на экране и распечатать.

Данные для документа «Сценарий» следующие: вводный текст (в этом тексте должна содержаться собственно последовательность действий при проведении экспертизы), календарный план (КП), список используемых методов анализа экспертных мнений (ЭМ). Как и при формировании ТЗ, «Сценарий» может иметь разную структуру, в зависимости от того, какие пункты будут в него включены. Как приложение к «Сценарию» могут быть использованы примеры бланков опросных листов, анкеты «Согласие» (для выявления согласия экспертов участвовать в экспертизе), анкеты «Снежный ком», «Взаимооценка» (если соответствующие этапы включены в КП). Для этих бланков также требуется ввести оповещение (либо выбрать стандартное). Документ «Сценарий» можно просмотреть на экране и распечатать.

При формировании «Сценария» будет сформирован опросный лист экспертизы. Опросный лист состоит из оповещения (стандартного или оригинального — по выбору РГ) и собственно вопросов. Вопросы группируются по задачам из ТЗ. При формулировке вопросов учитывается список методов обработки ответов. Точнее, пользователь, сформулировав вопрос, должен точно знать формат ответа. Для каждого формата ответа в АРМ предусмотрен список методов обработки ответов (краткое описание каждого из них можно будет просмотреть при выборе метода). Если пользователя не устраивает ни один из этих методов, он должен будет переформулировать вопрос (т. е. изменить формат ответа) так, чтобы в списке соответствующих методов оказался подходящий ему. Тем самым при формировании опросного листа будет одновременно сформулирован список используемых методов анализа экспертных мнений (ЭМ).

Этап **В** проведения экспертизы недоступен до тех пор, пока не будет завершен этап подготовки экспертизы. После того как подготовка создана, можно запустить или открыть проведение экспертизы. Тем самым возможно проведение нескольких экспертиз с одной и той же подготовкой (для каждой экспертизы выделяется собственная, идентифицируемая по названию экспертизы, база данных).

На этапе проведения экспертизы формируется ЭК, проводится сбор и анализ ЭМ, формируется отчет и заключение для ЛПР.

Формирование ЭК — многоступенчатый процесс. Сначала член РГ (руководитель) в соответствии с информацией об экспертах из БДЭ (базы данных об экспертах) может отобрать подходящих кандидатов в ЭК. Далее с помощью анкеты «Согласие» из этого списка отбираются согласившиеся быть членами ЭК. Два последних шага могут проводиться или нет, в зависимости от того, включены ли они в КП. Это этапы «Снежный ком» и «Взаимооценка».

После того, как сформирован ЭК, можно проводить сбор экспертных мнений (ЭМ). Это осуществляется с помощью бланка вопросника. ЭМ будут храниться так, чтобы доступ к ним был удобен (то есть по любому эксперту и любому вопросу можно было получить ответ, и т.д.). Анализ ЭМ по каждому вопросу проводится методом, выбранным пользователем АРМ (руководителем РГ) на этапе подготовки экспертизы для этого вопроса.

По всем предыдущим этапам формируются отчеты, из которых в результате получается общий отчет о проведении экспертизы. В соответствии с задачами из ТЗ формируется заключение для ЛПР.

В соответствии с КП ведется контроль за сроками проведения экспертизы.

Ведется протокол экспертизы, т. е. при выходе из системы фиксируется текущее состояние этапа проведения экспертизы, и при открытии данной экспертизы происходит возврат именно на тот этап экспертизы, на котором произошел выход из системы. (На этапе подготовки экспертизы протокол не ведется.)

Разграничены права доступа к БДЭ (база данных экспертов), ЭМ и результатам обработки ЭМ.

На этом закончим «гуманитарную» часть обсуждения теории и практики экспертных оценок. Рассказ о конкретных методах сбора и анализа экспертной информации продолжается в дальнейших главах учебника с привлечением современного математического аппарата.

Литература

1. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. — М.: УРСС, 2001. — 128 с.

2. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.

3. *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном и машине / Второе издание. — М.: Советское радио, 1968. — 326 с.

4. *Винер Н.* Кибернетика и общество. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. — 200 с.

5. *Гельфанд И.М., Розенфельд Б.И., Шифрин М.А.* Очерки о совместной работе математиков и врачей (2-е, дополненное издание). — М. УРСС, 2004. — 320 с.

6. *Горский В.Г., Гриценко А.А., Орлов А.И.* Метод согласования кластеризованных ранжировок // Автоматика и телемеханика. 2000. №3. С.159–167.

7. Закон РФ «Об экологической экспертизе» (от 23.11.1995 N 174-ФЗ с изменениями на 15 апреля 1998 года, 22 августа, 21 декабря 2004 г.) // Собрание законодательства Российской Федерации N 48, 27.11.95, ст.4556; Российская газета. — 1995. — 30 ноября.

8. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения. — М.: Советское радио, 1972. — 192 с.

9. *Литвак Б.Г.* Экспертиза в России / Заводская лаборатория. 2000. Т.66. № 7. С. 61–66.

10. Менеджмент. Учебное пособие / Под ред. Ж.В. Прокофьевой. — М.: Знание, 2000. — 288 с.

11. Методология проведения экспертных исследований, реализованная в АРМ «МАТЭК» (МАТематика в ЭКспертизе) / Орлов А.И., Жихарев В.Н., Цупин В.А., Васюкевич В.А. — В сб.: Управление

большими системами. Материалы Международной научно-практической конференция (22–26 сентября 1997 г., Москва, Россия). — М.: СИНТЕГ, 1997. С.240–240.

12. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. — 256 с.

13. *Моисеев Н.Н.* Люди и кибернетика. — М.: Молодая гвардия, 1984. — 224 с.

14. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

15. *Орлов А.И.* Экспертные оценки / Заводская лаборатория. 1996. Т.62. No.1. С.54–60.

16. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. Изд. 3-е, переработанное и дополненное. — М.: Изд-во «Экзамен», 2004. — 576 с.

17. *Орлов А.И.* Принятие решений. Теория и методы разработки управленческих решений. — М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д: Издательский центр «МарТ», 2005. — 496 с.

18. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

19. *Орлов А.И.* Теория принятия решений. — М.: Экзамен, 2006. — 573 с.

20. *Орлов А.И., Федосеев В.Н.* Менеджмент в техносфере: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Издательский центр «Академия», 2003. — 384 с.

21. *Селезнев В.Д., Денисов К.С.* Исследование свойств критериев согласия функции распределения данных с гауссовой методом Монте-Карло для малых выборок / Заводская лаборатория. 2005. Т.71. No.1. С.68–73.

22. *Сидельников Ю.В.* Технология экспертного прогнозирования: Учебное пособие. Изд. 2-е, исправл. — М.: Доброе слово, 2004. — 284 с.

23. Социально-психологические проблемы науки: Ученый и научный коллектив / Под ред. М.Г. Ярошевского. — М.: Наука, 1973. — 252 с.

24. Статические и динамические экспертные системы: Учеб. пособие / Попов Э.В., Фоминых И.Б., Кисель Е.Б., Шапот М.Д. — М.: Финансы и статистика, 1996. — 320 с.

25. *Федосеев В.Н., Орлов А.И., Ларионов В.Г., Козьяков А.Ф.* Управление промышленной и экологической безопасностью: Учебное пособие. — М.: Изд-во УРАО, 2002. — 220 с.

26. *Холлендер М., Вулф Д.* Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика, 1983. — 518 с.

27. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971. — 256 с.

28. Экспертные оценки: современное состояние и перспективы использования в задачах экологического страхования / Горский В.Г., Орлов А.И., Жихарев В.Н., Цупин В.А., Степочкин А.Н., Васюкевич В.А. — В сб.: Труды Второй Всероссийской конференции «Теория и практика экологического страхования». — М.: Ин-т проблем рынка РАН, 1996. С.20–23.

Контрольные вопросы и задачи

1. Приведите примеры индивидуальных экспертных оценок.

2. Почему необходима формализованная карта оценки объекта экспертизы?

3. Приведите примеры коллективных экспертных оценок.

4. Расскажите о задачах выбора вариантов с помощью экспертов.

5. Почему большое внимание уделяют регламенту проведения экспертных исследований?

6. Опишите метод Дельфи экспертного прогнозирования.

7. Расскажите о методе сценариев.

7. Что такое «мозговой штурм»?

8. В каких конкретных областях используют методы экспертных оценок?

9. Чем метод средних арифметических рангов отличается от метода медиан рангов?

10. Дайте определение понятию «кластеризованная ранжировка».

11. Почему необходимо согласование кластеризованных ранжировок и как оно проводится?

12. В табл.5.3 приведены упорядочения 7 инвестиционных проектов, представленные 7 экспертами.

Таблица 5.3

Упорядочения проектов экспертами

Эксперты	Упорядочения
1	$1 < \{2,3\} < 4 < 5 < \{6,7\}$
2	$\{1,3\} < 4 < 2 < 5 < 7 < 6$
3	$1 < 4 < 2 < 3 < 6 < 5 < 7$
4	$1 < \{2, 4\} < 3 < 5 < 7 < 6$
5	$2 < 3 < 4 < 5 < 1 < 6 < 7$
6	$1 < 3 < 2 < 5 < 6 < 7 < 4$
7	$1 < 5 < 3 < 4 < 2 < 6 < 7$

Постройте таблицу рангов. Найдите:

а) итоговое упорядочение по средним арифметическим рангам;

б) итоговое упорядочение по медианам рангов;

в) кластеризованную ранжировку, согласующую эти два упорядочения.

13. В табл.5.4 приведены упорядочения 7 кандидатур в Совет директоров корпорации, представленные 7 экспертами.

Таблица 5.4

Упорядочения проектов экспертами

Эксперты	Упорядочения
1	$4 < 6 < 1 < 2 < \{3, 5\} < 7$
2	$1 < \{4, 6\} < 2 < 3 < \{5, 7\}$
3	$\{4, 6\} < \{1, 2\} < 5 < 3 < 7$
4	$4 < \{1, 6\} < 3 < 5 < 7 < 2$
5	$6 < \{1, 2\} < 4 < 5 < 1 < 7 < 3$
6	$2 < 1 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7$
7	$6 < 1 < 4 < 3 < 2 < 5 < 7$

Постройте таблицу рангов. Найдите:

а) итоговое упорядочение по средним арифметическим рангам;

б) итоговое упорядочение по медианам рангов;

в) кластеризованную ранжировку, согласующую эти два упорядочения.

14. Расскажите об основных стадиях экспертного опроса.

15. Почему сценарий проведения сбора и анализа экспертных мнений необходимо разрабатывать до подбора экспертов?

16. Что такое «метод снежного кома»?

17. Как выбор цели экспертизы влияет на экспертные технологии?

18. Какова роль диссидентов в комиссии экспертов в зависимости о регламента сбора и анализа экспертных мнений?

19. По каким основаниям классифицируют экспертные методы?

20. Чем отличаются экспертные оценки и экспертные системы?

21. Какова роль компьютеров в экспертных технологиях?

Темы докладов, рефератов, исследовательских работ

1. Индивидуальное экспертное оценивание (на примере работы преподавателя).

2. Варианты коллективного экспертного оценивания в медицине.

3. Робастное оценивание в экспертизе.

4. Экспертные технологии распределения финансирования.

5. Технологии экспертного прогнозирования.

6. Метод сценариев и экспертная оценка рисков в инвестиционном менеджменте.

7. Экспертные технологии в технико-экономическом анализе.

8. Статистика нечисловых данных в оценочных экспертизах.

9. Управленческие экспертизы в контроллинге.

10. Почему метод средних арифметических рангов неприемлем с точки зрения теории измерений?

11. Сравните с помощью экспертного опроса субъективное ощущение тяжести (сложности, трудности) дней недели. Для этого получите от экспертов упорядочения (кластеризованные ранжировки) дней недели по этому показателю. Обработайте экспертные мнения с помощью метода средних арифметических рангов и метода медиан рангов. При необходимости проведите согласование двух полученных кластеризованных ранжировок. Можно ли утверждать, что опрошенные Вами эксперты имеют единое мнение по поводу субъективной тяжести дней недели? Или же мнения экспертов настолько различны, что никаких общих для всей групп экспертов выводов сделать нельзя?

Примечание. Желательно опросить от 5 до 15 экспертов.

12. Перекодируйте ответы экспертов, полученные при выполнении задания 11, исключив сведения о выходных днях (субботе и воскресенье). Проведите предусмотренную заданием 11 обработку данных.

Что изменилось в расчетах и выводах и что сохранилось по сравнению с заданием 11?

13. Проведите обработку мнений экспертов, собранных в процессе выполнения задания 11, предварительно сделав допустимое преобразование в порядковой шкале и перейдя от рангов к баллам. А именно, используя вместо рангов 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (по числу дней недели) неравномерную шкалу баллов, например, (–10), (–3), (–1), 0, 1, 3, 10 (т.е. (–10) — балл самого плохого дня, (–3) — второго по тяжести, ..., 10 — балл самого хорошего дня недели). В случае связанных рангов берите среднее арифметическое соответствующих соседних значений баллов.

Что изменилось в расчетах и выводах и что сохранилось по сравнению с заданием 11?

14. Проведите подробное математическое обоснование корректности алгоритма согласования кластеризованных ранжировок (на основе статьи [6] и приложения 3 в учебнике [16]).

15. Разработайте метод сбора и анализа мнений экспертов с использованием средних по Колмогорову, рассмотренных в главе 6 (в соответствующем варианте метода средних рангов).

16. Проведите сравнительный анализ различных методов усреднения мнений экспертов с целью выявления итогового мнения комиссии экспертов. В частности, сравните методы средних рангов с расчетом медианы Кемени (введенной в главе 7 на основе расстояния Кемени между кластеризованными ранжировками).

17. Роль ЛПР в организации экспертного исследования.

18. Внутренняя структура Рабочей группы экспертного исследования.

19. Типовые сценарии проведения сбора и анализа экспертных мнений.

20. Требования к экспертам, зафиксированные в действующем законодательстве.

21. Уголовная, административная, материальная и гражданско-правовая ответственность экспертов.

22. Сравнительный анализ методов самооценки и взаимооценки.

23. Догма согласованности.

24. Догма одномерности.

25. Подходы к выбору способа организации общения экспертов.

26. Роль интуиции в экспертизе.

27. Проектирование автоматизированных рабочих мест экспертов и членов РГ (группы сопровождения).

Глава 6

ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ И СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Теория измерений (в дальнейшем сокращенно ТИ) необходима, в частности, для разработки технологий экспертного оценивания. За последние десятилетия она прошла путь от малоизвестного раздела математической психологии до общенаучной концепции, знакомство с которой признается обязательным для исследователей и студентов самых разных специальностей (в качестве примеров укажем книги [4, 5, 12, 17]). Теория измерений является одной из составных частей наук, посвященных анализу данных — прикладной статистики и эконометрики. Принято считать, что ТИ входит в состав *статистики объектов нечисловой природы* [12].

В настоящей главе рассмотрены основные идеи теории измерений. Описаны шкалы наименований, порядка, интервалов, отношений и др. Обосновано требование инвариантности статистических выводов относительно группы допустимых преобразований шкалы измерения. Рассказано о многообразии видов средних величин. Установлены правила выбора вида средних величин в соответствии с типом шкалы измерения (для данных, измеренных в шкалах порядка, интервалов и отношений).

6.1. Основные шкалы измерения

Почему необходима теория измерений? Эта теория исходит из того, что арифметические действия с используемыми в практической работе числами не всегда имеют смысл. Действительно, использование чисел в жизни и хозяйственной деятельности людей отнюдь не всегда предполагает, что эти числа можно складывать и умножать, производить иные арифметические действия. Что бы вы сказали о человеке, который занимается сложением или умножением телефонных номеров? Далее, не всегда выполнены привычные арифметические соотношения. Например, сумма знаний двух двоечников не равна знаниям «хорошиста», т.е. для оценок знаний $2+2$ не равно 4. Если вы вечером поместите в клетку двух животных, а потом еще двух, то отнюдь не всегда можно утром найти в этой клетке четырех животных. Их может быть и много больше — если вечером вы загнали в клетку овцематок или беременных кошек. Их может быть и меньше — если к двум волкам вы поместили двух ягнят. Итак, отнюдь не всегда $2+2=4$. Числа используются гораздо шире, чем арифметика.

Приведенные примеры показывают, что практика использования чисел для описания результатов наблюдений (измерений, испытаний, анализов, опытов) заслуживает методологического анализа.

При применении тех или иных экспертных технологий, прежде всего, необходимо разобраться с проблемами измерения различных величин, используемых в процессе сбора и анализа экспертных мнений. Они могут быть измерены в тех или иных количественных или качественных шкалах. Поскольку в выборе конкретной шкалы имеется некоторый произвол (например, расстояние можно измерять в аршинах, саженях, верстах, метрах или парсеках), то естественно потребовать, чтобы принимаемое решение не зависело от этого произвола (например, от того, в каких единицах измерено расстояние).

Так, например, мнения экспертов часто выражены в *порядковой шкале* (подробнее о шкалах говорится ниже), т.е. эксперт может сказать (и обосновать), что один показатель качества продукции более важен, чем другой, первый технологический объект более опасен, чем второй, и т.д. Но он не в состоянии сказать, *во сколько раз* или *на сколько* он более важен, соответственно, более опасен. Экспертов часто просят дать ранжировку (упорядочение) объектов экспертизы, т.е. расположить их в порядке возрастания (или убывания) интенсивности интересующей организаторов экспертизы характеристики. Ранг — это номер (объекта экспертизы) в упорядоченном ряду значений характеристики у различных объектов. Такой ряд в статистике называется вариационным. Формально ранги выражаются числами 1, 2, 3, …, но с этими числами нельзя делать привычные арифметические операции. Например, хотя в арифметике $1 + 2 = 3$, но нельзя утверждать, что для объекта, стоящем на третьем месте в упорядочении, интенсивность изучаемой характеристики равна сумме интенсивностей объектов с рангами 1 и 2. Так, один из видов экспертного оценивания — оценки учащихся. Вряд ли кто-либо будет утверждать, что знания отличника равны сумме знаний двоечника и троечника (хотя $5 = 2 + 3$), хорошист соответствует двум двоечникам ($2 + 2 = 4$), а между отличником и троечником такая же разница, как между хорошистом и двоечником ($5 - 3 = 4 - 2$). Поэтому очевидно, что для анализа подобного рода качественных данных необходима не всем известная арифметика, а другая теория, дающая базу для разработки, изучения и применения конкретных методов расчета. Это и есть ТИ.

При чтении литературы надо иметь в виду, что в настоящее время термин «теория измерений» применяется для обозначения целого ряда научных дисциплин. А именно, классической метрологии (науки об измерениях физических величин), рассматриваемой здесь ТИ, некоторых других направлений, например, алгоритмической теории измерений. Обычно из контекста понятно, о какой конкретно теории идет речь.

Краткая история теории измерений. Сначала ТИ развивалась как теория психофизических измерений. В послевоенных публикациях американский психолог С.С. Стивенс основное внимание уделял шкалам измерения. Во второй половине XX в. сфера применения ТИ стремительно расширяется. Посмотрим, как это происходило.

Один из томов выпущенной в США в 1950-х годах «Энциклопедии психологических наук» назывался «Психологические измерения». Значит, составители этого тома расширили сферу применения ТИ с психофизики на психологию в целом. А в основной статье в этом сборнике под названием, обратите внимание, «Основы теории измерений», изложение шло на абстрактно-математическом уровне, без привязки к какой-либо конкретной области применения. В этой статье [16] упор был сделан на «гомоморфизмы эмпирических систем с отношениями в числовые» (в эти математические термины здесь вдаваться нет необходимости), и математическая сложность изложения заметно возросла по сравнению с работами С.С. Стивенса.

Уже в одной из первых отечественных статей по ТИ (конец 1960-х годов) было установлено, что баллы, присваиваемые экспертами при оценке объектов экспертизы, как правило, измерены в порядковой шкале. Отечественные работы, появившиеся в начале 1970-х годов, привели к существенному расширению области использования ТИ. Ее применяли в педагогической квалиметрии (посвящена измерению качества знаний учащихся), в системных исследованиях, в различных задачах теории экспертных оценок, для агрегирования показателей качества продукции, при планировании и обработке данных социологических опросов, и др.

Итоги этого этапа были подведены в монографии [10]. В качестве двух основных проблем ТИ наряду с *установлением типа шкалы* измерения конкретных данных был выдвинут поиск алгоритмов анализа данных, результат работы которых не меняется при любом допустимом преобразовании шкалы (т.е. является *инвариантным* относительно этого преобразования).

Метрологи вначале (в 70-х годах) резко возражали против использования термина «измерение» для качественных признаков (т.е. измеренных в номинальных и порядковых шкалах). Однако постепенно возражения сошли на нет, и к концу XX в. ТИ стала рассматриваться как общенаучная теория.

Необходимость и практическую полезность использования ТИ в организационно-экономическом моделировании рассмотрим, в частности, в связи с теорией и практикой экспертного оценивания, а именно, с агрегированием мнений экспертов, построением обобщенных показателей и рейтингов.

Рассмотрим основные идеи теории измерений.

Шесть основных типов шкал. В соответствии с ТИ при математическом моделировании реального явления или процесса следует, прежде всего, установить *типы шкал*, в которых измерены те или иные переменные. Тип шкалы задает *группу допустимых преобразований шкалы*. Допустимые преобразования не меняют объективно существующих соотношений между объектами измерения.

Например, при измерении длины переход от аршин к метрам (допустимое преобразование шкалы) не меняет соотношений между длинами рассматриваемых объектов — если первый объект длиннее второго, то это будет установлено и при измерении в аршинах, и при измерении в метрах. Если первый длиннее второго в 5 раз при измерении в дюймах, то и при измерении в саженях первый длиннее второго ровно в 5 раз. Обратите внимание, что при этом численное значение длины в аршинах отличается от численных значений длины в метрах, дюймах и саженях — не меняется лишь результат сравнения длин двух объектов и отношение длин.

Укажем основные виды шкал измерения и соответствующие группы допустимых преобразований.

В *шкале наименований* (другое название этой шкалы — *номинальная;* это — термин на основе латыни; иногда называют также классификационной шкалой) **допустимыми** являются все взаимно-однозначные преобразования. В этой шкале числа используются лишь как метки. Примерно так же, как при сдаче белья в прачечную, т.е. лишь для различения объектов. В шкале наименований измерены, например, номера телефонов, автомашин, паспортов, студенческих билетов. Номера страховых свидетельств государственного пенсионного страхования, медицинского страхования, штрих-коды товаров, ИНН (индивидуальные номера налогоплательщиков) измерены в шкале наименований. В этой шкале измерены и многие иные величины, с формальной точки зрения выраженные числами. Пол людей тоже измерен в шкале наименований, результат измерения принимает два значения — мужской, женский. Раса, национальность, цвет глаз, волос — номинальные признаки. Номера букв в алфавите — тоже измерения в шкале наименований. Никому в здравом уме не придет в голову складывать или умножать ИНН или номера паспортов, такие операции не имеют смысла. Сравнивать буквы и говорить, например, что буква «*П*» лучше буквы «*С*», также никто не будет. Единственное, для чего годятся измерения в шкале наименований — это различать объекты. Во многих случаях только это от них и требуется. Например, шкафчики в раздевалках для взрослых различают по номерам, т.е. числам, а в детских садах используют рисунки, поскольку дети еще не знают чисел.

Итак, наиболее простой способ использования чисел — применять их для различения объектов. Например, телефонные номера нужны для того, чтобы отличать одного абонента от другого. При таком способе измерения используется только одно отношение между числами — равенство (два объекта описываются либо равными числами, либо различными). С прикладной точки зрения шкала измерения — это способ приписывания чисел рассматриваемым объектам, соответствующий имеющимся между объектами отношениям. Шкалы наименований соответствуют эмпирическим системам, в которых есть только одно отношение — равенства (эквивалентности) элементов этих систем.

Отметим, что числа могут быть приписаны объектам разными способами. Переход от одного способа к другому наблюдаем при замене паспортов или телефонных номеров. Каковы свойства допустимых преобразований? Для шкалы наименований естественно потребовать только взаимной однозначности. Другими словами, применив к результатам измерений взаимно-однозначное преобразование, получаем новую шкалу, столь же хорошо описывающую систему исходных объектов, как и прежняя шкала.

Допустимые преобразования проводятся время от времени в реальной жизни, например, при замене телефонных номеров или паспортов. При этом каждому прежнему телефонному номеру соответствует один и только один новый. Не допускается, чтобы два прежних номера «слились» в одном новом или чтобы из одного прежнего получилось два новых. Это и означает, что преобразование является взаимно-однозначным.

В *порядковой шкале* числа используются не только для различения объектов, но и для установления порядка между объектами. Простейшим примером являются оценки знаний учащихся. Символично, что в средней школе применяются оценки 2, 3, 4, 5, а в высшей школе ровно тот же смысл выражается словесно — известными всем терминами «неудовлетворительно», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично». Этим подчеркивается «нечисловой» характер оценок знаний учащихся. Ведь фактически преподаватель относит учащихся к одной из четырех упорядоченных категорий, а обозначения этих категорий используются лишь для удобства управления образовательным процессом.

Порядковые шкалы соответствуют эмпирическим системам, в которых, кроме отношения равенства (эквивалентности) элементов, есть отношение (нестрогого) порядка между элементами этих систем. Известно, что в таком случае элементы эмпирической системы можно разбить на классы эквивалентности, между которыми имеется отношение строгого линейного порядка [10].

В порядковой шкале **допустимыми** являются все строго возрастающие преобразования. Так, автор настоящего учебника при участии в российско-французском образовательном проекте пользовался наряду с российской и традиционной французской шкалой оценок, в которой знания учащихся оцениваются числами от 1 до 20. Приходилось постоянно осуществлять преобразования, в которых оценка «неудовлетворительно» переходила, например, в 8, «удовлетворительно» — в 12, «хорошо» — в 15, «отлично» — в 18. (Французская шкала оценок позволяла дать численное выражение и дополнительным вариантам оценок, например, «четыре с плюсом» — это 16, а «три с двумя минусами» — это 10.)

Установление типа шкалы, т.е. задания группы допустимых преобразований шкалы измерения — дело специалистов соответствующей прикладной области. Так, оценки привлекательности профессий мы в монографии [10], выступая в качестве социологов, считали измеренными в порядковой шкале. Однако отдельные социологи не соглашались с нами, полагая, что выпускники школ пользуются шкалой с более узкой группой допустимых преобразований, например, интервальной шкалой. Очевидно, эта проблема относится не к математике, а к наукам о человеке. Для ее решения может быть поставлен достаточно трудоемкий эксперимент. Например, можно предложить каждому опрашиваемому ставить оценки одновременно по двум шкалам, а затем изучить соотношения между выставленными оценками и выявить вид реально используемых преобразований. Пока же подобный эксперимент не поставлен, целесообразно принимать порядковую шкалу, так как это гарантирует от возможных ошибок при анализе данных и получении выводов.

Оценки экспертов, как уже отмечалось, часто следует считать измеренными в порядковой шкале. Типичным примером являются задачи ранжирования и классификации промышленных объектов, подлежащих экологическому страхованию.

Почему мнения экспертов естественно выражать именно в порядковой шкале? ***Как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного, например, сравнительного, характера, чем количественного.*** Так, ему легче сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах.

В различных областях человеческой деятельности применяется много других видов порядковых шкал. Так, например, в минералогии используется шкала Мооса, по которому минералы классифицируются согласно критерию твердости. А именно: тальк имеет балл 1, гипс — 2, кальций — 3, флюорит — 4, апатит — 5, ортоклаз — 6, кварц — 7, топаз — 8, корунд — 9, алмаз — 10. Минерал с большим номером является более твердым, чем минерал с меньшим номером, при нажатии царапает его.

Порядковыми шкалами в географии являются — бофортова шкала ветров («штиль», «слабый ветер», «умеренный ветер» и т.д.), шкала силы землетрясений. Очевидно, нельзя утверждать, что землетрясение в 2 балла (лампа, висящая на шнуре, качнулась под потолком — такое бывает и в Москве) ровно в 5 раз слабее, чем землетрясение в 10 баллов (полное разрушение всего на поверхности земли).

В медицине порядковыми шкалами являются — шкала стадий гипертонической болезни (по Мясникову), шкала степеней сердечной недостаточности (по Стражеско-Василенко-Лангу), шкала степени выраженности коронарной недостаточности (по Фогельсону), и т.д. Все эти шкалы построены по схеме: заболевание не обнаружено; первая стадия заболевания; вторая стадия; третья стадия. Иногда выделяют стадии 1а, 1б и др. Каждая стадия имеет свойственную только ей медицинскую характеристику. При описании групп инвалидности числа иногда используются в противоположном порядке: самая тяжелая — первая группа инвалидности, затем — вторая, самая легкая — третья.

Номера домов также измерены в порядковой шкале — они показывают, в каком порядке стоят дома вдоль улицы. Номера томов в собрании сочинений писателя или номера дел в архиве предприятия обычно связаны с хронологическим порядком их создания.

При оценке качества продукции и услуг, в т.н. *квалиметрии* (буквальный перевод: измерение качества) популярны порядковые шкалы. А именно, единица продукции оценивается как годная или не годная. При более тщательном анализе используется шкала с тремя градациями: есть значительные дефекты — присутствуют только незначительные дефекты — нет дефектов. Иногда применяют четыре градации: имеются критические дефекты (делающие невозможным использование контролируемой единицы продукции) — есть значительные дефекты — присутствуют только незначительные дефекты — нет дефектов. Аналогичный смысл имеет сортность продукции — высший сорт, первый сорт, второй сорт,…

При оценке экологических воздействий первая, наиболее обобщенная оценка — обычно порядковая, например: природная среда стабильна — природная среда угнетена (деградирует). Аналогично в эколого-медицинской шкале: нет выраженного воздействия на здоровье людей — отмечается отрицательное воздействие на здоровье.

Все шкалы измерения делят на две группы — шкалы качественных признаков и шкалы количественных признаков.

Порядковая шкала и шкала наименований — основные шкалы качественных признаков. Поэтому во многих конкретных областях результаты качественного анализа можно рассматривать как измерения по этим шкалам.

Шкалы количественных признаков — это шкалы интервалов, отношений, разностей, абсолютная. В них к отношениям равенства и порядка добавляются отношения, связанные с наличием единицы измерения и начала отсчета.

По шкале *интервалов* измеряют величину потенциальной энергии, координату точки на прямой (а также координаты точки на плоскости или в пространстве), географическую долготу (отсчитываемую в настоящее время от произвольно выбранного меридиана Гринвичской обсерватории в Великобритании), температуру по Цельсию, Фаренгейту или Реомюру. Во всех этих случаях на шкале нельзя отметить ни естественное начало отсчета, ни естественную единицу измерения. Исследователь должен сам задать точку отсчета и сам выбрать единицу измерения. Часто путем соглашения договариваются о выборе определенной единицы измерения, фиксируют начало отсчета, но произвольность подобного договора очевидна (например, в случае географической долготы).

Допустимыми преобразованиями в шкале интервалов являются линейные возрастающие преобразования, т.е. линейные функции. Температурные шкалы Цельсия и Фаренгейта связаны именно такой зависимостью:

$$^{0}C = \frac{5}{9}\left(^{0}F - 32\right) \tag{6.1}$$

где ^{0}C — температура (в градусах) по шкале Цельсия, а ^{0}F — температура по шкале Фаренгейта.

При допустимых преобразованиях в школе интервалов сохраняется отношение длин интервалов:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{\varphi(x_3) - \varphi(x_4)} \tag{6.2}$$

для любых чисел x_1, x_2, x_3, x_4 (результатов измерений) и любого допустимого преобразования $\varphi(x) = ax + b$, $a > 0$. Верно и обратное: если равенство (6.2) справедливо для любых чисел x_1, x_2, x_3, x_4, то $\varphi(x) = ax + b$, $a > 0$ при некоторых значениях коэффициентов a и b.

Из количественных шкал наиболее распространенными в науке и практике являются шкалы *отношений.* В них есть естественное начало отсчета — нуль, т.е. отсутствие величины, но нет естественной единицы измерения. По шкале отношений измерены большинство физических единиц: масса тела, длина, работа, мощность, заряд, напряжение, а также цены в экономике. Допустимыми преобразованиями в шкале отношений являются подобные (изменяющие только масштаб). Другими словами, линейные возрастающие преобразования без свободного члена. Примером является пересчет цен из одной валюты в другую по фиксированному курсу.

При допустимых преобразованиях в школе отношений сохраняется отношение измеряемых величин:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \tag{6.3}$$

для любых чисел x_1 и x_2 (результатов измерений) и любого допустимого преобразования $\varphi(x) = ax$, $a > 0$. Верно и обратное: если равенство (6.3) справедливо для любых чисел x_1 и x_2, то $\varphi(x) = ax$, $a > 0$ при некотором значении коэффициента a.

Предположим, мы сравниваем экономическую эффективность двух инвестиционных проектов, используя цены в рублях. Пусть первый проект оказался лучше второго. Теперь перейдем на валюту самой экономически мощной державы мира — юани, используя фиксированный курс пересчета. (В эконометрике [12] с помощью расчетов на основе паритета покупательной способности установлено, что в настоящее время валовой внутренний продукт Китая больше, чем у какой-либо иной страны, в частности, больше, чем у Европейского Союза (второе место) и США (третье место) — см. главу 4 выше.) Очевидно, первый проект должен опять оказаться более выгодным, чем второй. Это очевидно из общих экономических соображений. Однако алгоритмы расчета не обеспечивают автоматически выполнения этого очевидного условия. Надо проверять, что оно выполнено. Результаты подобной проверки для средних величин описаны ниже. Оказалось, что нельзя произвольно выбирать вид средних величин, необходимо согласовывать вид средней со шкалами измерения.

В шкале *разностей* есть естественная единица измерения, но нет естественного начала отсчета. Допустимыми преобразованиями в шкале разностей являются сдвиги. Время измеряется по шкале разностей, если год (или сутки — от полудня до полудня) принимаем естественной единицей измерения, и по шкале интервалов в общем случае. На современном уровне знаний естественного начала отсчета времени указать нельзя. Дату сотворения мира различные авторы рассчитывают по-разному, равно как и момент рождества Христова. Так, согласно новой статистической хронологии [6], разработанной группой известного историка акад. РАН А.Т. Фоменко, Господь Иисус Христос родился примерно в 1054 г. по принятому ныне летоисчислению в Стамбуле (он же — Царьград, Византия, Троя, Иерусалим, Рим). Позже те же исследователи обосновали несколько иную дату — 1152 год н.э. [7].

При допустимых преобразованиях в школе разностей сохраняется разность измеряемых величин:

$$x_1 - x_2 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \qquad (6.4)$$

для любых чисел x_1 и x_2 (результатов измерений) и любого допустимого преобразования $\varphi(x) = x + b$. Верно и обратное: если равенство (6.4) справедливо для любых чисел x_1 и x_2, то $\varphi(x) = x + b$ при некотором значении коэффициента сдвига b.

Только для *абсолютной* шкалы результаты измерений — числа в обычном смысле слова. Примером является число людей в комнате. Для абсолютной шкалы допустимым является только тождественное преобразование.

Шесть рассмотренных нами основных типов шкал измерения описаны в табл.6.1.

Таблица 6.1

Основные шкалы измерения

Тип шкалы	Определение шкалы	Примеры	Группа допустимых преобразований $\Phi = \{\varphi\}$
Шкалы качественных признаков			
Наименований	Числа используют для различения объектов	Номера телефонов, паспортов, ИНН, штрих-коды	Все взаимно-однозначные преобразования
Порядковая	Числа используют для упорядочения объектов	Оценки экспертов, баллы ветров, отметки в школе, полезность, номера домов	Все строго возрастающие преобразования
Шкалы количественных признаков (описываются началом отсчета и единицей измерения)			
Интервалов	Начало отсчета и единица измерения произвольны	Потенциальная энергия, положение точки, температура по шкалам Цельсия и Фаренгейта	Все линейные преобразования $\phi(x) = ax + b$, a и b произвольны, $a>0$ (см. (6.1))
Отношений	Начало отсчета задано, единица измерения произвольна	Масса, длина, мощность, напряжение, сопротивление, температура по Кельвину, цены	Все подобные преобразования $\phi(x) = ax$, a произвольно, $a>0$
Разностей	Начало отсчета произвольно, единица измерения задана	Время	Все преобразования сдвига $\phi(x) = x + b$, b произвольно
Абсолютная	Начало отсчета и единица измерения заданы	Число людей в данном помещении	Только тождественное преобразование $\phi(x) = x$

Кроме перечисленных в табл.6.1, используют и иные типы шкал [1, 17]. Отметим, что в табл.6.1 выражение «единица измерения произвольна» означает, что она может быть выбрана по соглашению специалистов, но не вытекает из каких-либо фундаментальных соотношений. При измерении времени естественная единица измерения задается периодами обращения небесных тел, поэтому считаем, что время измерено в шкале разностей. Начало отсчета при измерении длины задается длиной отрезка, у которого начало и конец совпадают, и т.д.

В настоящее время считается необходимым перед применением тех или иных алгоритмов анализа данных установить, в шкалах каких типов измерены рассматриваемые величины. Отметим, что в процессе развития соответствующей области знания тип шкалы измерения конкретной величины может меняться. Так, сначала температура измерялась по *порядковой* шкале (холоднее — теплее). Затем — по *интервальной* (использовались шкалы Цельсия, Фаренгейта, Реомюра). Так, температура ^0C по шкале Цельсия выражается через температуру ^0F по шкале Фаренгейта с помощью линейного преобразования (6.1). Наконец, после открытия абсолютного нуля температуру можно считать измеренной по шкале *отношений* (шкала Кельвина). Надо отметить, что среди специалистов иногда имеются разногласия по поводу того, по каким шкалам следует считать измеренными те или иные реальные величины. Другими словами, процесс измерения включает в себя, как необходимый этап, и определение типа шкалы (вместе с обоснованием выбора определенного типа шкалы).

6.2. Инвариантные алгоритмы и средние величины

Основное требование к алгоритмам анализа данных формулируется в ТИ так: ***выводы, сделанные на основе данных, измеренных в шкале определенного типа, не должны меняться при допустимом преобразовании шкалы измерения этих данных.*** Другими словами, выводы должны быть *инвариантны* по отношению к допустимым преобразованиям шкалы.

Требование инвариантности (адекватности) выводов. Выяснение типов используемых шкал необходимо для адекватного выбора методов анализа данных. Основополагающим требованием является независимость выводов от того, какой именно шкалой измерения воспользовался исследователь (среди всех шкал, переходящих друг в друга при допустимых преобразованиях). Например, если речь о длинах, то выводы не должны зависеть от того, измерены ли длины в метрах, аршинах, саженях, футах или дюймах.

Таким образом, одна из основных целей теории измерений — борьба с субъективизмом исследователя при приписывании численных значений реальным объектам. Так, расстояния можно измерять в аршинах, метрах, микронах, милях, парсеках и других единицах измерения. Массу (вес) — в пудах, килограммах, фунтах и др. Цены на товары и услуги можно указывать в юанях, рублях, тенге, гривнах, латах, кронах, марках, долларах США и других валютах (при условии заданных фиксированных курсов пересчета). Подчеркнем очень важное, хотя и вполне очевидное обстоятельство: выбор единиц измерения зависит от исследователя, т.е. субъективен. *Выводы могут быть адекватны реальности только тогда, когда они не зависят от того, какую единицу измерения предпочтет исследователь, т.е. когда они инвариантны относительно допустимого преобразования шкалы*. Очевидно, что при разработке управленческих решений можно опираться только на инвариантные выводы.

Другими словами, выводы должны быть инвариантны относительно группы допустимых преобразований шкалы измерения. Только тогда их можно назвать адекватными, т.е. избавленными от субъективизма исследователя, выбирающего определенную шкалу из множества шкал заданного типа, связанных допустимыми преобразованиями. Иногда используют несколько иную терминологию. В статье [1] требование инвариантности (адекватности) выводов формулируется как условие «содержательности» («состоятельности») высказывания.

Требование инвариантности выводов накладывает ограничения на множество возможных алгоритмов анализа данных. В качестве примера рассмотрим порядковую шкалу. Одни алгоритмы анализа данных позволяют получать адекватные выводы, другие — нет. Например, в задаче проверки однородности двух независимых выборок алгоритмы ранговой статистики (т.е. использующие только ранги результатов измерений) дают адекватные выводы, а статистики Крамера-Уэлча и

Стьюдента — нет. Значит, для обработки данных, измеренных в порядковой шкале, критерии Смирнова, Лемана-Розенблатта и Вилкоксона можно использовать, а критерии Крамера-Уэлча и Стьюдента — нет [12].

Оказывается, требование инвариантности является достаточно сильным. Из многих алгоритмов анализа статистических данных ему удовлетворяют лишь некоторые. Покажем это на примере сравнения средних величин.

Средние величины. Среди всех методов анализа данных важное место занимают алгоритмы усреднения. Еще в 70-х годах удалось полностью выяснить, какими видами средних можно пользоваться при анализе данных, измеренных в тех или иных шкалах.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка объема n. Часто используют среднее арифметическое

$$\bar{X} = X_{cp} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Использование среднего арифметического настолько привычно, что второе слово в термине часто опускают. И говорят о средней зарплате, среднем доходе и других средних для конкретных экономических данных, подразумевая под «средним» среднее арифметическое. Такая традиция может приводить к ошибочным выводам. Покажем это на примере расчета средней заработной платы (среднего дохода) работников условного предприятия (табл.6.2).

Таблица 6.2

Численность работников различных категорий, их заработная плата и доходы (в условных единицах)

№ п/п	Категория работников	Число работников	Заработная плата	Суммарные доходы
1	Низкоквалифицированные рабочие	40	100	4000
2	Высококвалифицированные рабочие	30	200	6000
3	Инженеры и служащие	25	300	7500

№ п/п	Категория работников	Число работников	Заработная плата	Суммарные доходы
4	Менеджеры	4	1000	4000
5	Генеральный директор (владелец)	1	18500	18500
6	Всего	100		40000

Первые три строки в табл.6.2 вряд ли требуют пояснений. В четвертой строке менеджеры — это директора по направлениям, а именно, по производству (главный инженер или технический директор), по финансам (главный бухгалтер или финансовый директор), по маркетингу и сбыту, по персоналу (по кадрам). Владелец сам руководит предприятием в качестве генерального директора. В столбце «заработная плата» указаны доходы одного работника соответствующей категории, а в столбце «суммарные доходы» — доходы всех работников соответствующей категории.

Фонд оплаты труда составляет 40000 единиц, работников всего 100, следовательно, средняя заработная плата составляет 40000/100 = 400 единиц. Однако эта средняя арифметическая величина явно не соответствует интуитивному представлению о «средней зарплате». Из 100 работников лишь 5 имеют заработную плату, ее превышающую, а зарплата остальных 95 существенно меньше средней арифметической. Причина очевидна — заработная плата одного человека — генерального директора — превышает заработную плату 95 работников — низкоквалифицированных и высококвалифицированных рабочих, инженеров и служащих, вместе взятых.

Ситуация напоминает описанную в известном рассказе о больнице, в которой 10 больных, из них у 9 температура 40 ^{0}C, а один уже отмучился, лежит в морге с температурой 0 ^{0}C. Между тем средняя температура по больнице равна 36 ^{0}C — лучше не бывает!

Из сказанного ясно, что не всегда целесообразно использовать среднее арифметическое. Его можно порекомендовать лишь для достаточно однородных совокупностей (без больших выбросов в ту или иную сторону).

А какие средние стоит применять для описания заработной платы? Вполне естественно использовать медиану. Для данных табл.6.2 медиана — среднее арифметическое 50-го и 51-го работника, если их заработные платы расположены в порядке неубывания. Сначала идут зарплаты 40 низкоквалифицированных рабочих, а затем — с 41-го до 70-го работника — заработные платы высококвалифицированных рабочих. Следовательно, медиана попадает именно на них и равна 200. У 50-ти работников заработная плата не превосходит 200, и у 50-ти — не менее 200, поэтому медиана показывает «центр», около которого группируется основная масса исследуемых величин. Еще одна средняя величина — мода, наиболее часто встречающееся значение. В рассматриваемом случае это заработная плата низкоквалифицированных рабочих, т.е. 100. Таким образом, для описания зарплаты имеем три средние величины — моду (100 единиц), медиану (200 единиц) и среднее арифметическое (400 единиц). Для наблюдающихся в реальной экономике распределений доходов и заработной платы справедлива та же закономерность: мода меньше медианы, а медиана меньше среднего арифметического.

Для чего при разработке управленческих решений [13] используются средние величины? Обычно для того, чтобы заменить совокупность чисел одним числом, чтобы сравнивать совокупности с помощью средних.

Пусть, например, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — совокупность оценок n экспертов, «выставленных» одному объекту экспертизы (например, одному из вариантов стратегического развития фирмы), $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ — второму (другому варианту такого развития). Как сравнивать эти совокупности? Очевидно, самый простой способ — по средним значениям.

А как вычислять средние? Известны различные виды средних величин: среднее арифметическое, медиана, мода, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратическое. Напомним, что общее понятие средней величины введено французским математиком первой половины XIX в. академиком Огюстеном Луи Коши (1789– 1857). Оно таково: средней величиной является любая функция $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ такая, что при всех возможных значениях аргументов значение этой функции не меньше, чем минимальное из чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$, и не больше, чем максимальное из этих чисел. Все перечисленные выше виды средних величин являются средними по Коши.

При допустимом преобразовании шкалы значение средней величины, очевидно, меняется. Но выводы о том, для какой совокупности среднее больше, а для какой — меньше, не должны меняться (в соответствии с условием инвариантности выводов, принятом как основное требование в ТИ). Сформулируем соответствующую математическую задачу поиска вида средних величин, результат сравнения которых устойчив относительно допустимых преобразований шкалы.

Пусть $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — среднее по Коши. Пусть среднее по первой совокупности меньше среднего по второй совокупности:

$$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) < f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n).$$

Тогда согласно ТИ для устойчивости результата сравнения средних необходимо, чтобы для любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований в соответствующей шкале было справедливо также неравенство

$$f(g(Y_1), g(Y_2), \ldots, g(Y_n)) < f(g(Z_1), g(Z_2), \ldots, g(Z_n)),$$

т.е. среднее преобразованных значений из первой совокупности также было меньше среднего преобразованных значений для второй совокупности. Причем сформулированное условие должно быть выполнено для любых двух совокупностей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ и $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ и, напомним, любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований, задающей шкалу.

Средние величины, удовлетворяющие сформулированному условию, назовем *допустимыми* (в соответствующей шкале). Согласно ТИ только допустимыми средними величинами можно пользоваться при анализе мнений экспертов и иных данных, измеренных в рассматриваемой шкале.

С помощью математической теории, развитой в монографии [10], удается описать вид допустимых средних величин в основных шкалах. Сразу ясно, что для данных, измеренных в шкале наименований, допустимых средних нет, поскольку допустимые в этой шкале преобразования — а ими являются все взаимно однозначные преобразования — могут как угодно перемешать значения усредняемых величин.

6.3. Средние величины в порядковой шкале

Рассмотрим сначала обработку мнений экспертов, измеренных в порядковой шкале. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Из всех средних по Коши допустимыми средними в порядковой шкале являются только члены вариационного ряда* (*порядковые статистики*).

Теорема 6.1, впервые полученная в статье [8], справедлива при условии, что средняя величина $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ является непрерывной (по совокупности переменных) и симметрической функцией. Последнее означает, что при перестановке аргументов значение функции $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ не меняется. Это условие является вполне естественным, ибо среднюю величину находим для *совокупности* (*набора, множества*) чисел, а не для *последовательности*. Множество не меняется в зависимости от того, в какой последовательности мы перечисляем его элементы.

Согласно теореме 6.1 в качестве среднего для данных, измеренных в порядковой шкале, можно использовать, в частности, медиану (при нечетном объеме выборки). При четном же объеме целесообразно применять один из двух центральных членов вариационного ряда — как их иногда называют, левую медиану или правую медиану (ясно, что при достаточно большом объеме выборки эти величины различаются мало). Моду тоже можно использовать — она всегда является членом вариационного ряда. Можно применять выборочные квартили, минимум и максимум, децили и т.п. Но теорема 6.1 запрещает использовать при анализе порядковых данных (т.е. измеренных в порядковой шкале) среднее арифметическое, среднее геометрическое и т.д. Таким образом, не рекомендуется разрабатывать управленческое решение на основе среднего арифметического или среднего геометрического мнений экспертов, поскольку такие мнения, как разъяснено выше, обычно измерены в порядковой шкале.

Приведем численный пример, показывающий некорректность использования среднего арифметического $f(X_1, X_2) = (X_1 + X_2)/2$ в порядковой шкале. Пусть $Y_1 = 1$, $Y_2 = 11$, $Z_1 = 6$, $Z_2 = 8$. Тогда $f(Y_1, Y_2) = 6$, что меньше, чем $f(Z_1, Z_2) = 7$. Пусть строго возрастающее преобразование g таково, что $g(1) = 1$, $g(6) = 6$, $g(8) = 8$, $g(11) = 99$. Таких преобразований много. Например, можно положить $g(x) = x$ для x, не превосходящих 8, и $g(x) = 99(x-8)/3 + 8$ для x, больших 8. Тогда $f(g(Y_1), g(Y_2)) = 50$, что больше, чем $f(g(Z_1), g(Z_2)) = 7$. Как видим, в результате допустимого, т.е. строго возрастающего преобразования шкалы упорядоченность средних величин изменилась. Таков же результат применения допустимого преобразования $g(x) = x^2$. Тогда $g(1) = 1$, $g(6) = 36$, $g(8) = 64$, $g(11) = 121$, а потому $f(g(Y_1), g(Y_2)) = 61$, что больше, чем $f(g(Z_1), g(Z_2)) = 50$.

Таким образом, теория измерений выносит жесткий приговор среднему арифметическому — использовать его в порядковой шкале нельзя. Однако же те, кто не знает теории измерений, используют его. Всегда ли они ошибаются? Оказывается, можно в какой-то мере (но отнюдь не полностью!) реабилитировать среднее арифметическое, если перейти к вероятностной постановке и к тому же удовлетвориться результатами для больших объемов выборок. В монографии [10], кроме теоремы 6.1, доказано также следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Пусть $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, а $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $H(x)$, причем выборки $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ и $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ независимы между собой и $MY_1 > MZ_1$. Для того, чтобы вероятность события*

$$\left\{\omega : \frac{g(Y_1)+g(Y_2)+\dots+g(Y_m)}{m} > \frac{g(Z_1)+g(Z_2)+\dots+g(Z_n)}{n}\right\}$$

стремилась к 1 при $\min(m, n) \to \infty$ для любой строго возрастающей непрерывной функции g, удовлетворяющей условию

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\left|\frac{g(x)}{x}\right| < \infty\,.$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех x выполнялось неравенство $F(x) \leqslant H(x)$, *причем существовало число* x_0, *для которого* $F(x_0) < H(x_0)$.

Примечание. Условие с верхним пределом носит чисто внутриматематический характер. Фактически функция g — произвольное допустимое преобразование в порядковой шкале.

Согласно теореме 6.2 средним арифметическим допустимо пользоваться и в порядковой шкале, если сравниваются выборки из двух распределений, удовлетворяющих приведенному в теореме неравенству. Проще говоря, одна из функций распределения должна всегда лежать над другой. Функции распределения не могут пересекаться, им разрешается только касаться друг друга. Это условие выполнено, например, если функции распределения отличаются только сдвигом, т.е.

$$F(x) = H(x+b)$$

при некотором b. Последнее условие выполняется, если два значения некоторой величины измеряются с помощью одного и того же средства измерения, у которого распределение погрешностей не меняется при переходе от измерения одного значения рассматриваемой величины к измерению другого.

6.4. Средние по Колмогорову

Естественная система аксиом (требований к средним величинам) приводит к так называемым ассоциативным средним. Их общий вид нашел в 1930 г. А.Н.Колмогоров [2]. Теперь их называют «средними по Колмогорову» (иногда — «средними Колмогорова»).

Для чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$ средним по Колмогорову является

$$G\{(F(X_1) + F(X_2) + \ldots + F(X_n))/n\},$$

где F — строго монотонная функция (т.е. строго возрастающая или строго убывающая), G — функция, обратная к F.

Среди средних по Колмогорову — много хорошо известных персонажей. Так, если $F(x) = x$, то среднее по Колмогорову — это среднее арифметическое, если $F(x) = \ln x$, то среднее геометрическое, если $F(x) = 1/x$, то среднее гармоническое, если $F(x) = x^2$, то среднее квадратическое, и т.д. (в последних трех случаях усредняются положительные величины).

Средние по Колмогорову — частный случай средних по Коши. С другой стороны, такие популярные средние, как медиана и мода, нельзя представить в виде средних по Колмогорову.

В статье [9] впервые доказаны следующие утверждения.

Теорема 6.3. *В шкале интервалов из всех средних по Колмогорову допустимым является только среднее арифметическое* (*при справедливости некоторых слабых внутриматематических условий регулярности*).

Таким образом, среднее геометрическое или среднее квадратическое температур (в шкале Цельсия), потенциальных энергий или координат точек не имеют смысла. В качестве среднего надо применять среднее арифметическое. А также можно использовать медиану или моду — они не входят в число средних по Колмогорову.

Теорема 6.4. *В шкале отношений из всех средних по Колмогорову допустимыми являются только степенные средние с* $F(x) = x^c$, $c \neq 0$, *и среднее геометрическое* (*при справедливости некоторых слабых внутриматематических условий регулярности*).

Есть ли средние по Колмогорову, которыми нельзя пользоваться в шкале отношений? Конечно, есть. Например, с $F(x) = e^x$.

Замечание 1. Среднее геометрическое является пределом степенных средних при $c \to 0$.

Замечание 2. Подробное описание «внутриматематических условий регулярности», упомянутых в формулировках теорем 6.3 и 6.4, можно найти в [10, 11]. Доказательства теорем

6.1– 6.4 приведены в монографии [10]. Их обобщение на случай взвешенных средних дано в статье [11] (заключения теорем при этом не меняются).

Аналогично средним величинам могут быть изучены и другие статистические характеристики — показатели разброса, связи, расстояния и др. (см., например, [10, 17]). Нетрудно показать, например, что коэффициент корреляции не меняется при любом допустимом преобразовании в шкале интервалов, как и отношение дисперсий. Дисперсия не меняется в шкале разностей, коэффициент вариации — в шкале отношений, и т.д. Ранговые статистики не меняются при допустимых преобразованиях в порядковой шкале (например, статистики Вилкоксона, Лемана-Розенблатта, рассмотренные в главе 2 выше).

Приведенные выше результаты о средних величинах широко применяются, причем не только в экспертных исследованиях, но и в теории принятия решений, экономике, менеджменте, социологии, медицине, инженерном деле. Например, для анализа методов агрегирования датчиков в АСУ ТП (автоматизированных системах управления технологическими процессами) доменных печей. Велико прикладное значение теории измерений в задачах стандартизации и управления качеством, в частности, в квалиметрии [3, 8]. Обзор [1] посвящен анализу многочисленных работ последних десятилетий, посвященных связи теории измерений и теории средних величин.

При подготовке и принятии инженерных, технико-экономических и иных решений необходимо использовать только инвариантные алгоритмы обработки данных. В настоящей главе показано, что требование инвариантности выделяет из многих алгоритмов усреднения лишь некоторые, соответствующие используемым шкалам измерения. Инвариантные алгоритмы в общем случае рассматриваются в математической теории измерений [15]. Нацеленное на прикладные исследования изложение ряда вопросов теории измерений дается в монографиях [10, 12, 14, 17, 18].

Литература

1. *Барский Б.В., Соколов М.В.* Средние величины, инвариантные относительно допустимых преобразований шкалы измерения / Заводская лаборатория. 2006. Т.72. №1. С.59– 66.

2. *Колмогоров А.Н.* Об определении среднего. — В кн.: Избранные труды: Математика и механика. — М.: Наука, 1985. С.136– 138.

3. *Кривцов В.С., Орлов А.И., Фомин В.Н.* Современные статистические методы в стандартизации и управлении качеством продукции / Стандарты и качество. 1988. No.3. С.32– 36.

4. *Новиков Д.А.* Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). — М.: МЗ-Пресс, 2004. — 67 с.

5. *Новиков Д.А., Новочадов В.В.* Статистические методы в медико-биологическом эксперименте (типовые случаи). — Волгоград: Издательство ВолГМУ, 2005. — 87 с.

6. *Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* Империя. Русь, Турция, Китай, Европа, Египет. Новая математическая хронология древности. — М.: Факториал, 1996. — 752 с.

7. *Носовский Г.В., Фоменко А.Т.* Царь славян. — Санкт-Петербург: Нева, 2004. — 564 с.

8. *Орлов А.И.* Допустимые средние в некоторых задачах экспертных оценок и агрегирования показателей качества. — В сб.: Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. — М.: Наука, 1974. С. 388– 393.

9. *Орлов А.И.* Допустимые преобразования в задаче сравнения средних. Пси-постоянные статистики. — В сб.: Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1975. С.121– 127.

10. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

11. *Орлов А.И.* Связь между средними величинами и допустимыми преобразованиями шкалы / Математические заметки. 1981. Т. 30. №4. С.561– 568.

12. *Орлов А.И.* Эконометрика: Учебник для вузов. Изд. 3-е, переработанное и дополненное. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.

13. *Орлов А.И.* Принятие решений. Теория и методы разработки управленческих решений. — М.: ИКЦ “МарТ”; Ростов н/Д: Издательский центр “МарТ”, 2005. — 496 с.

14. *Орлов А.И., Федосеев В.Н.* Менеджмент в техносфере: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. — М.: Издательский центр «Академия», 2003. — 384 с.

15. *Пфанцагль И.* Теория измерений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.

16. *Суппес П., Зинес Дж.* Основы теории измерений. — В сб.: Психологические измерения. — М.: Мир, 1967. С. 9– 110.

17. *Толстова Ю.Н.* Измерение в социологии. М.: Инфра-М, 1998. — 352 с.

18. *Федосеев В.Н., Орлов А.И., Ларионов В.Г., Козьяков А.Ф.* Управление промышленной и экологической безопасностью: Учебное пособие. 2-е издание. — М.: Изд-во УРАО, 2003. — 220 с.

Контрольные вопросы и задачи

1. Всегда ли имеет смысл складывать числа, используемые в той или иной области человеческой деятельности?

2. Приведите примеры величин, измеренных в шкале наименований.

3. Приведите примеры величин, измеренных в порядковой шкале.

4. Приведите примеры величин, измеренных в шкале интервалов.

5. Приведите примеры величин, измеренных в шкале отношений.

6. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего арифметического $f(X_1, X_2) = (X_1 + X_2)/2$ в порядковой шкале, используя допустимое преобразование $g(x) = x^4$ (при положительных усредняемых величинах x).

7. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего геометрического в порядковой шкале. Другими словами, приведите пример чисел x_1, x_2, y_1, y_2 и строго возрастающего преобразования $f: R^1 \to R^1$ таких, что

$$(x_1x_2)^{1/2} < (y_1y_2)^{1/2},\ [f(x_1)f(x_2)]^{1/2} > [f(y_1)f(y_2)]^{1/2}.$$

8. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего квадратического в порядковой шкале. Другими словами, приведите пример чисел x_1, x_2, y_1, y_2 и строго возрастающего преобразования $f: R^1 \to R^1$ таких, что

$$[(x_1)^2 + (x_2)^2]^{1/2} < [(y_1)^2 + (y_2)^2]^{1/2},$$

$$[(f(x_1))^2 + (f(x_2))^2]^{1/2} > [(f(y_1))^2 + (f(y_2))^2]^{1/2}.$$

9. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего гармонического в порядковой шкале.

10. Постройте пример, показывающий некорректность использования среднего геометрического в шкале интервалов.

11. Какие средние величины целесообразно использовать при расчете средней заработной платы (или среднего дохода)?

12. Как соотносятся средние по Коши и средние по Колмогорову?

Темы докладов, рефератов, исследовательских работ

1. Теория измерений как научная дисциплина, посвященная гомоморфизмам эмпирических систем с отношениями в числовые системы с отношениями.

2. Показатели разброса, связи, показатели различия (в том числе метрики) в порядковой шкале.

3. Ранговые методы математической статистики как инвариантные методы анализа порядковых данных.

4. Показатели разброса, связи, показатели различия (в том числе метрики) в шкале интервалов.

5. Показатели разброса, связи, показатели различия (в том числе метрики) в шкале отношений.

6. Теорема проф. В.В. Подиновского: любое изменение коэффициентов весомости единичных показателей качества продукции приводит к изменению упорядочения некоторых пар изделий по средневзвешенному показателю (доказательство и прикладное значение).

Глава 7

СТАТИСТИКА НЕЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ

Статистика нечисловых данных, или статистика объектов нечисловой природы, нечисловая статистика [31], выделена в организационно-экономическом моделировании как самостоятельная область прикладной статистики в 1979 г. [19].

7.1. Виды статистических данных

В организационно-экономическом моделировании большое место занимают статистические методы, другими словами, методы анализа данных, причем обычно достаточно большого количества данных. Статистические данные могут иметь различную природу. Исторически самыми ранними были два вида данных — сведения о числе объектов, удовлетворяющих тем или иным условиям, и числовые результаты измерений.

Первый из этих видов данных до сих пор главенствует в статистических сборниках Росстата. Такого рода данные часто называют *категоризованными*, поскольку о каждом из рассматриваемых объектов известно, в какую из нескольких заранее заданных категорий он попадает. Примером является информация Росстата о населении страны, с разделением по возрастным категориям и полу. Часто при составлении таблиц жертвуют информацией, заменяя точное значение измеряемой величины на указание интервала группировки, в которую это значение попадает. Например, вместо точного возраста человека используют лишь один из указанных в таблице возрастных интервалов.

Второй наиболее распространенный вид данных — количественные данные, рассматриваемые как действительные числа. Таковы результаты измерений, наблюдений, испытаний, опытов, анализов. Количественные данные обычно описываются набором чисел (выборкой), а не таблицей.

Нельзя утверждать, что категоризованные данные соответствуют первому этапу исследования, а числовые — следующему, на котором используются более совершенные методы измерения. Дело в том, что человеку свойственно давать качественные ответы на возникающие в его практической деятельности вопросы. Примером является таблица [30, с.22–23, табл.1], посвященная анализу сильных и слабых сторон конкретной Компании. Она составлена одним из руководителей этой Компании и предназначена для использования при управлении Компанией. В этой таблице показатели, описывающие различные стороны работы Компании, оценены в терминах «Очень высокий», «Высокий», «Средний», «Низкий», «Очень низкий» по отношению к предприятиям отрасли. Ясно, что вполне можно превратить в числа эти оценки, однако этот переход будет зависеть от исследователя, носить неизбежный налет субъективизма (ср. главу 6 выше). Отметим, что в [30, с.22–23, табл.1] важность (вес) показателей также оценивается качественно, а не количественно — в терминах «Высокая», «Средняя» или «Низкая».

Иногда нецелесообразно однозначно относить данные к категоризованным или количественным. Например, в Ветхом Завете, в Четвертой книге Моисеевой «Числа» указано количество воинов в различных коленах. С одной стороны, это типичные категоризованные данные, градациями служат названия колен. С другой стороны, эти данные можно рассматривать как количественные, как выборку, их вполне естественно складывать, вычислять среднее арифметическое и т.п.

Описанная ситуация типична. Существует весьма много различных видов статистических данных. Это связано, в частности, со способами их получения. Например, если испытания некоторых технических устройств продолжаются до определенного момента, то получаем т.н. *цензурированные* данные, состоящие из набора чисел — продолжительностей работы ряда устройств до отказа, и информации о том, что остальные устройства продолжали работать в момент окончания испытания. Такого рода данные часто используются при оценке и контроле надежности технических устройств.

Описание вида данных и, при необходимости, механизма их порождения — начало любого статистического исследования.

В простейшем случае статистические данные — это значения некоторого признака, свойственного изучаемым объектам. Значения могут быть количественными или представлять собой указание на категорию, к которой можно отнести объект. Во втором случае говорят о качественном признаке. Используют и более сложные признаки, перечень которых будет расширяться по мере развертывания изложения в настоящем учебнике.

При измерении по нескольким количественным или качественным признакам в качестве статистических данных об объекте получаем вектор. Его можно рассматривать как новый вид данных. В таком случае выборка состоит из набора векторов. Есть часть координат — числа, а часть — качественные (категоризованные) данные, то говорим о векторе разнотипных данных.

Одним элементом выборки, т.е. одним измерением, может быть и функция в целом. Например, электрокардиограмма больного или амплитуда биений вала двигателя. Или временной ряд, описывающий динамику показателей определенной фирмы. Тогда выборка состоит из набора функций.

Элементами выборки могут быть и бинарные отношения. Например, при опросах экспертов часто используют упорядочения (ранжировки) объектов экспертизы — образцов продукции, инвестиционных проектов, вариантов управленческих решений. В зависимости от регламента экспертного исследования элементами выборки могут быть различные виды бинарных отношений (упорядочения, разбиения, толерантности), множества, нечеткие множества и т.д.

Итак, математическая природа элементов выборки в различных задачах прикладной статистики может быть самой разной. Однако можно выделить два класса статистических данных — числовые и нечисловые. Соответственно прикладная статистика разбивается на две части — числовую статистику и нечисловую статистику (ее называют также статистикой нечисловых данных или статистикой объектов нечисловой природы).

Числовые статистические данные — это числа, вектора, функции. Их можно складывать, умножать на коэффициенты. Поэтому в числовой статистике большое значение имеют разнообразные суммы. Математический аппарат анализа сумм случайных элементов выборки — это (классические) законы больших чисел и центральные предельные теоремы (см. приложение 1 к настоящему учебнику).

Нечисловые статистические данные — это категоризованные данные, вектора разнотипных признаков, бинарные отношения, множества, нечеткие множества и др. Их нельзя складывать и умножать на коэффициенты. Поэтому не имеет смысла говорить о суммах нечисловых статистических данных. Они являются элементами нечисловых математических пространств (множеств). Математический аппарат анализа нечисловых статистических данных основан на использовании расстояний между элементами (а также мер близости, показателей различия) в таких пространствах. С помощью расстояний решаются основные статистические задачи — определяются эмпирические и теоретические средние, доказываются законы больших чисел, строятся непараметрические оценки плотности распределения вероятностей, решаются задачи диагностики и кластерного анализа, и т.д. [30, 31].

Сведем информацию об основных областях прикладной статистики в табл.7.1. Отметим, что классификацию можно проводить и по другим основаниям. Так, непараметрические и параметрические методы, а также методы, основанные на тех или иных моделях порождения цензурированных данных входят в состав каждой из рассматриваемых областей.

Таблица 7.1

Области прикладной статистики

№ п/п	Вид статистических данных	Область прикладной статистики
1	Числа	Статистика (случайных) величин
2	Конечномерные вектора	Многомерный статистический анализ
3	Функции	Статистика случайных процессов и временных рядов
4	Объекты нечисловой природы	Нечисловая статистика

Подведем итоги раздела. Статистика нечисловых данных — это направление в прикладной математической статистике, в котором в качестве исходных статистических данных (результатов наблюдений) рассматриваются объекты нечисловой природы. Так принято называть объекты, которые нецелесообразно описывать числами, в частности элементы различных нелинейных пространств. Примерами являются бинарные отношения (ранжировки, разбиения, толерантности и др.), результаты парных и множественных сравнений, множества, нечеткие множества, измерения в шкалах, отличных от абсолютных. Этот перечень примеров не претендует на законченность. Он складывался постепенно, по мере того, как развивались теоретические исследования в области нечисловой статистики (статистики нечисловых данных) и расширялся опыт применений этого направления прикладной математической статистики.

7.2. Объекты нечисловой природы

Объекты нечисловой природы широко используются в теоретических и прикладных исследованиях по экономике, менеджменту и другим проблемам управления, в частности управления качеством продукции, в технических науках, социологии, психологии, медицине и т.д., а также практически во всех отраслях народного хозяйства.

Начнем с первоначального знакомства с основными видами объектов нечисловой природы.

Результаты измерений в шкалах, отличных от абсолютной. Рассмотрим конкретное исследование в области маркетинга образовательных услуг, послужившее поводом к развитию одного из направлений отечественных исследований по теории измерений. При изучении привлекательности различных профессий для выпускников новосибирских школ был составлен список из 30 профессий. Опрашиваемых просили оценить каждую из этих профессий одним из баллов 1, 2, …, 10 по правилу: чем больше нравится, тем выше балл. Для получения социологических выводов необходимо было дать единую оценку привлекательности определенной профессии для совокупности выпускников школ. В качестве такой оценки в работе [41] использовалось среднее арифметическое баллов, выставленных профессии опрошенными школьниками. В частности, физика получила средний балл 7,69, а математика — 7,50. Поскольку 7,69 больше, чем 7,50, был сделан вывод, что физика более предпочтительна для школьников, чем математика.

Однако этот вывод противоречит данным работы [42], согласно которым ленинградские школьники средних классов больше любят математику, чем физику. Как объяснить это противоречие? Есть много подходов к выяснению причин различия выводов новосибирских и ленинградских исследователей. Здесь обсудим одно из возможных объяснений этого противоречия, основанное на идеях нечисловой статистики. Оно сводится к указанию на неадекватность (с точки зрения теории измерений, см. главу 6 выше) методики обработки статистических данных о предпочтениях выпускников школ, примененной в работе [41].

Дело в том, что баллы 1, 2, …, 10 введены конкретными исследователями, т.е. субъективно. Если одна профессия оценена в 10 баллов, а вторая — в 2, то из этого нельзя заключить, что первая ровно в 5 раз привлекательней второй. Другой коллектив социологов мог бы принять иную систему баллов, например 1, 4, 9, 16, …, 100. Естественно предположить, что упорядочивание профессий по привлекательности, присущее школьникам, не зависит от того, какой системой баллов им предложит пользоваться социолог. Раз так, то распределение профессий по градациям десятибалльной системы не изменится, если перейти к другой системе баллов с помощью любого допустимого преобразования в порядковой шкале, т.е. с помощью строго возрастающей функции $g : R^1 \to R^1$. Если $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ — ответы n выпускников школ, касающиеся математики, а $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ — физики, то после перехода к новой системе баллов ответы относительно математики будут иметь вид $g(Y_1), g(Y_2), \dots, g(Y_n)$, а относительно физики — $g(Z_1), g(Z_2), \dots, g(Z_n)$.

Пусть единая оценка привлекательности профессии вычисляется с помощью функции $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Какие требования естественно наложить на функцию $f : R^n \to R^1$, чтобы полученные с ее помощью выводы не зависели от того, какой именно системой баллов пользовался социолог (в рассматриваемом исследовании он выступал как специалист по маркетингу образовательных услуг)?

Замечание. Обсуждение можно вести в терминах экспертных оценок. Тогда вместо сравнения математики и физики n экспертов (а не выпускников школ) оценивают по конкурентоспособности на мировом рынке, например, две марки стали. Однако в настоящее время маркетинговые и социологические исследования более привычны, чем экспертные.

Единая оценка вычислялась для того, чтобы сравнивать профессии по привлекательности. Пусть $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ — среднее по Коши (см. главу 6). Пусть среднее по первой совокупности меньше среднего по второй совокупности:

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) < f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n).$$

Тогда согласно теории измерений необходимо потребовать, чтобы для любого допустимого преобразования g из группы допустимых преобразований в порядковой шкале было справедливо также неравенство

$$f(g(Y_1), g(Y_2), \dots, g(Y_n)) < f(g(Z_1), g(Z_2), \dots, g(Z_n)).$$

т.е. среднее преобразованных значений из первой совокупности также было меньше среднего преобразованных значений для второй совокупности. Более того, два рассматриваемых неравенства должны быть равносильны. Причем сформулированное условие должно быть верно для любых двух совокупностей Y_1, Y_2, ... , Y_n и Z_1, Z_2, ... , Z_n и, напомним, любого допустимого преобразования. Средние величины, удовлетворяющие сформулированному условию, называют допустимыми (в порядковой шкале). Согласно теории измерений только такими средними можно пользоваться при анализе мнений выпускников школ или экспертов, обработке иных данных, измеренных в порядковой шкале.

Какие единые оценки привлекательности профессий $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ устойчивы относительно сравнения? Ответ на этот вопрос дан выше в главе 6. В частности, оказалось, что средним арифметическим, как в работе [41] новосибирских социологов (специалистов по маркетингу образовательных услуг), пользоваться нельзя. А порядковыми статистиками, т.е. членами вариационного ряда (и только ими) — можно.

Методы анализа конкретных статистических данных, измеренных в шкалах, отличных от абсолютной, являются предметом изучения в статистике нечисловых данных. Как описано выше, основные шкалы измерения делятся на качественные (шкалы наименований и порядка) и количественные (шкалы интервалов, отношений, разностей, абсолютная). Методы анализа статистических данных в количественных шкалах сравнительно мало отличаются от таковых в абсолютной шкале. Добавляется только требование инвариантности относительно преобразований сдвига и/или масштаба. Методы анализа качественных данных — принципиально иные.

Напомним, что исходным понятием теории измерений является совокупность $\Phi = \{\varphi\}$ допустимых преобразований шкалы (обычно Φ — группа), $\varphi : R^1 \to R^1$. Алгоритм обработки данных W, т.е. функция $W : R^n \to A$ (здесь A — множество возможных результатов работы алгоритма) называется адекватным в шкале с совокупностью допустимых преобразований Φ, если

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = W(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) \qquad (7.1)$$

для всех $x_i \in R^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и всех $\varphi \in \Phi$. Таким образом, теорию измерений рассматриваем как теорию инвариантов относительно различных совокупностей допустимых преобразований Ф. Интерес вызывают две задачи:

а) дана группа допустимых преобразований Ф (т.е. задана шкала измерения); какие алгоритмы анализа данных W из определенного класса являются адекватными (т.е удовлетворяют тождеству (7.1))?

б) дан алгоритм анализа данных W; для каких шкал (т.е. групп допустимых преобразований Ф) он является адекватным?

В главе 6 первая задача рассматривается для алгоритмов расчета средних величин. Информацию о других результатах решения задач указанных типов можно найти в работах [19, 38].

Бинарные отношения. Пусть $W : R^n \to A$ — адекватный алгоритм в шкале наименований. Можно показать, что этот алгоритм задается некоторой функцией от матрицы $B = \left\| b_{ij} \right\| = B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ порядка $n \times n$, где

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \ x_i = x_j, \ i, \ j = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, \ x_i \neq x_j, \ i, \ j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}.$$

Если $W : R^n \to A$ — адекватный алгоритм в шкале порядка, то этот алгоритм задается некоторой функцией от матрицы $C = |c_{ij}| = C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ порядка $n \times n$, где

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \ x_i \leqslant x_j, \ i, \ j = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, \ x_i > x_j, \ i, \ j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}.$$

Матрицы B и C можно проинтерпретировать в терминах бинарных отношений. Как известно, бинарное отношение A на конечном множестве $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ — это подмножество *декартова квадрата* $Q^2 = \{(q_m, q_n), m, n = 1, 2, \ldots, k\}$. При этом пара (q_m, q_n) входит в A тогда и только тогда, когда между q_m и q_n имеется рассматриваемое отношение.

Пусть некоторая характеристика измеряется у n объектов $q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем x_i — результат ее измерения у объекта q_i. Тогда матрицы B и C задают бинарные отношения на множестве объектов $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Поскольку бинарное отношение можно рассматривать как подмножество декартова квадрата $Q \times Q$, то любой матрице $D = ||d_{ij}||$ порядка $n \times n$ из 0 и 1 соответствует бинарное отношение $R(D)$, определяемое следующим образом: $(q_i, q_j) \in R(D)$тогда и только тогда, когда $d_{ij} = 1$.

Бинарное отношение $R(B)$ — отношение эквивалентности, т.е. симметричное рефлексивное транзитивное отношение. Оно задает разбиение Q на классы эквивалентности. Два объекта q_i и q_j входят в один класс эквивалентности тогда и только тогда, когда $x_i = x_j$, $b_{ij} = 1$.

Выше показано, как разбиения возникают в результате измерений в шкале наименований. Разбиения могут появляться и непосредственно. Так, при оценке качества промышленной продукции эксперты дают разбиение показателей качества на группы. Для изучения психологического состояния людей их просят разбить предъявленные рисунки на группы сходных между собой. Аналогичная методика применяется и в иных экспериментальных психологических исследованиях, необходимых для оптимизации управления персоналом.

Во многих задачах организационно-экономического моделирования разбиения получаются «на выходе» (например, в кластерном анализе) или же используются на промежуточных этапах анализа данных (например, сначала проводят классификацию с целью выделения однородных групп, а затем в каждой группе строят регрессионную зависимость).

Бинарное отношение $R(C)$ задает разбиение Q на классы эквивалентности, между которыми введено отношение строгого порядка. Два объекта q_i и q_j входят в один класс тогда и только тогда, когда $c_{ij}= 1$ и $c_{ji}= 1$, т.е. $x_i = x_j$. Класс эквивалентности Q_1 предшествует классу эквивалентности Q_2 тогда и только тогда, когда для любых $q_i \in Q_1$, $q_j \in Q_2$, имеем $c_{ij} = 1$, $c_{ji}= 0$, т.е. $x_i < x_j$. Такое бинарное отношение в статистике часто называют ранжировкой со связями; связанными считаются объекты, входящие в один класс эквивалентности. В литературе встречаются и другие названия: линейный квазипорядок, упорядочение, квазисерия, ранжирование. Мы предпочитаем термин «кластеризованная ранжировка» (см. главу 5 выше). Если каждый из классов эквивалентности состоит только из одного элемента, то имеем обычную ранжировку (другими словами, строгий линейный порядок).

Как известно, ранжировки возникают в результате измерений в порядковой шкале. Так, при описанном выше опросе ответ выпускника школы — это ранжировка (со связями) профессий по привлекательности. Ранжировки часто возникают и непосредственно, без промежуточного этапа — приписывания объектам квазичисловых оценок — баллов. Многочисленные примеры тому даны английским статистиком М. Кендэлом [11]. При оценке качества промышленной продукции широко применяемые нормативные и методические документы предусматривают использование ранжировок.

Для прикладных областей, кроме ранжировок и разбиений, представляют интерес толерантности, т.е. рефлексивные симметричные бинарные отношения. Толерантность — математическая модель для выражения представлений о сходстве (похожести, близости). Разбиения — частный вид толерантностей. Толерантность, обладающая свойством транзитивности — это разбиение. Однако в общем случае толерантность не обязана быть транзитивной. Толерантности появляются во многих постановках теории экспертных оценок, например, как результат парных сравнений (см. ниже).

Напомним, что любое бинарное отношение на конечном множестве может быть описано матрицей из 0 и 1.

Дихотомические (бинарные) данные. Это данные, которые могут принимать одно из двух значений (0 или 1), т.е. результаты измерений значений альтернативного признака. Как уже было показано, измерения в шкале наименований и порядковой шкале приводят к бинарным отношениям, а те могут быть выражены как результаты измерений по нескольким альтернативным признакам, соответствующим элементам матриц, описывающих отношения. Дихотомические данные возникают в прикладных исследованиях и многими иными путями.

В настоящее время в большинстве технических регламентов, стандартов, технических условий, договоров на поставку конкретной продукции предусмотрен контроль по альтернативному признаку. Это означает, что единица продукции относится к одной из двух категорий — «годных» или «дефектных», т.е. соответствующих или не соответствующих требованиям стандарта. Отечественными специалистами проведены обширные теоретические исследования проблем статистического приемочного контроля по альтернативному признаку. Основополагающими в этой области являются работы академика А.Н. Колмогорова. Подход советской вероятностно-статистической школы к проблемам контроля качества продукции отражен в монографиях [1, 14] (см. также главу 13 учебника [29]).

Дихотомические данные — давний объект математической статистики. Особенно большое применение они имеют в управленческих, экономических и социологических исследованиях, в которых большинство переменных, интересующих специалистов, измеряется по качественным шкалам. При этом дихотомические данные зачастую являются более адекватными, чем результаты измерений по методикам, использующим большее число градаций. В частности, психологические тесты типа MMPI (расшифровывается как Миннесотское многофакторное личностное исследование) используют только дихотомические данные. На них опираются и популярные в организационно-экономическом моделировании методы парных сравнений [5].

Элементарным актом в методе парных сравнений является предъявление эксперту для сравнения двух объектов (сравнение может проводиться также прибором). В одних постановках эксперт должен выбрать из двух объектов лучший по качеству, в других — ответить, похожи объекты или нет. В обоих случаях ответ эксперта можно выразить одной из двух цифр (меток) — 0 или 1. В первой постановке: 0, если лучшим объявлен первый объект; 1 — если второй. Во второй постановке: 0, если объекты похожи, схожи, близки; 1 — в противном случае.

Подводя итоги, можно сказать, что рассмотренные выше виды данные могут быть представлены в виде векторов из 0 и 1 (при обосновании этого утверждения используется тот очевидный факт, что матрицы могут быть записаны в виде векторов, строка за строкой). Более того, поскольку все мыслимые результаты наблюдений имеют лишь несколько значащих цифр, то, используя двоичную систему счисления, любые виды анализируемых статистическими методами данных можно записать в виде векторов конечной длины (размерности) из 0 и 1. Представляется, однако, что эта возможность в большинстве случаев имеет лишь академический интерес. Но во всяком случае можно констатировать, что анализ дихотомических данных необходим во многих прикладных постановках.

Множества. Совокупность X^n векторов $X = (x_1, x_2,\dots,x_n)$ из 0 и 1 размерности n находится во взаимно-однозначном соответствии с совокупностью 2^n всех подмножеств множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$. При этом вектору $X = (x_1, x_2,\dots,x_n)$ соответствует подмножество $N(X) \subseteq N$, состоящее из тех и только из тех i, для которых $x_i = 1$. Это объясняет, почему изложение вероятностных и статистических результатов, относящихся к анализу данных, являющихся объектами нечисловой природы перечисленных выше видов, можно вести на языке конечных случайных множеств, как это было сделано в монографии [19].

Множества как исходные данные появляются и в иных постановках. Из геологических задач исходил Ж. Матерон, из электротехнических — Н.Н. Ляшенко и др. Случайные множества применялись для описания процесса случайного распространения, например распространения информации, слухов, эпидемии или пожара, а также в математической экономике. В монографии [19] рассмотрены приложения случайных множеств в теории экспертных оценок и в теории управления запасами и ресурсами (логистике).

Отметим, что с точки зрения математики реальные объекты можно моделировать случайными множествами как из конечного числа элементов, так и из бесконечного, однако при расчетах на ЭВМ неизбежна дискретизация, т.е. переход к первой из названных возможностей.

Объекты нечисловой природы как статистические данные. В теории и практике статистических методов наиболее распространенный объект изучения и применения — выборка $x_1, x_2,\dots,x_n$, т.е. совокупность результатов n наблюдений (измерений, испытаний. анализов, опытов). В различных областях статистики результат наблюдения — это или число, или конечномерный вектор, или функция… Соответственно проводится, как уже отмечалось, деление прикладной статистики: одномерная статистика, многомерный статистический анализ, статистика временных рядов и случайных процессов… В нечисловой статистике (статистике нечисловых данных) в качестве результатов наблюдений рассматриваются объекты нечисловой природы. В частности, математические объекты перечисленных выше видов — измерения в шкалах, отличных от абсолютной, бинарные отношения, вектора из 0 и 1, множества. А также нечеткие множества, о которых речь пойдет ниже. Выборка может состоять из n ранжировок, или n толерантностей, или n множеств, или n нечетких множеств и т.д.

Отметим необходимость развития методов статистической обработки «разнотипных данных», обусловленную большой ролью в прикладных исследованиях «признаков смешанной природы». Речь идет о том, что результат наблюдения состояния объекта зачастую представляет собой вектор, у которого часть координат измерена по шкале наименований, часть — по порядковой шкале, часть — по шкале интервалов и т.д. Есть и более сложные модели разнотипных данных, например, когда некоторые координаты вектора наблюдений описываются нечеткими множествами. Классические статистические методы ориентированы обычно либо на абсолютную шкалу, либо на шкалу наименований (анализ таблиц сопряженности), а потому зачастую непригодны для обработки разнотипных данных. Поэтому в статистике нечисловых данных разработаны новые методы анализа разнотипных данных, о некоторых из которых рассказывается ниже.

Для обозначения перечисленных и им подобных неклассических результатов наблюдений в 1979 г. в монографии [19] предложен собирательный термин — объекты нечисловой природы. Термин «нечисловой» означает, что структура пространства, в котором лежат результаты наблюдений, не является структурой действительных чисел, векторов или функций, она вообще не является структурой линейного (векторного) пространства. В памяти компьютеров и при расчетах объекты нечисловой природы, разумеется, изображаются с помощью чисел, но эти числа нельзя складывать и умножать.

С целью «стандартизации математических орудий» (выражение группы французских математиков, действовавшей в середине XX в. под псевдонимом Н. Бурбаки) целесообразно разрабатывать методы статистического анализа данных, пригодные одновременно для всех перечисленных выше видов результатов наблюдений. Кроме того, в процессе развития теоретических и прикладных исследований выявляется необходимость использования новых видов объектов нечисловой природы, отличных от рассмотренных выше, например, в связи с развитием статистических методов обработки текстовой информации. Поэтому целесообразно ввести еще один вид объектов нечисловой природы — объекты произвольной природы, т.е. элементы множеств, на которые не наложено никаких условий (кроме «условий регулярности», необходимых для справедливости доказываемых теорем). Другими словами, в этом случае предполагается, что результаты наблюдений (элементы выборки) лежат в произвольном пространстве X. Для получения теорем необходимо потребовать, чтобы X удовлетворяло некоторым внутриматематическим условиям, например, было так называемым топологическим пространством. Как известно, ряд результатов классической математической статистики получен именно в такой постановке. Так, при изучении оценок максимального правдоподобия элементы выборки могут лежать в пространстве произвольной природы. Это не влияет на рассуждения, поскольку в них рассматривается лишь зависимость плотности вероятности от параметра. Методы классификации, использующие лишь расстояние между классифицируемыми объектами, могут применяться к совокупностям объектов произвольной природы, лишь бы в пространстве, где они лежат, была задана метрика (или мера близости, показатель различия). Цель нечисловой статистики (в некоторых литературных источниках используются термины «статистика нечисловых данных» и «статистика объектов нечисловой природы») состоит в том, чтобы систематически рассматривать методы статистической обработки данных как произвольной природы, так и относящихся к указанным выше конкретным видам объектов нечисловой природы, т.е. методы описания данных, оценивания и проверки гипотез. Взгляд с общей точки зрения позволяет получить новые результаты и в других областях прикладной статистики.

Объекты нечисловой природы при формировании организационно-экономической (статистической или математической) модели реального явления. Использование объектов нечисловой природы часто порождено желанием обрабатывать более объективную, более освобожденную от погрешностей информацию. Как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного например, сравнительного, характера, чем количественного. Так, ему легче сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах. Другими словами, использование объектов нечисловой природы — средство повысить устойчивость эконометрических и экономико-математических моделей реальных явлений по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. Сначала конкретные области статистики объектов нечисловой природы (а именно, прикладная теория измерений, нечеткие и случайные множества) были рассмотрены в монографии [19] при анализе частных постановок проблемы устойчивости математических моделей социально-экономических явлений и процессов к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. А затем была понята необходимость проведения работ по развитию статистики объектов нечисловой природы как самостоятельного научного направления.

Обсуждение начнем со шкал измерения. Науку о единстве мер и точности измерений называют метрологией. Таким образом, репрезентативная теория измерений — часть метрологии. Методы обработки данных должны быть адекватны относительно допустимых преобразований шкал измерения в смысле репрезентативной теории измерений. Однако установление типа шкалы, т.е. задание группы преобразований Ф — дело специалиста соответствующей прикладной области. Так, оценки привлекательности профессий мы считали измеренными в порядковой шкале [19]. Однако отдельные социологи не соглашались с этим, считая, что выпускники школ пользуются шкалой с более узкой группой допустимых преобразований, например, интервальной шкалой. Очевидно, эта проблема относится не к математике, а к наукам о человеке. Для ее решения может быть поставлен достаточно трудоемкий эксперимент. Пока же он не поставлен, целесообразно принимать порядковую шкалу, так как это гарантирует от возможных ошибок.

Необходимость использования в математических моделях реальных явлений таких объектов нечисловой природы, как бинарные отношения, множества, нечеткие множества, кратко была показана выше. Здесь же обратим внимание, что анализируемые в классической статистике результаты наблюдений также «не совсем числа». А именно, любая величина X измеряется всегда с некоторой погрешностью ΔX и результатом наблюдения является

$$Y = X + \Delta X.$$

Как уже отмечалось, погрешностями измерений занимается метрология. Отметим справедливость следующих фактов (в соответствующей вероятностно-статистической модели процесса измерения):

а) для большинства реальных измерений невозможно полностью исключить систематическую ошибку, т.е. $M(\Delta X) \neq 0$;

б) распределение ΔX в подавляющем большинстве случаев не является нормальным (см. [29] и главу 2 выше);

в) измеряемую величину X и погрешность ее измерения ΔX обычно нельзя считать независимыми случайными величинами;

г) распределение погрешностей оценивается по результатам специально проведенных измерений, следовательно, полностью известным считать его нельзя; зачастую исследователь располагает лишь границами для систематической погрешности и оценками таких характеристик случайной погрешности, как дисперсия или размах.

Приведенные факты показывают ограниченность области применимости распространенной модели погрешностей, в которой X и ΔX рассматриваются как независимые случайные величины, причем ΔX имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием.

Строго говоря, результаты наблюдения всегда имеют дискретное распределение, поскольку описываются числами, у которых немного значащих цифр (обычно от 1 до 5). Возникает дилемма: либо признать, что непрерывные распределения — внутриматематическая фикция, и прекратить ими пользоваться, либо считать, что непрерывные распределения имеют «реальные» величины X, которые наблюдаются с принципиально неустранимой погрешностью ΔX. Первый выход в настоящее время нецелесообразен, так как он требует отказа от большей части разработанного математического аппарата. Из второго следует необходимость изучения влияния неустранимых погрешностей на статистические выводы.

Погрешности ΔX можно учитывать либо с помощью вероятностной модели (ΔX — случайная величина, имеющая функцию распределения, вообще говоря, зависящую от X), либо с помощью нечетких множеств. Во втором случае приходим к теории нечетких чисел и к ее частному случаю — статистике интервальных данных [30, 31].

Другой источник появления погрешности ΔX связан с принятой в конструкторской и технологической документации системой допусков на контролируемые параметры изделий и деталей, с использованием шаблонов при проверке контроля качества продукции [17]. В этих случаях характеристики ΔX определяются не свойствами средств измерения, а применяемой технологией проектирования и производства. В терминах прикладной статистики сказанному соответствует группировка данных, при которой мы знаем, какому из заданных интервалов принадлежит наблюдение, но не знаем точного значения результата наблюдения. Применение группировки может дать экономический эффект, поскольку зачастую легче (в среднем) установить, к какому интервалу относится результат наблюдения, чем точно измерить его.

Объекты нечисловой природы как результат статистической обработки данных. Объекты нечисловой природы появляются не только на «входе» статистической процедуры, но и в процессе обработки данных, и на «выходе» в качестве итога статистического анализа.

Рассмотрим простейшую прикладную постановку задачи регрессии (см. также главу 3 выше). Исходные данные имеют вид () $(x_i, y_i) \in R^2$, $= 1, 2, \ldots, n$. Цель состоит в том, чтобы с достаточной точностью описать y как многочлен (полином) от x, т.е. модель имеет вид

$$y_i = \sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.2}$$

где m — неизвестная степень полинома; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ — неизвестные коэффициенты многочлена; ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — погрешности, которые для простоты примем независимыми и имеющими одно и то же нормальное распределение.

Здесь наглядно проявляется одна из причин живучести статистических моделей на основе нормального распределения. Такие модели, хотя и, как правило, не адекватны реальной ситуации [29], но с математической точки зрения позволяет проникнуть глубже в суть изучаемого явления. Поэтому они пригодны для первоначального анализа ситуации, как и в рассматриваемом случае. Дальнейшие научные исследования должны быть направлены на снятие нереалистического предположения нормальности и переход к непараметрическим моделям погрешности.

Распространенная процедура восстановления зависимости с помощью многочлена такова: сначала пытаются применить модель (7.2) для линейной функции ($m = 1$), при неудаче (неадекватности модели) переходят к многочлену второго порядка ($m = 2$), если снова неудача, то берут модель (7.2) с $m = 3$ и т.д. (адекватность модели проверяют по F-критерию Фишера).

Обсудим свойства этой процедуры в терминах прикладной статистики. Если степень полинома задана ($m = m_0$), то его коэффициенты оценивают методом наименьших квадратов, свойства этих оценок хорошо известны (см., например, главу 3 или монографию [10, гл.26]). Однако в описанной выше реальной постановке m тоже является неизвестным параметром и подлежит оценке. Таким образом, требуется оценить объект $(m, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, множество значений которого можно описать как $R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$. Это — объект нечисловой природы, обычные методы оценивания для него неприменимы, так как m — дискретный параметр. В рассматриваемой постановке разработанные к настоящему времени методы оценивания степени полинома носят в основном эвристический характер (см., например, гл. 12 монографии [36]). Свойства описанной выше распространенной процедуры рассмотрены выше в главе 3. Показано, что обычно используемыми методами степень полинома m оценивается несостоятельно, и найдено предельное распределение оценок этого параметра, оказавшееся геометрическим. Отметим, что для степени многочлена давно предложены состоятельные оценки [26].

В более общем случае линейной регрессии данные имеют вид (y_i, X_i), $= 1, 2, \ldots, n$, где $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iN}) \in R^N$ — вектор предикторов (факторов, объясняющих переменных), а модель такова:

$$y_i = \sum_{j \in K} a_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7.3}$$

(здесь K — некоторое подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$; ε_i- те же, что и в модели (7.2); a_j — неизвестные коэффициенты при предикторах с номерами из K). Модель (7.2) сводится к модели (7.3), если

$$x_{i1} = 1,\ x_{i2} = x_i,\ x_{i3} = x_i^2,\ x_{i4} = x_i^3, \ldots, x_{ij} = x_i^{j-1}, \ldots$$

В модели (7.2) есть естественный порядок ввода предикторов в рассмотрение — в соответствии с возрастанием степени, а в модели (7.3) естественного порядка нет, поэтому здесь стоит произвольное подмножество множества предикторов. Есть только частичный порядок — чем мощность подмножества меньше, тем лучше. Модель (7.3) особенно актуальна в организационно-экономических и технических исследованиях (см. многочисленные примеры в журнале «Заводская лаборатория»). Она применяется в задачах управления качеством продукции и других технико-экономических исследованиях, в медицине, экономике, маркетинге и социологии, когда из большого числа факторов, предположительно влияющих на изучаемую переменную, надо отобрать по возможности наименьшее число значимых факторов и с их помощью сконструировать прогнозирующую формулу (7.3).

Задача оценивания модели (7.3) разбивается на две последовательные задачи: оценивание множества K — подмножества множества всех предикторов, а затем — неизвестных параметров a_j. Методы решения второй задачи хорошо известны и подробно изучены (обычно используют метод наименьших квадратов). Гораздо хуже обстоит дело с оцениванием объекта нечисловой природы K. Как уже отмечалось, существующие методы — в основном эвристические, они зачастую не являются даже состоятельными. Даже само понятие состоятельности в данном случае требует специального определения. Пусть K_0 — истинное подмножество предикторов, т.е. подмножество, для которого справедлива модель (7.3), а подмножество предикторов K_n — его оценка. Оценка K_n называется состоятельной, если

$$\lim_{n\to\infty} Card(K_n \Delta K_0) = 0 ,$$

где Δ — символ симметрической разности множеств; $Card(K)$ означает число элементов множества K, а предел понимается в смысле сходимости по вероятности.

Итак, задача оценивания в моделях регрессии, таким образом, разбивается на две — оценивание структуры модели и оценивание параметров при заданной структуре. В модели (7.2) структура описывается неотрицательным целым числом m, в модели (7.3) — множеством K. Структура — объект нечисловой природы. Задача ее оценивания сложна, в то время как задача оценивания численных параметров при заданной структуре хорошо изучена, разработаны эффективные (в смысле прикладной математической статистики) методы.

Такова же ситуация и в других методах многомерного статистического анализа — в факторном анализе (включая метод главных компонент) и в многомерном шкалировании, в иных оптимизационных постановках проблем прикладного многомерного статистического анализа.

Продолжим рассмотрение объектов нечисловой природы на «выходе» статистической процедуры. Примеры многочисленны.

Разбиения — итог работы многих алгоритмов классификации, в частности, алгоритмов кластер-анализа. Ранжировки — результат упорядочения профессий по привлекательности или автоматизированной обработки мнений экспертов — членов комиссии по подведению итогов конкурса научных работ. (В последнем случае используются кластеризованные ранжировки; так, в одну группу, наиболее многочисленную, попадают работы, не получившие наград.) Из всех объектов нечисловой природы, видимо, наиболее часты на «выходе» дихотомические данные — принять или не принять гипотезу, в частности, принять или забраковать партию продукции. Результатом статистической обработки данных может быть множество, например зона наибольшего поражения при аварии, или последовательность множеств, например, «среднемерное» описание распространения пожара (см. главу 4 в монографии [19]).

Неопределенность реальных явлений и процессов описывают с помощью математического аппарата теории нечеткости [21]. Нечетким множеством французский математик Э. Борель еще в начале XX в. предлагал описывать представление людей о числе зерен, образующем «кучу» [2]. С помощью нечетких множеств формализуются значения лингвистических переменных, выступающих как итоговая оценка качества систем автоматизированного проектирования, сельскохозяйственных машин, бытовых газовых плит, надежности программного обеспечения или систем управления.

Можно констатировать, что все виды объектов нечисловой природы могут появляться как «на входе», так и «на выходе» организационно-экономического исследования.

7.3. Вероятностные модели порождения нечисловых данных

Рассмотрим основные вероятностные модели порождения нечисловых данных. А именно, дихотомических данных, результатов парных сравнений, бинарных отношений, рангов, объектов общей природы. Обсудим различные варианты вероятностных моделей и их практическое использование (см. также обзор [27]).

Дихотомические данные. Рассмотрим базовую вероятностную модель дихотомических данных — *бернуллиевский вектор* (в терминологии энциклопедии [3] — *люсиан*), т.е. конечную последовательность $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ независимых испытаний Бернулли X_i, для которых $P(X_i = 1) = p_i$ и $P(X_i = 0) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, причем вероятности p_i могут быть различны.

Бернуллиевские вектора часто применяются при практическом использовании эконометрических методов. Так, они использованы в монографии [19] для описания равномерно распределенных случайных толерантностей. Как известно, толерантность на множестве из m элементов можно задать симметричной матрицей $||\delta_{ij}||$ из 0 и 1, на главной диагонали которой стоят 1. Тогда случайная толерантность описывается распределением $m(m - 1)/2$ дихотомических случайных величин δ_{ij} $1 \leqslant i < j \leqslant m$, а для равномерно распределенной (на множестве всех толерантностей) толерантности эти случайные величины, как можно доказать, являются независимыми и принимают значения 0 и 1 с равными вероятностями 1/2. Записав элементы δ_{ij} задающей такую толерантность матрицы в строку, получим бернуллиевский вектор с $k = m(m - 1)/2$ и $p_i = 1/2$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

В связи с оцениванием по статистическим данным функции принадлежности нечеткой толерантности в 70-е годы была построена теория случайных толерантностей с такими независимыми δ_{ij} что вероятности $P(\delta_{ij} = 1) = p_{ij}$ произвольны [19]. Случайные множества с независимыми элементами использовались как общий язык для описания парных сравнений и случайных толерантностей. В некоторых публикациях термин «люсиан» применялся как сокращение для выражения «случайные множества с независимыми элементами».

Был выявлен ряд областей, в которых полезен математический аппарат решения различных статистических задач, связанных с бернуллиевскими векторами. Перечислим эти области, включая ранее названные:

— анализ случайных толерантностей;

— случайные множества с независимыми элементами;

— обработка результатов независимых парных сравнений;
— статистические методы анализа точности и стабильности технологического процесса,
— анализ и синтез планов статистического приемочного контроля (по альтернативным, т.е. дихотомическим, признакам);
— обработка маркетинговых и социологических анкет (с закрытыми вопросами типа «да» — «нет»);
— обработка социально-психологических и медицинских данных, в частности, ответов на психологические тесты типа MMPI (используемых в задачах управления персоналом),
— анализ топографических карт (применяемых для анализа и прогноза зон поражения при технологических авариях, распространении коррозии, заболеваниях (таких, как инфаркт миокарда), распространении экологически вредных загрязнений и в других ситуациях), и т.д.

Теорию бернуллиевских векторов можно выразить в терминах любой из этих теоретических и прикладных областей. Однако терминология одной из этих областей «режет слух» и приводит к недоразумениям в другой из них. Поэтому целесообразно использовать термин «бернуллиевский вектор» в указанном выше значении, не связанном ни с какой из перечисленных областей приложения этой теории (в ряде публикаций в том же значении использовался термин «люсиан»).

Распределение бернуллиевского вектора X полностью описывается векторным параметром $P = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, т.е. нечетким подмножеством множества $\{1, 2, \ldots, k\}$. Действительно, для любого детерминированного вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ из 0 и 1 имеем

$$P(X = x) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} h(x_j, p_j),$$

где $h(x, p) = p$ при $x = 1$ и $h(x, p) = 1 - p$ при $x = 0$.

Теперь можно уточнить способы использования люсианов в прикладной статистике. Бернуллиевскими векторами можно моделировать:

— результаты статистического контроля (0 — годное изделие, 1 — дефектное);

— результаты маркетинговых и социологических опросов (0 — опрашиваемый выбрал первую из двух подсказок, 1 — вторую);

— распределение посторонних включений в материале (0 — нет включения в определенном объеме материала, 1 — есть);

— результаты испытаний и анализов (0 — нет нарушений требований нормативно-технической документации, 1 — есть такие нарушения);

— результаты аудита [40] (0 — нет нарушений нормативных требовании в конкретном документе бухгалтерского учета, 1 — обнаружено хотя бы одно нарушение);

— процессы распространения, например, пожаров (0 — нет загорания, 1 — есть; подробнее см. [19, с.215–223]);

— состояние технологического процесса (0 — процесс находится в границах допуска, 1 — вышел из них);

— ответы экспертов (опрашиваемых) о сходстве объектов (проектов, образцов), и т.д.

Парные сравнения. Общую модель парных сравнений опишем согласно монографии Г. Дэвида [5, с.9]. Предположим, что t объектов $A_1, A_2, \ldots, A_t$ сравниваются попарно каждым из n экспертов. Всего возможных пар для сравнения имеется $s = (t - 1)/2$. Эксперт с номером γ делает r_y повторных сравнений для каждой из s возможностей. Пусть $X(i, j, \gamma, \delta)$, $i, j = 1, 2, \ldots, t$, $i \neq j$, $\gamma = 1, 2, \ldots, n$; $\delta = 1, 2, \ldots, r_\gamma$, — случайная величина, принимающая значение 1 или 0 в зависимости от того, предпочитает ли эксперт с номером γ объект A_i или объект A_j в δ -м сравнении двух объектов. Предполагается, что все сравнения проводятся независимо друг от друга, так что случайные величины $X(i, j, \gamma, \delta)$ независимы в совокупности, если не считать того, что $X(i, j, \gamma, \delta) + X(j, i, \gamma, \delta) = 1$. Положим

$$P(X(i, j, \gamma, \delta) = 1) = \pi(i, j, \gamma, \delta).$$

Ясно, что описанная модель парных сравнений представляет собой частный случай бернуллиевского вектора. В этой модели число наблюдений равно числу неизвестных параметров, поэтому для получения статистических выводов необходимо наложить априорные условия на вероятности $\pi(i, j, \gamma, \delta)$, например, как в [5, с.9]:

$\pi(i, j, \gamma, \delta) = \pi(i, j, \gamma)$ (нет эффекта от повторений);

$\pi(i, j, \gamma, \delta) = \pi(i, j)$ (нет эффекта от повторений и от экспертов).

Теорию независимых парных сравнений целесообразно разделить на две части — непараметрическую, в которой статистические задачи ставятся непосредственно в терминах $\pi(i, j, \gamma, \delta)$, и параметрическую, в которой вероятности $\pi(i, j, \gamma, \delta)$ выражаются через меньшее число иных параметров. Ряд результатов непараметрической теории парных сравнений (см., например, [30, гл.11], [31]) непосредственно вытекает из теории бернуллиевских векторов.

В параметрической теории парных сравнений наиболее популярна так называемая линейная модель [5, с.11], в которой предполагается, что каждому объекту A_i можно сопоставить некоторую «ценность» V_i так, что вероятность предпочтения $\pi(i, j)$ (т.е. предполагается дополнительно, что эффект от повторений и от экспертов отсутствует) выражается следующим образом:

$$\pi(i, j) = H(V_i - V_j) \tag{7.4}$$

где $H(x)$ — функция распределения, симметричная относительно 0, т.е.

$$H(-x) = 1 - H(-x) \tag{7.5}$$

при всех x.

Широко применяются модели Терстоуна — Мостеллера и Брэдли — Терри, в которых $H(x)$ — соответственно функции нормального и логистического распределений. Поскольку функция $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1 и функция

$$\Psi(x) = (1 + e^x)^{-1}$$

стандартного логистического распределения удовлетворяют (см., например, [24]) соотношению

$$\sup_{x \in R^1} |\Phi(x) - \Psi(1,7x)| < 0,01,$$

то, как можно показать [29, гл.4], для обоснованного выбора по статистическим данным между моделями Терстоуна-Мостеллера и Брэдли-Терри необходимо не менее тысячи наблюдений.

Соотношение (7.4) вытекает из следующей модели поведения эксперта: он измеряет «ценность» V_i и V_j объектов A_i и A_j, но с ошибками ε_i и ε_j соответственно, а затем сравнивает свои оценки ценности объектов $y_i = V_i + \varepsilon_i$ и $y_j = V_j + \varepsilon_j$. Если $y_i > y_j$, то он предпочитает A_i, в противном случае — A_j. Тогда

$$\pi(i, j) = P(\varepsilon_i - \varepsilon_j < V_i - V_j) = H(V_i - V_j) \tag{7.6}$$

Обычно предполагают, что субъективные ошибки эксперта ε_i и ε_j независимы и имеют одно и то же непрерывное распределение. Тогда функция распределения $H(x)$ из соотношения (7.6) непрерывна и удовлетворяет функциональному уравнению (7.5).

Существует много разновидностей моделей парных сравнений, постоянно предполагаются новые. В качестве примера опишем модель парных сравнений, основанную не на процедуре упорядочения, а на определении сходства объектов. Пусть каждому объекту A_i соответствует точка a_i в r-мерном евклидовом пространстве R^r. Эксперт «измеряет» a_i и a_j с ошибками ε_i и ε_j соответственно и в случае, если евклидово расстояние между $a_i + \varepsilon_i$ и $a_i + \varepsilon_j$ меньше 1, заявляет о сходстве объектов A_i и A_j, в противном случае — об их различии. Предполагается, что ошибки ε_i и ε_j независимы и имеют одно и то же распределение, например, круговое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией координат σ^2. Целью статистической обработки является определение по результатам парных сравнений оценок параметров $a_1, a_2, \dots, a_r$, и σ^2, а также проверка согласия опытных данных с моделью.

Множественные сравнения. Рассмотренные модели парных сравнений могут быть обобщены в различных направлениях. Так, можно ввести понятие «ничья» — ситуации, когда эксперт оценивает объекты одинаково. Модели с учетом «ничьих» предполагают, что эксперт может отказаться от выбора одного из объектов и заявить об их эквивалентности, т.е. число возможных ответов увеличивается с 2 до 3. В моделях множественных сравнений эксперту представляется не два объекта, а три или большее число

Модели, учитывающие «ничьи», строятся обычно с помощью используемых в психофизике «порогов чувствительности»: если $|y_i - y_j| \leqslant r$ (где r — порог чувствительности), то объекты A_i и A_j эксперт объявляет неразличимыми. Приведем пример модели с «ничьими», основанной на другом принципе. Пусть каждому объекту A_i соответствует точка a_i в r-мерном линейном пространстве. Как и прежде, эксперт «измеряет» «объектные точки» a_i и a_j с ошибками ε_i и ε_j соответственно, т.е. принимает решение на основе $y_i = a_i + \varepsilon_i$ и $y_j = a_j + \varepsilon_j$. Если все координаты y_i больше соответствующих координат y_j, то A_i предпочитается A_j. Соответственно, если каждая координата y_i меньше координаты y_j с тем же номером, то эксперт считает наилучшим объект A_j. Во всех остальных случаях эксперт объявляет о ничейной ситуации. Эта модель при $r = 1$ переходит в описанную выше линейную модель. Она связана с принципом Парето в теории группового выбора и предусматривает выбор оптимального по Парето объекта, если он существует (роль согласуемых критериев играют процедуры сравнения значений отдельных координат), и отказ от выбора, если такого объекта нет.

Можно строить модели, учитывающие порядок предъявления объектов при сравнении, зависимость результата сравнения от результатов предшествующих сравнений. Опишем одну из подобных моделей.

Пусть эксперт сравнивает три объекта — A, B, C, причем сначала сравниваются A и B, потом — B и C и, наконец, A и C. Для определенности пусть $A > B$ будет означать, что A более предпочтителен, чем B. Пусть при предъявлении двух объектов

$$(A > B) = \pi_{AB},\ P(B > C) = \pi_{BC},\ P(A > C) = \pi_{AC}.$$

Теперь пусть пара *B, C* предъявляется после пары *A, B*. Естественно предположить, что высокая оценка *B* в первом сравнении повышает вероятность предпочтения *B* и во втором, и, наоборот, отрицательное мнение о *B* в первом сравнении сохраняется и при проведении второго сравнения. Это предположение проще всего учесть в модели следующим образом:

$$P(B > C \mid B > A) = \pi_{BC} + \delta,\ P(B > C \mid A > B) = \pi_{BC} + \delta,$$

где δ — некоторое положительное число, показывающее степень влияния первого сравнения на второе. По аналогичным причинам вероятности исхода третьего сравнения в зависимости от результатов первых двух можно описать так:

$$P(A > C \mid A > B, B > C) =$$
$$= \pi_{AC} + 2\delta,\ P(A > C \mid A > B, B < C) = \pi_{AC},$$

$$P(A > C \mid A < B, B > C) =$$
$$= \pi_{AC},\ P(A > C \mid A < B, B < C) = \pi_{AC} - 2\delta.$$

Статистическая задача состоит в определении параметров π_{AB} π_{BC}, π_{AC} и δ по результатам сравнений, проведенных *n* экспертами, и в проверке адекватности модели.

Ясно, что можно рассматривать и другие модели, в частности, учитывающие тягу экспертов к транзитивности ответов. Очевидно, что проблемы построения моделей парных и множественных сравнений относятся не к нечисловой статистике, а к тем прикладным областям организационно-экономического моделирования, для решения задач которых развиваются методы парных сравнений, например, к организации машиностроительного производства, экономике предприятия, стратегическому менеджменту, производственной психологии, изучению поведения потребителей, экспертным оценкам и т. д.

Вероятностно-статистические методы и модели парных сравнений. Метод парных сравнений был введен в 1860 г. Г.Т. Фехнером для решения задач психофизики. Расскажем об этом несколько подробнее. Как известно, основателем психофизики по праву считается Густав Теодор Фехнер (1801– 1887), а год выхода в свет его фундаментальной работы «Элементы психофизики» (1860) — датой рождения новой науки. В этой работе широко применялся предложенный Г.Т. Фехнером метод парных сравнений (обсуждение событий тех лет с современных позиций дано в монографии [5, с.14–16]).

С точки зрения математической статистики приведенные выше модели не представляют большого теоретического интереса: оценки параметров находятся обычно методом максимального правдоподобия или асимптотически эквивалентным ему методом одношаговых оценок [30, гл.6], а проверка согласия проводится по критерию отношения правдоподобия или асимптотически эквивалентными ему критериями типа хи-квадрат [5]. При этом вычислительные процедуры обычно достаточно сложны и плохо исследованы.

Отметим некоторые сложности при обосновании возможности использовании линейных моделей типа (7.4) — (7.6). Вероятностно-статистическая теория достаточно проста, когда предполагается, что каждому отдельному сравнению двух объектов соответствуют свои собственные ошибки экспертов, причем все ошибки независимы в совокупности. Однако это предположение отнюдь не очевидно с содержательной точки зрения. В качестве примера рассмотрим три объекта *A, B* и *C*, которые сравнивают попарно: *A* и *B*, *B* и *C*, *A* и *C*. В соответствии со сказанным, в рассмотрение вводят 6 ошибок одного и того же эксперта: ε_A и ε_B в первом сравнении, ε'_A ε'_B и ε_C — во втором, ε'_A и ε'_C — в третьем, причем все эти 6 случайных величин независимы в совокупности. Между тем естественно думать, что мнения эксперта об одном и том же объекте связаны между собой. То есть ε_A и ε'_A зависимы, равно как ε_B и ε'_B, а также ε_C и ε'_C. Более того, если принять, что точка зрения эксперта полностью определена для него самого, то следует положить $\varepsilon_A = \varepsilon'_A$ и соответственно $\varepsilon_B = \varepsilon'_B$ и $\varepsilon_C = \varepsilon'_C$. При этом, напомним, случайные величины ε_A, ε_B и др. интерпретируется как отклонения мнений отдельных экспертов от истины. Видимо, ошибку эксперта целесообразно считать состоящей из двух слагаемых, а именно: отклонения от истины, вызванного внутренними особенностями эксперта (систематическая погрешность) и колебания мнения эксперта в связи с очередным парным сравнением (случайная погрешность). Игнорирование систематической погрешности облегчает развитие математико-статистической теории, а ее учет приводит к необходимости изучения зависимых парных сравнений.

При обработке результатов парных сравнений первый этап — проверка согласованности. Понятие согласованности уточняется различными способами, но все они имеют один и тот же смысл проверки однородности обрабатываемого материала, т.е. того, что целесообразно агрегировать мнения отдельных экспертов, объединить данные и совместно их обрабатывать. При отсутствии однородности данные разбиваются на группы (классы, кластеры, таксоны) с целью обеспечения однородности внутри отдельных групп. Естественно, согласованность целесообразно проверять, вводя возможно меньше гипотез о структуре данных. Следовательно, целесообразно пользоваться для этого непараметрической теорией парных сравнений, основанной на теории бернуллиевских векторов.

Хорошо известно, что модели парных сравнений с успехом применяются в экспертных и экспериментальных процедурах упорядочивания и выбора. В частности, для анализа голосований, турниров, выбора наилучшего объекта (проекта, образца, кандидатуры); в планировании и анализе сравнительных экспериментов и испытаний; в органолептической экспертизе (в частности, дегустации); при изучении поведения потребителей; визуальной колоритмии (принятии решений на основе цвета), определении индивидуальных рейтингов и вообще изучении предпочтений при выборе и т. д. (подробнее см. [5, 19]).

Бинарные отношения. Еще в начале XX в. был развит один из первых разделов непараметрической статистики — теория ранговой корреляции. Ее можно рассматривать как теорию статистического анализа случайных ранжировок, равномерно распределенных на множестве всех ранжировок. Так, при обработке данных классического психофизического эксперимента по упорядочению кубиков соответственно их весу, подробно описанного в работе [39], оказалась адекватной следующая т.н. T-модель ранжирования.

Пусть имеется t объектов A_1, A_2, ..., A_t причем каждому объекту A_i соответствует число a_i, описывающее его положение на шкале изучаемого признака. Испытуемый упорядочивает объекты так, как если бы оценивал соответствующие им значения с ошибками, т.е. находил $y_i = a_i + \varepsilon_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, где ε_i — ошибка при рассмотрении i-го объекта, а затем располагал бы объекты в том порядке, в каком располагаются $y_1, y_2, \ldots, y_t$. В этом случае вероятность появления упорядочения $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{it}$ есть $P(y_{i1} < y_{i2} < \ldots < y_{it})$ а ранги $R_1, R_2, \ldots, R_t$ объектов являются рангами случайных величин $y_1, y_2, \ldots, y_t$, полученными при их упорядочении в порядке возрастания. Кроме того, для простоты расчетов в модели предполагается, что ошибки испытуемого $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$ независимы и имеют нормальное распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2.

Как уже отмечалось, бинарное отношение на множестве из t элементов полностью описывается матрицей из 0 и 1 порядка $t \times t$. Поэтому задать распределение случайного бинарного отношения — это то же самое, что задать распределение вероятностей на множестве всех матриц описанного вида, состоящем из $2^{(t^2)}$ элементов. Пространства ранжировок, разбиений, толерантностей зачастую удобно считать подпространствами пространства всех бинарных отношений, тогда распределения вероятностей на них — частные случаи описанного выше распределения, выделенные тем, что вероятности принадлежности случайного бинарного отношения соответствующим подпространствам равны 1. Распределение произвольного бинарного отношения описывается $2^{(t^2)}$ — 1 параметрами, распределение случайной ранжировки (без связей) — ($t!$ — 1) параметрами, а описанная выше T-модель ранжирования задается (t + 1) параметром. При $t = 4$ эти числа равны соответственно 65535, 23 и 5. Первое из этих чисел показывает сложность, а иногда и невозможность использования произвольных бинарных отношений в предназначенных для практического использования вероятностно-статистических моделях, поскольку по имеющимся данным невозможно оценить столь большое число параметров. Приходится ограничиваться теми или иными семействами бинарных отношений — ранжировками, разбиениями, толерантностями и др. Модель произвольной случайной ранжировки при $t = 5$ описывается 119 параметрами, при $t = 6$ — уже 719 параметрами, при $t = 7$ число параметром достигает 5049, что уже явно за пределами возможности оценивания. В то же время T-модель ранжирования при $t = 7$ описывается всего 8-ю параметрами, а потому может быть кандидатом для практического использования.

Что естественно предположить относительно распределения случайного элемента со значениями в том или ином пространстве бинарных отношений? Зачастую целесообразно считать, что распределение имеет некий центр, попадание в который наиболее вероятно, а по мере удаления от центра вероятности убывают. Это соответствует естественной модели измерения с ошибкой. В классическом одномерном случае результат подобного измерения обычно описывается унимодальной симметричной плотностью, монотонно возрастающей слева от модального значения, в котором плотность максимальна, и монотонно убывающей справа от него. Чтобы ввести понятие монотонного распределения в пространстве бинарных отношений, будем исходить из метрики в этом пространстве. Воспользовавшись тем, что бинарные отношения C и D однозначно описываются матрицами $||c_{ij}||$ и $||d_{ij}||$ порядка $t \times t$, рассмотрим расстояние (в несколько другой терминологии — метрику) в пространстве бинарных отношений

$$d(C,D) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant t} | c_{ij} - d_{ij} |. \tag{7.7}$$

Метрика (7.7) в различных пространствах бинарных отношений — ранжировок, разбиений, толерантностей — может быть введена с помощью соответствующих систем аксиом (см. ниже). В настоящее время метрику (7.7) обычно называют расстоянием Кемени в честь американского исследователя Джона Кемени, впервые получившего эту метрику исходя из предложенной им системы аксиом для расстояния между упорядочениями (ранжировками).

В статистике нечисловых данных применяются и иные метрики, отличающиеся от расстояния Кемени. Более того, для использования понятия монотонного распределения, о котором сейчас идет речь, нет необходимости требовать выполнения неравенства треугольника, а достаточно, чтобы $d(C,D)$ можно было рассматривать как показатель различия. Под показателем различия понимаем такую функцию $d(C, D)$ двух бинарных отношений C и D, что $d(C, D) = 0$ при $C = D$ и увеличение $d(C, D)$ интерпретируется как возрастание различия между C и D.

Определение 1. Распределение бинарного отношения X называется монотонным с центром в C_0 относительно расстояния (показателя различия) d, если из $d(C, C_0) < d(D, C_0)$ следует, что $P(X = C) > P(X = D)$.

Это определение впервые введено в монографии [19, с.196]. Оно может использоваться в любых пространствах бинарных отношений и, более того, в любых пространствах из конечного числа элементов, лишь бы в них была введена функция $d(C, D)$ — показатель различия элементов C и D этого пространства. Монотонное распределение унимодально, мода находится в C_0.

Определение 2. Распределение бинарного отношения X называется симметричным относительно расстояния d с центром в C_0, если существует такая функция $f : R_+^1 \to [0,1]$, что

$$P(X = C) = f(d(C, C_0)) \qquad (7.8)$$

Если распределение X монотонно и таково, что из $d(C, C_0) = d(D, C_0)$ следует $P(X = C) = P(X = D)$, то оно симметрично. Если функция f в формуле (7.8) монотонно строго убывает, то соответствующее распределение монотонно в смысле определения 1.

Поскольку толерантность на множестве из t элементов задается $0{,}5t(t - 1)$ элементами матрицы из 0 и 1 порядка $t \times t$, лежащими выше главной диагонали, то всего толерантностей имеется $2^{0,5t(t-1)}$, а потому распределение на множестве толерантностей задается в общем случае $2^{0,5t(t-1)} - 1$ параметрами. Естественно выделить семейство распределений, соответствующее независимым элементам матрицы. Оно задается бернуллиевским вектором (люсианом) с $0{,}5t(t - 1)$ параметрами (выше бернуллиевские вектора рассмотрены подробнее). Математическая техника, необходимая для изучения толерантностей с независимыми элементами, существенно проще, чем в случае ранжировок и разбиений. Здесь легко отказаться от условия равномерности распределения. Этому условию соответствует $p_{ij} \equiv 1/2$, в то время как статистические методы анализа люсианов, развитые в статистике нечисловых данных (см., например, работы [19, 20, 22]) не налагают никаких существенных ограничений на p_{ij} .

Как уже отмечалось, при обработке мнений экспертов сначала проверяют согласованность. В частности, если мнения экспертов описываются монотонными распределениями, то для согласованности необходимо совпадение центров этих распределений. К сожалению, рассмотренные выше классические методы проверки согласованности для ранжировок, основанные на коэффициентах ранговой корреляции и конкордации, позволяют лишь отвергнуть гипотезу о равнораспределенности. Но не установить, можно ли считать, что центры соответствующих экспертам распределений совпадают, или же, например, существует две группы экспертов, каждая со своим центром. Теория случайных толерантностей лишена этого недостатка. Отсюда вытекают следующие практические рекомендации.

Пусть цель обработки экспертных данных состоит в получении ранжировки, отражающей групповое мнение. Однако согласно рекомендуемой процедуре экспертного опроса пусть эксперты не упорядочивают объекты, а проводят парные сравнения, сравнивая каждый из рассматриваемых объектов со всеми остальными, причем ровно один раз. Тогда ответ эксперта — толерантность, но, вообще говоря, не ранжировка, поскольку в ответах эксперта может нарушаться транзитивность.

Возможны два пути обработки данных. Первый — превратить ответ эксперта в ранжировку (тем или иным способом «спроектировав» его на пространство ранжировок), а затем проверять согласованность ранжировок с помощью известных критериев. При этом от толерантности перейти к ранжировке можно, например, так. Будем выбирать ближайшую (в смысле применяемого расстояния) матрицу к матрице ответов эксперта из всех, соответствующих ранжировкам без связей.

Второй путь — проверить согласованность случайных толерантностей, а групповое мнение искать с помощью медианы Кемени (подробнее см. ниже) непосредственно по исходным данным, т.е. по толерантностям. Групповое мнение при этом может быть найдено в пространстве ранжировок. Второй путь мы считаем более предпочтительным, поскольку при этом обеспечивается более адекватная проверка согласованности и исключается процедура укладывания мнения эксперта в «прокрустово ложе» ранжировки (эта процедура может приводить как к потере информации, так и к принципиально неверным выводам, вызванным искажениями мнений экспертов).

Области применения статистики бинарных отношений многообразны: ранговая корреляция — оценка величины связи между переменными, измеренными в порядковой шкале; анализ экспертных или экспериментальных упорядочений; анализ разбиений технико-экономических показателей на группы сходных между собой; обработка данных о сходстве (взаимозаменяемости); статистический анализ классификаций; математические вопросы теории менеджмента и др.

Случайные множества. Будем рассматривать случайные подмножества некоторого множества Q. Если Q состоит из конечного числа элементов, то считаем, что случайное подмножество S — это случайный элемент со значениями в 2^Q — множестве всех подмножеств множества Q, состоящем из $2^{card(Q)}$ элементов. Чтобы удовлетворить математиков, считаем, что все подмножества Q измеримы (другими словами, σ-алгебра измеримых множеств совпадает с совокупностью всех подмножеств рассматриваемого конечного множества). Тогда распределение случайного подмножества $S = S(\omega)$ множества Q — это

$$P_S(A) = P(S = A) = P(\{\omega : S(\omega) = A\}), A \subseteq Q. \qquad (7.9)$$

В формуле (7.9) предполагается, что $S : \Omega \to 2^Q$ где (Ω, F, P) — вероятностное пространство, на котором определен случайный элемент $S(\omega)$. (Здесь Ω — пространство элементарных событий, F — σ-алгебра случайных событий, P — вероятностная мера на F.) Через распределение $P_S(A)$ выражаются вероятности различных событий, связанных с S. Так, чтобы найти вероятность накрытия фиксированного элемента q случайным множеством S, достаточно вычислить

$$P(q \in S) = \mathrm{P}(\{\omega : q \in S(\omega)\}) = \sum_{A: q \in A, A \subseteq 2^Q} P(S = A),$$

где суммирование идет по всем подмножествам A множества Q, содержащим q. Пусть $Q=\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$. Рассмотрим случайные величины (значения характеристической функции случайного множества), определяемые по случайному множеству S следующим образом

$$\chi_i(\omega) = \begin{cases} 1, q_i \in S(\omega), \\ 0, q_i \notin S(\omega). \end{cases}$$

Определение 3. Случайное множество S называется случайным множеством с независимыми элементами, если случайные величины $\chi_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, k$ независимы (в совокупности).

Последовательность случайных величин $\chi_1, \chi_1, \dots, \chi_k$ — это бернуллиевский вектор с $X_i = \chi_i$ и $p_i = P(q_i \in S(\omega))$, $i = 1, 2, \dots, k$. Из сказанного выше следует, что распределение случайного множества с независимыми элементами задается формулой

$$P(S = A) = \prod_{q_i \in A} p_i \prod_{q_i \in Q \setminus A} (1 - p_i),$$

т.е. такие распределения образуют $k = card(Q)$ — мерное параметрическое семейство, входящее в $(2^{card(Q)} - 1)$ — одномерное семейство всех распределений случайных подмножеств множества Q.

При исследовании случайных подмножеств произвольного множества Q будем рассматривать их как случайные величины со значениями в некотором пространстве подмножеств множества Q, например, в пространстве замкнутых подмножеств 2^Q множества Q.

Представляющими интерес лишь для математиков способами введения измеримой структуры в 2^Q интересоваться не будем. Отсутствие специального интереса к внутриматематической проблеме измеримости связано с тем, что при вероятностно-статистическом моделировании и анализе данных на ЭВМ все случайные подмножества рассматриваются как конечные (т.е. подмножества конечного множества).

Случайные множества находят разнообразные применения в многообразных проблемах эконометрики и математической экономики. В том числе в задачах управлении запасами и ресурсами (см. об этом главу 5 в монографии [19]), в задачах менеджмента и, в частности, маркетинга, в экспертных оценках, например, при анализе мнений голосующих или опрашиваемых, каждый из которых отмечает несколько пунктов из списка и т.д. Кроме того, случайные множества применяются в гранулометрии, при изучении пористых сред и объектов сложной природы в таких областях, как металлография, петрография, биология, в частности, математическая морфология. Они используются при изучении структуры веществ и материалов, в исследовании процессов распространения, в том числе просачивания, распространения пожаров, экологических загрязнений, при районировании, в изучении областей поражения, например, поражения металла коррозией и сердечной мышцы при инфаркте миокарда, и т.д., и т.п. Можно вспомнить о компьютерной томографии, о наглядном представлении сложной информации на экране компьютера, об изучении распространения рекламной информации, о картах Кохонена (популярный метод представления информации при применении нейросетей) и т.д.

Методы ранговой статистики. Ранее установлено, что любой адекватный алгоритм в порядковой шкале является функцией от некоторой матрицы C. Пусть никакие два из результатов наблюдений $x_1, x_2,\dots,x_n$ не совпадают, а $r_1, r_2,\dots,r_n$ — их ранги. Тогда элементы матрицы C и ранги результатов наблюдений связаны взаимно однозначным соответствием:

$$r_i = 1 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (1 - c_{ij}),$$

а c_{ij} через ранги выражаются так: $c_{ij} = 1$, если $r_i < r_j$, и $c_{ij} = 0$ в противном случае.

Сказанное означает, что при обработке данных, измеренных в порядковой шкале, могут применяться только ранговые статистические методы. Отметим, что часто используемое в непараметрической статистике преобразование $Y = F(X)$ (здесь $F(x)$ — непрерывная функция распределения случайной величины X, причем F предполагается произвольной) фактически означает переход к порядковой шкале, поскольку статистические выводы при этом инвариантны относительно допустимых преобразований в порядковой шкале (т.е. строго возрастающих преобразований).

Разумеется, ранговые статистические методы могут применяться не только при обработке данных, измеренных в порядковой шкале. Так, для проверки независимости двух количественных признаков в случае, когда нет уверенности в нормальности соответствующего двумерного распределения, целесообразно пользоваться коэффициентами ранговой корреляции Кендалла или Спирмена.

В настоящее время (в соответствии с развитием непараметрической статистической теории) с помощью непараметрических и прежде всего ранговых методов можно решать тот же набор задач прикладной статистики, что и с помощью параметрических методов, в частности, основанных на предположении нормальности. Однако параметрические методы вошли в массовое сознание исследователей и инженеров и мешают широкому внедрению более обоснованной и прогрессивной ранговой статистики. Так, при проверке однородности двух выборок вместо критерия Стьюдента целесообразно использовать ранговые методы (см. [29, 30] и главу 2 выше), но пока это делается не всегда.

Объекты общей природы. Вероятностная модель объекта нечисловой природы в общем случае — случайный элемент со значениями в пространстве произвольного вида, а модель выборки таких объектов — совокупность независимых одинаково распределенных случайных элементов. Именно такая модель была использована для обработки наблюдений, каждое из которых — нечеткое множество [21].

Из-за имеющего разнобоя в терминологии приведем математические определения из основополагающей монографии — справочника по теории вероятностей академика РАН Ю.В Прохорова и проф. Ю.А. Розанова [34].

Пусть (X, B) — некоторое измеримое пространство; (F, B) -измеримая функция $\xi = \xi(\omega)$ на пространстве элементарных событий (Ω, F, P) (где P — вероятностная мера на σ -алгебре F — измеримых подмножеств Ω, называемых событиями) со значениями в (X, B) называется *случайной величиной* (чаще этот математический объект называют случайным элементом, оставляя термин «случайная величина» за частным случаем, когда X — числовая прямая — А.О.) в фазовом пространстве (X, B). *Распределением вероятностей* этой случайной величины ξ называется функция $P_\xi = P_\xi(B)$ на σ -алгебре B фазового пространства, определенная как

$$P_\xi = P\{\xi \in B\} \ (B \in B) \tag{7.10}$$

(распределение вероятностей P_ξ представляет собой вероятностную меру в фазовом пространстве (X, B)) [34, с. 132].

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — случайные величины на пространстве случайных событий (Ω, F, P) в соответствующих фазовых пространствах (X_k, B_k). Совместным распределением вероятностей этих величин называется функция $P_{\xi 1, \xi 2, \ldots, \xi n} = P_{\xi 1, \xi 2, \ldots, \xi n}(B_1, B_2, \ldots, B_n)$, определенная на множествах $B_1 \in B_1$, $B_2 \in B_2$, …, $B_n \in B_n$ как

$$P_{\xi 1, \xi 2, \ldots, \xi n}(B_1, B_2, \ldots, B_n) = P_{\xi 1, \xi 2, \ldots, \xi n}(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \ldots, \xi_n \in B_n)$$
(7.11)

Распределение вероятностей $P_{\xi 1, \xi 2, \ldots, \xi n}$ как функция на полукольце множеств вида $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, $B_1 \in B_1$, $B_2 \in B_2$, …, $B_n \in B_n$ в произведении пространств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ представляет собой функцию распределения. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми,* если при любых $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (см. [34, с.133])

$$P_{\xi 1, \xi 2, \ldots, \xi n}(B_1, B_2, \ldots, B_n) = P_{\xi 1}(B_1)\, P_{\xi 2}(B_2) \ldots P_{\xi n}(B_n). \tag{7.12}$$

Предположим, что совместное распределение вероятностей $P_{\xi, \eta}(A, B)$ случайных величин ξ и η абсолютно непрерывно относительно некоторой меры Q на произведении пространств $X \times Y$, являющейся произведением мер Q_X и Q_Y, т.е.:

$$P_{\xi,\eta}(A,B) = \int\limits_{A\times B} p(x,y)Q(dx,dy) \tag{7.13}$$

для любых $A \in A$ и $B \in B$, где $p(x, y)$ — соответствующая *плотность распределения вероятностей* [34, с.145].

В формуле (7.13) предполагается, что $\xi = \xi(\omega)$ и $\eta = \eta(\omega)$ — случайные величины на одном и том же пространстве элементарных событий Ω со значениями в фазовых пространствах (X, A) и (Y, B). Существование плотности $p(x,y)$ вытекает из абсолютной непрерывности $P_{\xi,\eta}(A, B)$ относительно Q в соответствии с теоремой Радона — Никодима [12].

Условное распределение вероятностей $P_\xi(A|\eta)$, $A \in A$ может быть выбрано одинаковым для всех $\omega \in \Omega$, при которых случайная величина $\eta = \eta(\omega)$ сохраняет одно и то же значение: $\eta(\omega) = y$ При почти каждом $y \in Y$ (относительно распределения P_η в фазовом пространстве (Y, B)) условное распределение вероятностей $P_\xi(A \mid y) = P_{\omega,\xi}(A)$, где ω $\{\eta = y\}$ и $A \in$ A будет абсолютно непрерывно относительно меры Q_X:

$$Q_X(A) = \int\limits_{A\times X} Q(dx,dy).$$

Причем соответствующая плотность условного распределения вероятностей будет иметь вид (см. [34, с.145–146]):

$$p_\xi(x \mid y) = \frac{P_\xi(dx \mid y)}{Q_X(dx)} = \frac{p(x,y)}{\int\limits_X p(x,y)Q_X(dx)}. \tag{7.14}$$

При построении вероятностных моделей реальных явлений важны вероятностные пространства из конечного числа элементарных событий. Для них перечисленные выше общие понятия становятся более прозрачными, в частности, снимаются вопросы измеримости (все подмножества конечного множества обычно считаются измеримыми). Вместо плотностей и условных плотностей рассматриваются вероятности и условные вероятности. Отметим, что вероятности можно рассматривать как плотности относительно меры, приписывающей каждому элементу пространства элементарных событий вес 1, т.е. считающей меры

$$Q(A) = Card(A)$$

(мера каждого множества равна числу его элементов). В целом ясно, что определения основных понятий теории вероятностей в общей ситуации практически не отличаются от таковых в элементарных курсах, во всяком случае с идейной точки зрения.

За последние тридцать лет в прикладной статистике сформировалась новая область — нечисловая статистика, или статистика нечисловых данных, она же — статистика объектов нечисловой природы. К настоящему времени она развита не менее, чем ранее выделенные статистика случайных величин, многомерный статистический анализ, статистика временных рядов и случайных процессов. Краткая сводка основных постановок и результатов прикладной статистики в пространствах нечисловой природы дана в настоящей главе (см. также [30, 31]).

Теория, построенная для результатов наблюдений, лежащих в пространствах общей природы, является центральным стержнем в нечисловой статистике. В ее рамках удалось разработать и изучить методы оценивания параметров и характеристик, проверки гипотез (в частности, с помощью статистик интегрального типа), параметрической и непараметрической регрессии (восстановления зависимостей), непараметрического оценивания плотности, дискриминантного и кластерного анализов и т.д.

Вероятностно-статистические методы, развитые для результатов наблюдений, принадлежащих пространствам произвольного вида, позволяют единообразно проводить анализ данных из любого конкретного пространства. Так, в монографии [19] они применены к конечным случайным множествам, в работе [21] — к нечетким множествам. С их помощью установлено поведение обобщенного мнения экспертной комиссии (медианы Кемени) при увеличении числа экспертов, когда ответы экспертов лежат в том или ином пространстве бинарных отношений. Методы классификации могут быть основаны на непараметрических оценках плотности распределения вероятностей в пространстве общей природы. Такие методы были применены для медицинской диагностики в пространстве разнотипных данных, когда часть координат вектора измерена по количественным шкалам, а часть — по качественным, и т.д.

7.4. Расстояния в пространствах произвольной природы

Как показано выше, исходные статистические данные могут иметь различную математическую природу, являться элементами разнообразных пространств — конечномерных, функциональных, бинарных отношений, множеств, нечетких множеств и т.д. Следовательно, центральной частью нечисловой статистики (и прикладной статистики в целом) является статистика в пространствах произвольной природы. Эта область прикладной статистики сама по себе не используется при анализе конкретных данных. Это очевидно, поскольку конкретные данные всегда имеют вполне определенную природу. Однако общие подходы, методы, результаты статистики в пространствах произвольной природы представляют собой научный инструментарий, готовый для применения в каждой конкретной области.

Статистика в пространствах произвольной природы. Много ли общего у статистических методов анализа данных различной природы? На этот естественный вопрос можно сразу же однозначно ответить — да, очень много. Такой ответ будет постоянно подтверждаться и конкретизироваться на протяжении всей главы (см. также [30, 31]). Несколько примеров приведем сразу же.

Прежде всего отметим, что понятия случайного события, вероятности, независимости событий и случайных величин являются общими для любых конечных вероятностных пространств и любых конечных областей значений случайных величин (см. предыдущий раздел). Поскольку все реальные явления и процессы можно описывать с помощью математических объектов, являющихся элементами конечных множеств, сказанное выше означает, что конечных вероятностных пространств и дискретных случайных величин (точнее, величин, принимающих значения в конечном множестве) вполне достаточно для всех практических применений. Переход к непрерывным моделям реальных явлений и процессов оправдан только тогда, когда этот переход облегчает проведение рассуждений и выкладок. Например, находить определенные интегралы зачастую проще, чем вычислять значения сумм. Не могу не отметить, что приведенные соображения о взаимном соотнесении дискретных и непрерывных математических моделей автор услышал более 30 лет назад от академика А.Н. Колмогорова (ясно, что за конкретную формулировку несет ответственность автор настоящего учебника).

Основные проблемы прикладной статистики — описание данных, оценивание, проверка гипотез — также в своей существенной части могут быть рассмотрены в рамках статистики в пространствах произвольной природы. Например, для описания данных могут быть использованы эмпирические и теоретические средние, плотности вероятностей и их непараметрические оценки, регрессионные зависимости. Правда, для этого пространства произвольной природы должны быть снабжены соответствующим математическим инструментарием — расстояниями (показателями близости, мерами различия) между элементами рассматриваемых пространств.

Так, популярный в настоящее время метод оценивания параметров распределений — метод максимального правдоподобия — не накладывает каких-либо ограничений на конкретный вид элементов выборки. Они могут лежать в пространстве произвольной природы. Математические условия касаются только свойств плотностей вероятности и их производных по параметрам. Аналогично положение с методом одношаговых оценок, идущим на смену методу максимального правдоподобия [30]. Асимптотику решений экстремальных статистических задач достаточно изучить для пространств произвольной природы, а затем применять в каждом конкретном случае [23], когда задачу прикладной статистики удается представить в оптимизационном виде. Общая теория проверки статистических гипотез также не требует конкретизации математической природы рассматриваемых элементов выборок. Это относится, например, к лемме Неймана-Пирсона или теории статистических решений. Более того, естественная область построения теории статистик интегрального типа — это пространства произвольной природы [30].

Совершенно ясно, что в конкретных областях прикладной статистики накоплено большое число результатов, относящимся именно к этим областям. Особенно это касается областей, исследования в которых ведутся сотни лет, в частности, статистики случайных величин (одномерной статистики). Однако принципиально важно указать на «ядро» прикладной статистики — статистику в пространствах произвольной природы. Если постоянно «держать в уме» это ядро, то становится ясно, что, например, многие методы непараметрической оценки плотности вероятности или кластер-анализа, использующие только расстояния между объектами и элементами выборки, относятся именно к статистике объектов произвольной природы, а не к статистике случайных величин или многомерному статистическому анализу. Следовательно, и применяться они могут во всех областях прикладной статистики, а не только в тех, в которых «родились».

Расстояния (метрики). В пространствах произвольной природы нет операции сложения, поэтому статистические процедуры не могут быть основаны на использовании сумм. Поэтому используется другой математический инструментарий, использующий понятия типа расстояния.

Как известно, расстоянием в пространстве X называется числовая функция двух переменных $d(x,y)$, $x \in X$, $y \in X$, определенная на этом пространстве, т.е. в стандартных обозначениях d: $X^2 \to R^1$, где R^1 — прямая, т.е. множество всех действительных чисел. Эта функция должна удовлетворять трем условиям (иногда их называют аксиомами):

1) неотрицательности: $d(x, y) \geqslant 0$, причем $d(x, x) = 0$, для любых значений $x \in X$, $y \in X$;

2) симметричности: $d(x,y) = d(y,x)$ для любых $x \in X$, $y \in X$;

3) неравенства треугольника: $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$ для любых значений $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Для термина «расстояние» математиками часто используется синоним — «метрика».

Пример 1. Если $d(x,x) = 0$ и $d(x,y) = 1$ при $x \neq y$ для любых значений $x \in X$, $y \in X$, то, как легко проверить, функция $d(x,y)$ — расстояние (метрика). Такое расстояние естественно использовать в пространстве X значений номинального признака: если два значения (например, названные двумя экспертами) совпадают, то расстояние равно 0, а если различны — то оно равно 1.

Пример 2. Расстояние, используемое в геометрии, очевидно, удовлетворяет трем приведенным выше аксиомам. Если X — это плоскость, а $x(1)$ и $x(2)$ — координаты точки $x \in X$ в некоторой прямоугольной системе координат, то эту точку естественно отождествить с двумерным вектором $(x(1), x(2))$. Тогда расстояние между точками $x = (x(1), x(2))$ и $y = (y(1), y(2))$ согласно известной формуле аналитической геометрии равно

$$d(x, y) = \sqrt{(x(1) - y(1))^2 + (x(2) - y(2))^2}.$$

Пример 3. Евклидовым расстоянием в пространстве R^k векторов вида $x = (x(1), x(2), \ldots, x(k))$ и $y = (y(1), y(2), \ldots, y(k))$ размерности k называется

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{k} (x(j) - y(j))^2 \right)^{1/2}.$$

В примере 2 рассмотрен частный случай примера 3 с $k = 2$.

Пример 4. В пространстве R^k векторов размерности k используют также так называемое «блочное расстояние», имеющее вид

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{k} |x(j) - y(j)|.$$

Блочное расстояние соответствует длине пути при передвижении по городу, разбитому на кварталы горизонтальными и вертикальными (на плане города) улицами. В результате можно передвигаться только параллельно одной из осей координат.

Пример 5. В пространстве функций, элементами которого являются функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, часто используют расстояние Колмогорова

$$d(x, y) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|.$$

Пример 6. Пространство функций, элементами которого являются функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, превращают в метрическое пространство (т.е. в пространство с метрикой), вводя расстояние

$$d_p(x, y) = \left(\int_0^1 (x(t) - y(t))^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Это пространство обычно обозначают L^p, где параметр $p \geqslant 1$ (при $p < 1$ не выполняются аксиомы метрического пространства, в частности, аксиома треугольника).

Пример 7. Рассмотрим пространство квадратных матриц порядка k. Как ввести расстояние между матрицами $A = ||a(i,j)||$ и $B = ||b(i,j)||$? Можно сложить расстояния между соответствующими элементами матриц:

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |a(i, j) - b(i, j)|.$$

Пример 8. Предыдущий пример наводит на мысль о следующем полезном свойстве расстояний. Если на некотором пространстве определены два или больше расстояний, то их сумма — также расстояние.

Пример 9. Пусть A и B — множества. Расстояние между множествами можно определить формулой

$$d(A, B) = (A \Delta B)$$

здесь μ — мера на рассматриваемом пространстве множеств, Δ — символ симметрической разности множеств,

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Если мера — так называемая считающая, т.е. приписывающая единичный вес каждому элементу множества, то введенное расстояние есть число несовпадающих элементов в множествах A и B.

Пример 10. Между множествами можно ввести и другое расстояние:

$$d_1(A,B)=\frac{\mu(A\Delta B)}{\mu(A\bigcup B)}.$$

В ряде задач прикладной статистики используются функции двух переменных, для которых выполнены не все три аксиомы расстояния, а только некоторые. Их обычно называют *показателями различия*, поскольку чем больше различаются объекты, тем больше значение функции. Иногда в том же смысле используют термин «мера близости». Он менее удачен, поскольку большее значение функции соответствует меньшей близости.

Чаще всего отказываются от аксиомы, требующей выполнения неравенства треугольника, поскольку это требование не всегда находит обоснование в конкретной прикладной ситуации.

Пример 11. В конечномерном векторном пространстве показателем различия является

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^{k}(x(j)-y(j))^2$$

(сравните с примером 3).

Показателями различия, но не расстояниями являются такие популярные в прикладной статистике показатели, как дисперсия или средний квадрат ошибки при оценивании.

Иногда отказываются также и от аксиомы симметричности.

Пример 12. Показателем различия чисел x и y является

$$d(x,y)=\left|\frac{x}{y}-1\right|.$$

Такой показатель различия используют в ряде процедур экспертного оценивания.

Что же касается первой аксиомы расстояния, то в различных постановках прикладной статистики ее обычно принимают. Вполне естественно, что наименьший показатель различия должен достигаться, причем именно на совпадающих объектах. Имеет ли смысл это наименьшее значение делать отличным от 0? Вряд ли, поскольку всегда можно добавить одну и ту же константу ко всем значениям показателя различия и тем самым добиться выполнения первой аксиомы.

В прикладной статистике используются самые разные расстояния и показатели различия, о них идет речь в соответствующих разделах настояшего учебника и другиз литературных источников [8, 13, 19, 30, 31, 35].

7.5. Аксиоматическое введение расстояний

В нечисловой статистике (и в организационно-экономическом моделировании в целом) используют большое количество метрик и показателей различия (см. примеры в предыдущем разделе). Как обоснованно выбрать то или иное расстояние для использования в конкретной задаче? В 1959 г. американский статистик Джон Кемени предложил использовать аксиоматический подход, согласно которому следует сформулировать естественные для конкретной задачи аксиомы и вывести из них вид метрики. Этот подход получил большую популярность в нашей стране после выхода в 1972 г. перевода на русский язык книги Дж. Кемени и Дж. Снелла [9], в которой дана система аксиом для расстояния Кемени между упорядочениями. (Упорядочения, как и иные бинарные отношения, естественно представить в виде квадратных матриц из 0 и 1; тогда расстояние Кемени — это расстояние из примера 7 предыдущего раздела.) Последовала большая серия работ, в которых из тех или иных систем аксиом выводился вил метрики или показателя различия для различных видов данных, прежде всего для объектов нечисловой природы. Многие полученные результаты описаны в монографии [19] и обзоре [35], содержащем 161 ссылку, в том числе 69 на русском языке. Рассмотрим некоторые задачи аксиоматического введения расстояний.

Аксиоматическое введение расстояния между толерантностями. Напомним, что толерантность — это бинарное отношение, являющееся рефлексивным и симметричным. Его обычно используют для описания отношения сходства между реальными объектами, отношений знакомства или дружбы между людьми. От отношения эквивалентности отличается тем, что свойство транзитивности не предполагается обязательно выполненным. Действительно, Иванов может быть знаком с Петровым, Петров — с Сидоровым, но при этом ничего необычного нет в том, что Иванов и Сидоров не знакомы между собой.

Пусть множество X, на котором определено отношение толерантности, состоит из конечного числа элементов: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Тогда толерантность описывается квадратной матрицей $A = ||a(i, j)||$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, такой, что $a(i, j) = 1$, если x_i и x_j связаны отношением толерантности, и $a(i, j) = 0$ в противном случае. Матрица A симметрична: $a(i,j) = a(j, i)$, на главной диагонали стоят единицы: $a(i, i) = 1$. Любая матрица, удовлетворяющая приведенным в предыдущей фразе условиям, является матрицей, соответствующей некоторому отношению толерантности. Матрице A можно сопоставить неориентированный граф с вершинами в точках X: вершины x_i и x_j соединены ребром тогда и только тогда, когда $a(i, j) = 1$. Толерантности используются, в частности, при проведении экспертных исследований (см. главу 5).

Будем говорить, что толерантность A_3 лежит между толерантностями A_1 и A_2, если при всех i, j число $a_3(i, j)$ лежит между числами $a_1(i, j)$ и $a_2(i, j)$, т.е. выполнены либо неравенства $a_1(i, j) \leqslant a_3(i, j) \leqslant a_2(i, j)$, либо неравенства $a_1(i, j) \geqslant$ $\geqslant a_3(i, j) \geqslant a_2(i, j)$.

Теорема 7.1 [19]. *Пусть*

(I) $d(A_1, A_2)$ *— метрика в пространстве толерантностей, определенных на конечном множестве* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$;

(II) $d(A_1, A_3) + d(A_3, A_2) = d(A_1, A_2)$ *тогда и только тогда, когда* A_3 *лежит между* A_1 и A_2;

(III) *если отношения толерантности* A_1 и A_2 *отличаются только на одной паре элементов, т.е.* $a_1(i, j) = a_2(i, j)$ *при* $(i, j) \neq (i_0, j_0)$, $i<j$, $i_0 < j_0$, *и* $a_1(i_0, j_0) \neq a_2(i_0, j_0)$, *то* $d(A_1, A_2) = 1$.

Тогда

$$d(A_1, A_2) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} |a_1(i,j) - a_2(i,j)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |a_1(i,j) - a_2(i,j)|.$$

Таким образом, расстояние $d(A_1, A_2)$ только постоянным множителем 1/2 отличается от расстояния Кемени, введенного в пространстве всех бинарных отношений как расстояние Хемминга между описывающими отношения матрицами из 0 и 1 (см. пример 7 предыдущего раздела). Теорема 7.1 дает аксиоматическое введение расстояния в пространстве толерантностей. Оказалось, что фактически оно является сужением расстояния Кемени на это пространство. Сам Дж. Кемени дал аналогичную систему аксиом для сужения на пространство упорядочений. Доказательство теоремы 7.1 вытекает из рассмотрений, связанных с аксиоматическим введением расстояний между множествами, и приводится ниже.

Мера симметрической разности как расстояние между множествами. Как известно, бинарное отношение можно рассматривать как подмножество декартова квадрата X^2 того множества X, на котором оно определено. Поэтому теорему 7.1 можно рассматривать как аксиоматическое введение расстояния между множествами специального вида. Укажем систему аксиом для расстояния между множествами общего вида, описанного в примере 9 предыдущего раздела.

Определение 1. Множество B находится между множествами A и C, если $(A \cap C) \subseteq B \subseteq (A \cup C)$.

С помощью определения 1 в совокупности множеств вводятся геометрические соотношения, использование которых полезно для восприятия рассматриваемых ситуаций.

Расстояние между двумя точками в евклидовом пространстве не изменится, если обе точки сдвинуть на один и тот же вектор. Аналогичное свойство расстояния между множествами сформулируем в виде аксиомы 1. Оно соответствует аксиоме 3 Кемени и Снелла [8, с.22] для расстояний между упорядочениями.

Аксиома 1. Если $A \cap C = B \cap C = \varnothing$, то $d(A, B) = d(A \cup C, B \cup C)$.

Определение 2. Непустая система множеств называется кольцом, если для любых двух входящих в нее множеств в эту систему входят их объединение, пересечение и разность. Множество X называется единицей системы множеств, если оно входит в эту систему, а все остальные множества системы являются подмножествами X. Кольцо множеств, содержащее единицу, называется алгеброй множеств [12, с.38].

Теорема 7.2. *Пусть W — алгебра множеств, d: $W^2 \to R^1$. Тогда аксиома 1 эквивалентна следующему условию: $d(A,B) = d(A \backslash B,\ B \backslash A)$ для любых A, B є W.*

Доказательство. Поскольку

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing,\ (A \setminus B) \notin \cap (A \cap B) = \varnothing\ ,$$

то равенство $d(A,B) = d(A \backslash B,\ B \backslash A)$ следует из аксиомы 1. Обратное утверждение вытекает из того, что в условиях аксиомы 1

$$(A \cup C) \setminus (B \cup C) = A \setminus B, \quad (B \cup C) \setminus (A \cup C) = B \setminus A\ .$$

Теорема 7.2 доказана.

С целью внести в алгебру множеств W отношение «находиться между», аналогичное используемому при аксиоматическом введении расстояний в пространствах бинарных отношений (см. условие (II) в теореме 7.1), примем следующую аксиому.

Аксиома 2. Если B лежит между A и C, то $d(A,B)+d(B,C)= d(A,C)$.

Определение 3 [12]. Неотрицательная функция μ, определенная на алгебре множеств W, называется мерой, если для любых двух непересекающихся множеств A и B из W справедливо соотношение

$$\mu\ (A \cup B) = \mu\ (A) + \mu(B).$$

Понятие меры — это обобщение понятий длины линии, площади фигуры, объема тела.

Теорема 7.3. *Пусть W — алгебра множеств, аксиомы 1 и 2 выполнены для функции d: $W^2 \to [0; +\infty]$. Функция d симметрич-*

на: $d(A,B) = d(B,A)$ *для любых* A *и* B *из* W. *Тогда существует, и притом единственная, мера* μ *на* W *такая, что*

$$d(A,\ B) = \mu(A\Delta B) \tag{7.15}$$

при всех A и B *из* W, *где* $A\Delta B$ — *симметрическая разность множеств* A *и* B, *т.е.* $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

Доказательство. Положим

$$\mu(B) = (\varnothing,\ B),\ B \in W \tag{7.16}$$

Покажем, что определенная формулой (7.16) функция множества μ является мерой. Неотрицательность μ следует из неотрицательности d. Остается доказать аддитивность, т.е. что из $A \cap B = \varnothing$ следует, что

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),\ A \in W,\ B \in W. \tag{7.17}$$

Поскольку A всегда лежит между $\varnothing$ и $A \cup B$, то по аксиоме 2

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) = d(\varnothing,\ A \cup B) = d(\varnothing,\ A) + (A,\ A \cup B) = \\ = \mu(A) + d(A,\ A \cup B).\end{aligned} \tag{7.18}$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то по аксиоме 1 $d(\varnothing,\ B) = d(A,\ A \cup B)$, откуда с учетом (7.18) и следует (7.17).

Докажем соотношение (7.15). Поскольку $A\backslash B$ и $B\backslash A$ имеют пустое пересечение, то согласно определению 1 пустое множество $\varnothing$ лежит между $A\backslash B$ и $B\backslash A$. Поэтому по аксиоме 2

$$(A\backslash B,\ B\backslash A) = d(A\backslash B,\ \varnothing) + d(\varnothing,\ B\backslash A).$$

Из симметричности и соотношения (7.16) следует, что

$$d(A\backslash B,\ \varnothing) = d(\varnothing,\ A\backslash B) = \mu(A\backslash B),$$

откуда $d(A\backslash B,\ B\backslash A) = \mu(A\backslash B) + \mu(B\backslash A)$. Из соотношения (7.17) следует, что $\mu(A\backslash B) + \mu(B\backslash A) = \mu(A\Delta B)$. С другой стороны, по аксиоме 1

$$(A\backslash B,\ B\backslash A) = d((A\backslash B) \cup (A \cap B),\ (B\backslash A) \cup (A \cap B)) = d(A,\ B).$$

Из трех последних равенств вытекает справедливость равенства (7.15).

Остается доказать единственность меры μ в соотношении (7.15). Поскольку $A\Delta B = B$ при $A = \varnothing$, то из (7.15) следует (7.16), т.е. однозначность определения меры $\mu = \mu(d)$ по расстоянию d. Теорема 7.3 доказана.

Теорема 7.4 (*обратная*). *Пусть* μ *— мера определенная на алгебре множеств W. Тогда функция* $d(A,B) = \mu(A\Delta B)$ *является псевдометрикой, для нее выполнены аксиомы 1 и 2.*

Доказательство. То, что функция $d(A,B)$ из (7.15) задает псевдометрику, хорошо известно (см., например, [16, с.79]). Доказательство аксиомы 2 содержится в [15, с.181–183]. Аксиома 1 следует из того, что условия $A \cap C = B \cap C = \varnothing$ обеспечивают справедливость соотношений

$$(A \cup C)\,\Delta(B \cup C) = ((A \cup C) \setminus (B \cup C)) \cup ((B \cup C)\setminus (A \cup C)) =$$
$$= (A \cup B) \cup (B \cup A) = A\Delta B.$$

Замечание. Полагая в аксиоме 2 $A = B = C$, получаем, что $d(A,A) + d(A,A) = d(A,A)$, т.е. $d(A,A) = 0$. Согласно теоремам 7.3 и 7.4, из условий теоремы 7.3 следует неравенство треугольника. Таким образом, в теореме 7.3 действительно приведена система аксиом, определяющая семейство псевдометрик в пространстве множеств.

Обсудим независимость (друг от друга) условий теоремы 7.3. Отбрасывание неотрицательности функции d приводит к тому, что слово «мера» в 7.3 и 7.4 необходимо заменить на «заряд» [12, с.328]. Этот термин обозначает аддитивную функцию множеств, не обладающую свойством неотрицательности. Заряд можно представить как разность двух мер.

Функция $d_1(A,B) = \sqrt{\mu(A\Delta B)}$ является псевдометрикой, для нее выполнена аксиома 1, но не выполнена аксиома 2, следовательно, ее нельзя представить в виде (7.15).

Приведем пример системы множеств W и метрики в ней, для которых верна аксиома 2, но не верна аксиома 1, а потому эту метрику нельзя представить в виде (7.15). Пусть W состоит из множеств $\varnothing$, A, B, $A \cup B$, причем $A \cup B = \varnothing$, а расстояния таковы:

$$d(\varnothing, A) = d(\varnothing, A) = 1,\ d(B, A \cup B) = d(A, B) = 2,$$
$$d(\varnothing, A \cup B) = 3$$

Если единица X алгебры множеств W конечна, т.е. $X = \{x_1, x_2,\ldots, x_k\}$, то расстояние (7.15) принимает вид

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \,|\, \chi_A(x_i) - \chi_B(x_i) \,|, \tag{7.19}$$

где χ_C — индикатор (индикаторная функция) множества C, т.е. $\chi_C(x) = 1$, если $x \in C$, и $\chi_C(x) = 0$ в противном случае. Как следует из теоремы 7.3, неотрицательный коэффициент μ_i — это мера одноэлементного множества $\{x_i\}$, а также расстояние этого множества от пустого множества, т.е.

$$\mu_i = \mu(\{x_i\}) = d(\varnothing, \{x_i\}).$$

Если все коэффициенты μ_i положительны, то формула (7.19) определяет метрику, если хотя бы один равен 0, то — псевдометрику, поскольку в таком случае найдутся два различающиеся между собой множества A и B такие, что $d(A,\mathrm{B}) = 0$.

Расстояние определяется однозначно, если априори известны коэффициенты μ_i. В частности, равноправность объектов (элементов единицы алгебры множеств X) приводит к $\mu_i \equiv 1$. Требование равноправности содержится в аксиомах 2 и 4 Кемени [8, с.21–22].

Применим полученные результаты к толерантностям и докажем теорему 7.1. Совокупность всех толерантностей, определенных на конечном множестве $У$, естественным образом ассоциируется с совокупностью всех подмножеств множества $X = \{(y_i, y_j), 1 \leqslant i < j \leqslant k\}$. Именно, пара (y_i, y_j) входит в подмножество тогда и только тогда, когда y_i и y_j связаны отношением толерантности. Указанная совокупность подмножеств является алгеброй множеств с единицей X. Определение 1 понятия «находиться между» для множеств полностью соответствует ранее данному определению понятия «находиться между» для толерантностей.

Теорема 7.5. *Пусть выполнены условия* (I) *и* (II) *теоремы 7.1 и аксиома 1. Тогда существуют числа* $\mu_{ij} > 0$ *такие, что*

$$d(A,B) = \sum_{1 \le ii < j \le k} \mu_{ij} \, | \, a(i,j) - b(i,j) \, |. \qquad (7.20)$$

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 7.3. Поскольку в условии (I) требуется, чтобы функция $d(A,B)$ являлась метрикой, то необходимо $\mu_{ij} > 0$.

Теорема 7.6. *Пусть выполнены условия теоремы 7.1 и, кроме того, аксиома 1. Тогда верно заключение теоремы 7.1.*

Доказательство. Рассмотрим толерантность A, для которой $a(i,j) = 1$ при $(i,j) = (i_0,j_0)$ и $a(i,j) = 0$ в противном случае. Согласно условию (III) теоремы 7.1 $d(\varnothing, A) = 1$, а согласно (7.20) имеем $d(\varnothing, A) = \mu_{i_0 j_0}$. Следовательно, коэффициент $\mu_{i_0 j_0}. = 1$, что и требовалось доказать.

Для окончательного доказательства теоремы 7.1 осталось избавиться от требования справедливости аксиомы 1.

Доказательство теоремы 7.1. Рассмотрим две толерантности A и B такие, что при представлении их в виде множеств $A \subseteq B$. Это означает, что $a(i, j) \leqslant b(i, j)$ при всех i, j. Поскольку X — конечное множество, то существует конечная последовательность толерантностей $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, A_t$ такая, что $A_1 = A$, $A_t = B$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_m \subseteq \ldots \subseteq A_t$, причем A_{m+1} получается из A_m заменой ровно одного значения $a_m(i_m, j_m) = 0$ на $a_{m+1}(i_m, j_m) = 1$, для $(i, j) \neq (i_m, j_m)$ при этом $a_m(i, j) = a_{m+1}(i, j)$. Тогда A_m находится между A_{m-1} и A_{m+1}, следовательно, по условию (II)

$$d(A, B) = d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \ldots + d(A_m, A_{m+1}) + \ldots + \\ + d(A_{t-1}, A_t).$$

По условию (III) $d(A_m, A_{m+1}) = 1$ при всех m, а потому заключение теоремы 7.1 верно для любых A и B таких, что $A \subseteq B$.

Поскольку $A \cap B$ лежит между A и B, то по условию (II)

$$d(A,\ B) = d(A \cap B,\ A) + d(A \cap B,\ B).$$

При этом $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$. Применяя результат предыдущего абзаца, получаем, заключение теоремы 7.1 верно всегда.

Замечание 1. Таким образом, условие (III) не только дает нормировку, но и заменяет аксиому 1.

Замечание 2. Условие (I) теоремы 7.1 не использовалось в доказательстве, но было приведено в первоначальной публикации [18], чтобы подчеркнуть цель рассуждения. По той же причине оно сохранено в формулировке теоремы 7.1, хотя в доказательстве удалось без него обойтись. Понадобилась только симметричность функции d.

Аксиоматическое введение метрики в пространстве неотрицательных суммируемых функций. Рассмотрим пространство $L(E,\ \mu)$ неотрицательных суммируемых функций на множестве E с мерой μ. Далее в настоящем разделе будем рассматривать только функции из пространства $L(E,\ \mu)$. Интегрирование всюду проводится по множеству (пространству) E и по мере μ. Будем писать $g = h$ или $g \leqslant h$, если указанные соотношения справедливы почти всюду по μ на E (т.е. могут нарушаться лишь на множестве нулевой меры).

Аксиоматически введем расстояние в пространстве $L(E,\ \mu)$ (изложение следует работе [32]). Обозначим $M\,(g,\ h) = \max\,(g,\ h)$ и $m(g,\ h) = \min\,(g,\ h)$. Пусть функция D: $L(E,\ \mu) \times L(E,\ \mu) \to R^1$ — тот основной объект изучения, аксиомы для которого будут сейчас сформулированы.

Аксиома 1. Если $gh = 0$, $g + h \neq 0$, то $D(g,\ h) = 1$.

Аксиома 2. Если $h \leqslant g$, то $D(g,\ h) = C\int (g - h)\, d\mu$, где множитель C не зависит от h, т.е. $C = C(g)$.

Лемма. Из аксиом 1, 2 следует, что для $h \leqslant g \neq 0$

$$D(g,h) = \frac{\int (g-h)d\mu}{\int g d\mu}.$$

Для доказательства заметим, что по аксиоме 1 $D(g, 0) = 1$, а по аксиоме 2 $D(g, 0) = C\int g d\mu$, откуда $C = (\int g d\mu)^{-1}$. Подставляя это соотношение в аксиому 2, получаем заключение леммы.

Требование согласованности расстояния в пространстве $L(E, \mu)$ с отношением «находиться между» приводит, как и ранее для расстояния $d(A, B)$, к следующей аксиоме.

Аксиома 3. Для любых g и h справедливо равенство $D(g, h) = D(M(g, h), g) + D(M(g, h), h)$.

Замечание. В ряде реальных ситуаций естественно считать, что наибольшее расстояние между элементами пространства множеств (которое без ограничения общности можно положить равным 1), т.е. наибольшее несходство, соответствует множествам, не имеющим общих элементов. Расстояние, введенное в теореме 7.3 (формула (7.15)), этому условию не удовлетворяет. Поэтому в пространстве множеств была аксиоматически введена [35] так называемая D-метрика (от *dissimilarity* (англ.) — несходство), для которого это условие выполнено. Она имеет вид:

$$D(A,B) = \begin{cases} \dfrac{\mu(A\Delta B)}{\mu(A\cup B)}, & \mu(A\cup B) > 0, \\ 0, & \mu(A) = \mu(B) = 0. \end{cases} \qquad (7.21)$$

Приведенные выше аксиомы являются обобщениями соответствующих аксиом для D-метрики в пространстве множеств.

Теорема 7.7. *Из аксиом 1– 3 следует, что*

$$D(g,h) = \begin{cases} \dfrac{\int |g-h|\, d\mu}{\int M(g,h) d\mu}, & g+h \neq 0, \\ 0, & g = h = 0. \end{cases} \qquad (7.22)$$

Доказательство. Поскольку

$$(M(g, h) - g) + (M(g, h) - h) = |g - h|,$$

то заключение теоремы 7.7 при $g + h \neq 0$ вытекает из леммы и аксиомы 3. Из аксиомы 2 при $g = 0$ следует, что $D(0, 0) = 0$. Легко видеть, что функция D, заданная формулой (7.22), удовлетворяет аксиомам 1– 3 и, кроме того, $D(g, h) \leqslant 1$ при любых g и h.

Замечание. Если g и h — индикаторные функции множеств, то формула (7.22) переходит в формулу (7.21). Если g и h — функции принадлежности нечетких множеств, то формула (7.22) задает метрику в пространстве нечетких множеств, а именно, D-метрику в этом пространстве [35].

Теорема 7.8. *Функция* $D(g,h)$, *определенная формулой* (7.22), *является метрикой в* $L(E, \mu)$ (*при отождествлении функций, отличающихся лишь на множестве нулевой меры*), *причем* $D(g, f) + D(f, h) = D(g, h)$ *тогда и только тогда, когда* $f = g, f = h$ *или* $f = M(g, h)$.

Доказательство. Обратимся к определению метрики. Для рассматриваемой функции непосредственно очевидна справедливость условий неотрицательности и симметричности. Очевидна и эквивалентность условия $D(g, h) = 0$ равенству $g = h$. Остается доказать неравенство треугольника и установить, когда оно обращается в равенство.

Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемые расстояния задаются верхней строкой формулы (7.22) и, кроме того,

$$R = \int M(g, f)\, d\mu - \int M(f, h)\, d\mu \geqslant 0$$

(частные случаи с использованием нижней строки формулы (7.22) рассматриваются элементарно, а справедливости последнего неравенства можно добиться заменой обозначений функций — элементов пространства $L(E, \mu)$). Тогда

$$D(g,f)+D(f,h) \geq \frac{\int(|g-f|+|f-h|)d\mu}{\int M(g,f)d\mu}, \qquad (7.23)$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $R = 0$ или $f = h$. Положим

$$P = \int(|g-f| + |f-h| - |g-h|)\, d\mu,\ Q =$$

$$= \int(M(g, f) - M(g, h))\, d\mu.$$

Ясно, что $P \geqslant 0$ и

$$\frac{\int(|g-f|+|f-h|)d\mu}{\int M(g,f)d\mu}=\frac{\int|g-h|\,d\mu+P}{\int M(g,h)d\mu+Q}. \tag{7.24}$$

Если $Q < 0$, то, очевидно, неравенство треугольника выполнено, причем неравенство является строгим. Рассмотрим случай $Q > 0$.

Воспользуемся следующим элементарным фактом: если $y \geqslant x$, $y > 0$, $P > Q > 0$, то

$$\frac{x+P}{y+Q}>\frac{x}{y}. \tag{7.25}$$

Из соотношений (7.24) и (7.25) вытекает, что для доказательства неравенства треугольника достаточно показать, что $P - Q > 0$.

Рассмотрим

$$k = \{|g-f| + |f-h| - |g-h|\} - M(g, f) + M(g, h).$$

Применяя равенство $(M(g, h) - g) + (M(g, h) - h) = |g - h|$ к слагаемым, заключенным в фигурные скобки, получаем, что

$$k = M(f, h) + [M(g, f) + M(f, h) - M(g, h) - 2f].$$

Применяя соотношение

$$M(g, h) = g + h - m(g, h) \ (7.26)$$

к слагаемым, заключенным в квадратные скобки, получаем, что

$$k = M(f, h) - m(f, h) - m(g, f) + m(g, h).$$

Так как $M(f, h) - m(f, h) = |f - h|$, то

$$k = |f-h| - (m(g, f) - m(g, h)) \geqslant (f-h) - (m(g, f) - m(g, h)).$$
(7.27)

В соответствии с (7.26) правая часть (7.27) есть $M(g, f)$ — $M(g, h)$, а потому

$$P - Q = \int k\, d\mu \geqslant Q > 0,$$

что завершает доказательство для случая $Q > 0$. При этом неравенство треугольника является строгим.

Осталось рассмотреть случай $Q = 0$. В силу соотношений (7.23) и (7.24) неравенство треугольника выполнено. Когда оно обращается в равенство? Тривиальные случаи: $f = g$ или $f = h$. Если же f отлично от g и h, то необходимо, чтобы $R = 0$ и $P = 0$. Как легко проверить, последнее условие эквивалентно неравенствам

$$m(g, h) \leqslant f \leqslant M(g, h). \qquad (7.28)$$

Из правого неравенства в (7.28) следует, что $M(g, f) \leqslant M(g, M(g, h)) = M(g, h)$. Так как $Q = 0$, то $M(g, f) = M(g, h)$. Аналогичным образом из соотношений

$$M(h, f) \leqslant M(h, M(g, h)) = M(g, h) = M(g, f)$$

и $R = 0$ следует, что $M(f, h) = M(g, h)$.

Рассмотрим измеримое множество $X = \{x \in E\colon h(x) < g(x)\}$. Тогда $M(g, h)(x) = M(f, h)(x) = g(x) > h(x)$, т.е. $h(x) < f(x) = M(g, h)(x)$ для почти всех $x \in X$. Для почти всех $y \in \{x \in E\colon h(x) > g(x)\}$ точно так же получаем $f(y) = M(g, h)(y)$. Для почти всех $z \in \{x \in E\colon h(x) = g(x)\}$ в силу (7.28) $f(z) = M(g, h)(z)$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Назовем функции g и h подобными, если существует число $b > 0$ такое, что $g = bh$. Тогда при $0 < b \leqslant 1$ имеем $D(g, h) = 1 - b$, т.е. расстояние между подобными функциями линейно зависит от коэффициента подобия. Далее, пусть $a > 0$, тогда $D(ag, ah) = D(g, h)$. Таким образом, метрика (7.22) инвариантна по отношению к преобразованиям подобия, которые образуют группу допустимых преобразований в шкале отношений. Это дает основания именовать метрику (7.22) метрикой подобия [32].

7.6. Эмпирические и теоретические средние

Одна из основных статистических процедур — вычисление средних величин для тех или иных совокупностей данных. Законы больших чисел состоят в том, что эмпирические средние сходятся к теоретическим. В классическом варианте: выборочное среднее арифметическое при определенных условиях сходится по вероятности при росте числа слагаемых к математическому ожиданию. На основе законов больших чисел обычно доказывают состоятельность различных статистических оценок. В целом эта тематика занимает заметное место в теории вероятностей и математической статистике.

Однако математический аппарат при этом основан на свойствах сумм случайных величин (векторов, элементов линейных пространств). Следовательно, он не пригоден для изучения вероятностных и статистических проблем, связанных со случайными объектами нечисловой природы. Это такие объекты, как бинарные отношения, нечеткие множества, вообще элементы пространств без векторной структуры. Объекты нечисловой природы все чаще встречаются в прикладных исследованиях. Много конкретных примеров приведено выше в этой главе. Поэтому необходимо научиться усреднять различные нечисловые данные, т.е. определять эмпирические и теоретические средние в пространствах произвольной природы. Кроме того, представляется полезным получение законов больших чисел в пространствах нечисловой природы.

Для осуществления сформулированной научной программы необходимо решить следующие задачи.

А) Определить понятие эмпирического среднего.

Б) Определить понятие теоретического среднего.

В) Ввести понятие сходимости эмпирических средних к теоретическому.

Г) Доказать при тех или иных комплексах условий сходимость эмпирических средних к теоретическому.

Д) Обобщив это доказательство, получить метод обоснования состоятельности различных статистических оценок.

Е) Дать применения полученных результатов при решении конкретных задач.

Ввиду принципиальной важности рассматриваемых результатов приводим в настоящей главе доказательство закона больших чисел, а также результаты компьютерного анализа множества эмпирических средних.

Определения средних величин. Пусть X — пространство произвольной природы, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — его элементы. Чтобы ввести эмпирическое среднее для $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, будем использовать действительнозначную (т.е. с числовыми значениями) функцию $f(x,y)$ двух переменных со значениями в X. В стандартных математических обозначениях: $f : X^2 \to R^1$ Величина $f(x,y)$ интерпретируется как показатель различия между x и y: чем $f(x,y)$ больше, тем x и y сильнее различаются. В качестве f можно использовать расстояние в X, квадрат расстояния и т.п.

Определение 1. Средней величиной для совокупности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (относительно меры различия f), обозначаемой любым из трех способов:

$$x_{cp} = E_n(f) = E_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; f),$$

называем решение оптимизационной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y\right) \to \min, \quad y \in Y . \ (7.29)$$

Это определение согласуется с классическими определениями средних величин. Если $X = R^1$, $f(x,y) = (x - y)^2$, то x_{cp} — выборочное среднее арифметическое (точнее, множество решений задачи (7.29) состоит из одного элемента, и этот элемент — выборочное среднее арифметическое). Если же $X = R^1$, $f(x,y) = |x - y|$, то при $n = 2k+1$ имеем $x_{cp} = x(k+1)$ (точнее, x_{cp} — это множество $\{x(k+1)\}$, состоящее из одного элемента $x(k+1)$), при $n = 2k$ эмпирическое среднее является отрезком $[x(k), x(k+1)]$. Здесь через $x(i)$ обозначен i-ый член вариационного ряда, построенного по $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, т.е. i-я порядковая статистика. Таким образом, при $X = R^1$, $f(x,y) =$

$|x - y|$ решение задачи (7.29) дает естественное определение выборочной медианы. Правда, несколько отличающееся от определения, обычно предлагаемого в курсах «Общей теории статистики», в котором при $n = 2k$ выборочной медианой называют полусумму двух центральных членов вариационного ряда $(x(k) + x(k+1))/2$. Иногда $x(k)$ называют левой медианой, а $x(k+1)$ — правой медианой [19].

Решением задачи (7.29) является множество $E_n(f)$, которое может быть пустым, состоять из одного или многих элементов. Выше приведен пример, когда решением является отрезок. Если $X = R^1\backslash\{x_0\}$, $f(x,y) = (x - y)^2$, а среднее арифметическое выборки равно x_0, то $E_n(f)$ пусто.

При моделировании реальных ситуаций часто можно принять, что X состоит из конечного числа элементов. Тогда множество $E_n(f)$ непусто — минимум на конечном множестве всегда достигается.

Понятия случайного элемента $x = x(\omega)$ со значениями в X, его распределения, независимости случайных элементов используем согласно определениям раздела 7.3, т.е. согласно каноническому справочнику Ю.В. Прохорова и Ю.А. Розанова [34]. Будем считать, что функция f измерима относительно σ-алгебры, участвующей в определении случайного элемента $x = x(\omega)$. Тогда $f(x(\omega), y)$ при фиксированном y является действительнозначной случайной величиной. Предположим, что она имеет математическое ожидание.

Определение 2. Теоретическим средним $E(x,f)$ (другими словами, математическим ожиданием) случайного элемента $x = x(\omega)$ относительно меры различия f называется решение оптимизационной задачи

$$Mf(x(\omega), y) \to \min,\ y \in X. \tag{7.30}$$

Это определение, как и для эмпирических средних, согласуется с классическим. Если $X = R^1$, $f(x,y) = (x - y)^2$, то $E(x,f) = M(x(\omega))$ — обычное математическое ожидание (точнее, множество решений задачи (7.30) состоит из одного элемента, и этот элемент — математическое ожидание $M(x(\omega))$). При этом $\min Mf(x(\omega), y)$ — дисперсия случайной величины $x = x(\omega)$. Если же $X = R^1$, $f(x,y) = |x - y|$, то $E(x,f) = [a,b]$, здесь $a = \sup\{t: F(t) \leqslant 0{,}5\}$, $b = \inf\{t: F(t) \geqslant 0{,}5\}$, где $F(t)$ — функция распределения случайной величины $x = x(\omega)$. Если график $F(t)$ имеет плоский участок на уровне $F(t) = 0{,}5$, то медиана — теоретическое среднее в смысле определения 2 — является отрезком. В классическом случае обычно говорят, что каждый элемент отрезка $[a; b]$ является одним из возможных значений медианы. Поскольку наличие указанного плоского участка — исключительный случай, то обычно решением задачи (7.30) является множество из одного элемента $a = b$, т.е. классическая медиана распределения случайной величины $x = x(\omega)$.

Теоретическое среднее $E(x, f)$ можно определить лишь тогда, когда $Mf = (x(\omega), y)$ существует при всех $y \in X$. Оно может быть пустым множеством, например, если $X = R^1 \backslash \{x_0\}$, $f(x,y) = (x - y)^2$, $x_0 = M(x(\omega))$. И то, и другое исключается, если X конечно. Однако и для конечных X теоретическое среднее может состоять не из одного, а из многих элементов. Отметим, однако, что в множестве всех распределений вероятностей на X подмножество тех распределений, для которых $E(x,f)$ состоит более чем из одного элемента, имеет коразмерность 1, поэтому основной является ситуация, когда множество $E(x,f)$ содержит единственный элемент [19].

Существование средних величин. Под существованием средних величин будем понимать непустоту множеств решений соответствующих оптимизационных задач.

Если X состоит из конечного числа элементов, то минимум в задачах (7.29) и (7.30) берется по конечному множеству. А потому, как уже отмечалось, эмпирические и теоретические средние существуют.

Пусть число элементов X бесконечно. Ввиду важности обсуждаемой темы приведем точные формулировки и доказательства. Для строгого математического изложения нам понадобятся термины из раздела математики под названием «общая топология». Топологические термины и результаты будем использовать в соответствии с классической монографией [8]. Так, топологическое пространство называется бикомпактным в том и только в том случае, когда из каждого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие [8, с.183].

Теорема 7.9. *Пусть X — бикомпактное пространство, функция f непрерывна на X^2 (в топологии произведения). Тогда эмпирическое и теоретическое средние существуют.*

Доказательство. Функция $f(x_i, y)$ от y непрерывна, сумма непрерывных функций непрерывна, непрерывная функция на бикомпакте достигает своего минимума, откуда и следует заключение теоремы относительно эмпирического среднего.

Перейдем к теоретическому среднему. По теореме Тихонова [8, с.194] из бикомпактности X вытекает бикомпактность X^2. Для каждой точки (x, y) из X^2 рассмотрим $\varepsilon/2$ — окрестность в X^2 в смысле показателя различия f, т.е. множество

$$U(x, y) = \{(x', y') : f(x, y) - f(x', y') \,||\, < \varepsilon/2\}.$$

Поскольку f непрерывна, то множества $U(x,y)$ открыты в рассматриваемой топологии в X^2. По теореме Уоллеса [8, с.193] существуют открытые (в X) множества $V(x)$ и $W(y)$, содержащие x и y соответственно и такие, что их декартово произведение $V(x) \times W(y)$ целиком содержится внутри $U(x, y)$.

Рассмотрим покрытие X^2 открытыми множествами $V(x) \times W(y)$. Из бикомпактности X^2 вытекает существование конечного подпокрытия $\{V(x_i) \times W(y_i),\ i = 1, 2, \dots, m\}$. Для каждого x из X рассмотрим все декартовы произведения $V(x_i) \times W(y_i)$, куда входит точка (x, y) при каком-либо y. Таких декартовых произведений и их первых множителей $V(x_i)$ конечное число. Возьмем пересечение таких первых множителей $V(x_i)$ и обозначим его $Z(x)$. Это пересечение открыто, как пересечение конечного числа открытых множеств, и содержит точку x. Из покрытия бикомпактного пространства X открытыми множествами $Z(x)$ выберем открытое подпокрытие $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$.

Покажем, что если x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же Z_j при некотором j, то

$$\sup\{|f(x_1', y) - f(x_2', y)|,\ y \in X\} < \varepsilon \qquad (7.31)$$

Пусть $Zj = Z(x_0)$ при некотором x_0. Пусть $V(x_i) \times W(y_i)$, $i \in I$, — совокупность всех тех исходных декартовых произведений из системы $\{V(x_i) \times W(y_i),\ i = 1, 2, \dots, m\}$, куда входят точки

(x_0, y) при различных y. Покажем, что их объединение содержит также точки (x'_1, y) и (x'_2, y) при всех y. Действительно, если (x_0, y) входит в $V(x_i) \times W(y_i)$, то y входит в $W(y_i)$, а x'_1 и x'_2 вместе с x_0 входят в $V(x_i)$, поскольку x'_1, x'_2, и x_0 входят в $Z(x_0)$. Таким образом, (x'_1, y) и (x'_2, y) принадлежат $V(x_i) \times W(y_i)$, а потому согласно определению $V(x_i) \times W(y_i)$

$$\left|f\left(x_1', y\right)-f\left(x_i, y_i\right)\right|<\varepsilon / 2, \qquad \left|f\left(x_2', y\right)-f\left(x_i, y_i\right)\right|<\varepsilon / 2,,$$

откуда и следует неравенство (7.31).

Поскольку X^2 — бикомпактное пространство, то функция f ограничена на X^2, а потому существует математическое ожидание $Mf(x(\omega),y)$ для любого случайного элемента $x(\omega)$, удовлетворяющего приведенным выше условиям согласования топологии, связанной с f, и измеримости, связанной с $x(\omega)$. Если x_1 и x_2 принадлежат одному открытому множеству Z_j, то

$$|Mf(x_1, y) - Mf(x_2, y)| < \varepsilon,$$

а потому функция

$$g(y) = Mf(x(\omega), y) \tag{7.32}$$

непрерывна на X. Поскольку непрерывная функция на бикомпактном множестве достигает своего минимума, т.е. существуют такие точки z, на которых $g(z) = \inf\{g(y),\ y \in X\}$, то теорема 7.9 доказана.

В ряде интересных для приложений ситуаций X не является бикомпактным пространством. Например, если $X = R^1$. В этих случаях приходится наложить на показатель различия f некоторые ограничения, например, так, как это сделано в теореме 7.10.

Теорема 7.10. *Пусть X — топологическое пространство, непрерывная (в топологии произведения) функция f: $X^2 \to R^2$ неотрицательна, симметрична (т.е. $f(x,y) = f(y,x)$ для любых x и y из X), существует число $D > 0$ такое, что при всех x, y, z из X*

$$f(x,y) \leqslant D\{f(x,z) + f(z,y)\}. \tag{7.33}$$

Пусть в X существует точка x_0 такая, что при любом положительном R множество $\{x: f(x, x_0) \leqslant R\}$ является бикомпактным. Пусть для случайного элемента $x(\omega)$, согласованного с топологией в рассмотренном выше смысле, существует $g(x_0) = Mf(x(\omega), x_0)$.

Тогда существуют (т.е. непусты) математическое ожидание $E(x,f)$ и эмпирические средние $E_n(f)$.

Замечание. Условие (7.33) — некоторое обобщение неравенства треугольника. Например, если g — метрика в X, а $f = g^p$ при некотором натуральном p, то для f выполнено соотношение (7.33) с $D = 2^p$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(y)$, определенную формулой (7.32). Имеем

$$f(x(\omega), y) \leqslant D\,\{f(x(\omega), x_0) + f(x_0, y)\}. \tag{7.34}$$

Поскольку по условию теоремы $g(x_0)$ существует, а потому конечно, то из оценки (7.34) следует существование и конечность $g(y)$ при всех y из X. Докажем непрерывность этой функции.

Рассмотрим шар (в смысле меры различия f) радиуса R с центром в x_0:

$$K(R) = \{x : f(x, x_0) \leqslant R\},\ R > 0.$$

В соответствии с условием теоремы $K(R)$ как подпространство топологического пространства X является бикомпактным. Рассмотрим произвольную точку x из X. Справедливо разложение

$$(x(\omega), y) = f(x(\omega), y)\chi(\, x(\omega) \in K(R)) + f(x(\omega), y)\chi(\, x(\omega) \notin K(R)),$$

где $\chi(C)$ — индикатор множества C. Следовательно,

$$g(y) = Mf(x(\omega), y)\chi(\, x(\omega) \in K(R)) +$$
$$+ Mf(x(\omega), y)\chi(\, x(\omega) \notin K(R)). \tag{7.35}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (7.35). В силу (7.33)

$$f(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \notin K(R)) \leqslant D\{f(x(\omega), x_0)\chi(x(\omega) \notin K(R)) +$$
$$+ (x_0, y)\chi(x(\omega) \notin K(R))\}. \qquad (7.36)$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей (7.36):

$$Mf(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \notin K(R)) \leqslant D\int_R^{+\infty} tdP\{f(x(\omega), x_0) \leqslant t\} + Df(x_0, y)P(x(\omega) \notin K(R))$$

(7.37)

В правой части (7.37) оба слагаемых стремятся к 0 при безграничном возрастании R: первое — в силу того, что

$$g(x_0) = Mf(x(\omega), x_0) = \int_0^{+\infty} tdP(f(x(\omega), x_0) \leqslant t) < \infty$$

второе — в силу того, что распределение случайного элемента $x(\omega)$ сосредоточено на X и

$$X \setminus \bigcup_{R>0} K(R) = \varnothing .$$

Пусть $U(x)$ — такая окрестность x (т.е. открытое множество, содержащее x), для которой

$$\sup \{f(y, x), y \in U(x)\} < +\infty.$$

Имеем

$$f(y, x_0) \leqslant D(f(x_0, x) + f(x, y)). \qquad (7.38)$$

В силу (7.37) и (7.38) при безграничном возрастании R

$$Mf(x(\omega), y)\chi(x(\omega) \notin K(R)) \to 0 \qquad (7.39)$$

равномерно по $y \in U(x)$. Пусть $R(0)$ таково, что левая часть (7.39) меньше $\varepsilon > 0$ при $R > R(0)$ и, кроме того, $y \in U(x) \subseteq K(R(0))$. Тогда при $R > R(0)$

$$|g(y) - g(x)| \leqslant Mf\,|(x(\omega), y)\,\chi(x(\omega) \in$$
$$\in K(R)) - Mf\,|(x(\omega), x)\,\chi(x(\omega) \in K(R))| + 2\varepsilon. \qquad (7.40)$$

Нас интересует поведение выражения в правой части формулы (7.40) при $y\in U(x)$. Рассмотрим f_1 — сужение функции f на замыкание декартова произведения множеств $U(x)\times K(R)$, и случайный элемент $(x(\omega) = x(\omega)\ \chi(\ x(\omega)\in\ K(R))$. Тогда

$$Mf\,(x(\omega),\ y)\ \chi(x(\omega)\in\ K(R)) = Mf_1\,(x_1(\omega),\ y)$$

при $y\in U(x)$, а непрерывность функции $g_1(y) = Mf_1\,(x_1(\omega), y)$ была доказана в теореме 7.9. Последнее означает, что существует окрестность $U_1(x)$ точки x такая, что

$$|\ Mf_1\,(x_1(\omega),\ y) - Mf_1\,(x_1(\omega),\ x)|\ <\ \varepsilon \qquad (7.41)$$

при $y\in\ U_1(x)$. Из (7.40) и (7.41) вытекает, что при $y\in\ U(x)\cap U_1(x)$

$$|g(y) - g(x)|\ <\ 3\varepsilon,$$

что и доказывает непрерывность функции $g(x)$.

Докажем существование математического ожидания $E(x,f)$. Пусть $R(0)$ таково, что

$$P(x(\omega)\in\ K(R(0)))\ >\ S. \qquad (7.42)$$

Пусть H — некоторая константа, значение которой будет выбрано позже. Рассмотрим точку x из множества $K(HR(0))^C$ — дополнения $K(HR(0))$, т.е. из внешности шара радиуса $HR(0)$ с центром в x_0. Пусть $x(\omega)\in\ K(R(0))$. Тогда имеем

$$f(x_0,\ x)\ \leqslant D\{f(x_0,\ x(\ \omega))\ +\ f(x(\omega),\ x)\},$$

откуда

$$f\left(x\left(\omega\right),x\right)\geqslant\frac{1}{D}f\left(x_0,x\left(\omega\right)\right)\geqslant\frac{HR\left(0\right)}{D}-R\left(0\right) \qquad (7.43)$$

Выбирая H достаточно большим, получим с учетом условия (7.42), что при $x\in\ K(HR(0))^C$ справедливо неравенство

$$Mf\,(x(\omega),x)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{HR(0)}{D}-R(0)\right). \qquad (7.44)$$

Можно выбрать H так, чтобы правая часть (7.44) превосходила $g(x_0) = Mf(x(\omega), x_0)$

Сказанное означает, что Argmin $g(x)$ достаточно искать внутри бикомпактного множества $K(HR(0))$. Из непрерывности функции g вытекает, что ее минимум достигается на указанном бикомпактном множестве, а потому — и на всем X. Существование (непустота) теоретического среднего $E(x,f)$ доказана.

Докажем существование эмпирического среднего $E_n(f)$. Есть искушение проводить его дословно так же, как и доказательство существования математического ожидания $E(x,f)$, лишь с заменой 1/2 в формуле (7.44) на частоту попадания элементов выборки x_i в шар $K(R(0))$. Эта частота, очевидно, стремится к вероятности попадания случайного элемента $x = x(\omega)$ в $K(R(0))$, большей 1/2 в соответствии с (7.42). Однако это рассуждение показывает лишь, что вероятность непустоты $E_n(f)$ стремится к 1 при безграничном росте объема выборки. Точнее, оно показывает, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{E_n(f) \neq \varnothing \wedge E_n(f) \subseteq K\left(HR(0)\right)\right\} = 1 .$$

Поэтому пойдем другим путем, не опирающимся к тому же на вероятностную модель выборки. Положим

$$R(1) = \max\{f(x_i, x_0), = 1, 2, \ldots, n\}. \tag{7.45}$$

Если x входит в дополнение шара $K(HR(1))$, то аналогично (7.43) имеем

$$f(x_i, x_0) \geqslant \frac{HR(1)}{D} - R(1) \tag{7.46}$$

При достаточно большом H из (7.45) и (7.46) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, x_0) \geqslant nR(1) < \sum_{i=1}^{n} f(x_i, x), \qquad x \in \left\{K\left(HR(1)\right)\right\}^C$$

Следовательно, Argmin достаточно искать на $K(HR(1))$. Заключение теоремы 7.10 следует из того, что на бикомпактном пространстве $K(HR(1))$ минимизируется непрерывная функция.

Теорема 7.10 полностью доказана. Перейдем к законам больших чисел.

7.7. Законы больших чисел

О формулировках законов больших чисел. Пусть x, x_1, x_2, x_3, ..., x_n — независимые одинаково распределенные случайные элементы со значениями в X. Закон больших чисел — это утверждение о сходимости эмпирических средних к теоретическому среднему (математическому ожиданию) при росте объема выборки n, т.е. утверждение о том, что

$$E_n(f) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; f) \to E(x, f) \tag{7.47}$$

при $n \to \infty$. Однако и слева, и справа в формуле (7.47) стоят, вообще говоря, множества. Поэтому понятие сходимости в (7.47) требует обсуждения и определения.

В силу классического закона больших чисел при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) \to Mf(x, y) \tag{7.48}$$

в смысле сходимости по вероятности, если правая часть существует ([4], теорема А.Я. Хинчина, 1923 г.).

Если пространство X состоит из конечного числа элементов, то из соотношения (7.48) легко вытекает (см., например, [19, с.192–193]), что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{E_n(f) \subseteq E(x, f)\right\} = 1 \tag{7.49}$$

Другими словами, $E_n(f)$ является состоятельной оценкой $E(x, f)$.

Если $E(x, f)$ состоит из одного элемента, $E(x, f) = \{x_0\}$, то соотношение (7.49) переходит в следующее:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{E_n(f) = \{x_0\}\right\} = 1 \tag{7.50}$$

Однако с прикладной точки зрения доказательство соотношений (7.49) — (7.50) не дает достаточно уверенности в возможности использования $E_n(f)$ в качестве оценки $E(x,f)$. Причина в том, что в процессе доказательства объем выборки предполагается настолько большим, что при всех $y \in X$ одновременно левые части соотношений (7.48) сосредотачиваются в непересекающихся окрестностях правых частей.

Замечание. Если в соотношении (7.48) рассмотреть сходимость с вероятностью 1, то аналогично (7.49) получим т.н. усиленный закон больших чисел [19, с.193–194]. Согласно этой теореме с вероятностью 1 эмпирическое среднее $E_n(f)$ входит в теоретическое среднее $E(x,f)$, начиная с некоторого объема выборки n, вообще говоря, случайного, $n = n(\omega)$. Мы не будем останавливаться на сходимости с вероятностью 1, поскольку в соответствующих постановках, подробно разобранных в монографии [19], нет принципиальных отличий от случая сходимости по вероятности.

Если X не является конечным, например, $X = R^1$, то соотношения (7.49) и (7.50) неверны. Поэтому необходимо искать иные формулировки закона больших чисел. В классическом случае сходимости выборочного среднего арифметического к математическому ожиданию, т.е. $\bar{x} \to M(x)$, можно записать закон больших чисел так: для любого $\varepsilon > 0$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\{\bar{x} \in (M(x) - \varepsilon;\ M(x) + \varepsilon)\} = 1. \qquad (7.51)$$

В этом соотношении в отличие от (7.49) речь идет о попадании эмпирического среднего $E_n(f) = \bar{x}$ не непосредственно внутрь теоретического среднего $E(x, f)$, а в некоторую *окрестность* теоретического среднего (для случайных величин с непрерывными функциями распределения вероятность совпадения выборочного среднего арифметического и математического ожидания, т.е. вероятность выполнения соотношений (7.49) и (7.50), равна 0).

Обобщим эту формулировку. Как задать окрестность теоретического среднего в пространстве произвольной природы? Естественно взять его окрестность, определенную с помощью какой-либо метрики. Однако полезно обеспечить на ее дополнении до X *отделенность* множества значений $Mf(x(\omega),y)$ как функции y от минимума этой функции на всем X.

Поэтому мы сочли целесообразным определить такую окрестность с помощью самой функции $Mf(x(\omega), y)$.

Определение 1. Для любого $\varepsilon > 0$ назовем ε -пяткой функции $g(x)$ множество

$$K_\varepsilon(g) = \{x : g(x) < \inf\{d(y), y \in X\} + \varepsilon, x \in X\}.$$

Таким образом, в ε-пятку входят все те x, для которых значение $g(x)$ либо минимально, либо отличается от минимального (или от инфимума — точной нижней грани) не более чем на ε. Так, для $X = R^1$ и функции $g(x) = x^2$ минимум равен 0, а ε-пятка имеет вид интервала $(-\sqrt{\varepsilon}; \sqrt{\varepsilon})$. В формулировке (7.51) классического закона больших чисел утверждается, что при любом $\varepsilon > 0$ вероятность попадания среднего арифметического в $\sqrt{\varepsilon}$ -пятку математического ожидания стремится к 1. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то вместо $\sqrt{\varepsilon}$ -пятки можно говорить о ε-пятке, т.е. перейти от (7.51) к эквивалентной записи

$$\lim_{n\to\infty} P\{\overline{x} \in K_\varepsilon(M(x(\omega) - x)^2\} = 1. \tag{7.52}$$

Соотношение (7.52) допускает непосредственное обобщение на общий случай пространств произвольной природы.

СХЕМА ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. *Пусть x, x_1, x_2, x_3, …, x_n — независимые одинаково распределенные случайные элементы со значениями в пространстве произвольной природы X с показателем различия f: $X^2 \to R^1$. Пусть выполнены некоторые математические условия регулярности. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} P\{E_n(f) \subseteq K_\varepsilon(E(x, f))\} = 1. \tag{7.53}$$

Аналогичным образом может быть сформулирована и общая идея усиленного закона больших чисел. Ниже приведены две конкретные формулировки «условий регулярности».

Законы больших чисел. Начнем с рассмотрения естественного обобщения конечного множества — бикомпактного пространства X.

Теорема 7.11. *В условиях теоремы 7.9 раздела 7.6 справедливо соотношение* (7.53).

Доказательство. Воспользуемся построенным при доказательстве теоремы 7.9 раздела 7.6 конечным открытым покрытием $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_k\}$ пространства X таким, что для него выполнено соотношение (7.31) раздела 7.6. Построим на его основе разбиение X на непересекающиеся множества $W_1, W_2, \ldots, W_m$ (объединение элементов разбиения $W_1, W_2, \ldots, W_m$ составляет X). Это можно сделать итеративно. На первом шаге из Z_1 следует вычесть $Z_2, \ldots, Z_k$ — это и будет W_1. Затем в качестве нового пространства надо рассмотреть разность X и W_1, а покрытием его будет $\{Z_2, \ldots, Z_k\}$. И так до k-го шага, когда последнее из рассмотренных покрытий будет состоять из единственного открытого множества Z_k. Остается из построенной последовательности $W_1, W_2, \ldots, W_k$ вычеркнуть пустые множества, которые могли быть получены при осуществлении описанной процедуры (поэтому, вообще говоря, m может быть меньше k).

В каждом из элементов разбиения $W_1, W_2, \ldots, W_m$ выберем по одной точке, которые назовем центрами разбиения и соответственно обозначим $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Это и есть то конечное множество, которым можно аппроксимировать бикомпактное пространство X. Пусть y входит в W_j. Тогда из соотношения (7.31) раздела 7.6 вытекает, что

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, w_j)\right| < \varepsilon. \tag{7.54}$$

Перейдем к доказательству соотношения (7.53). Возьмем произвольное $\delta > 0$. Рассмотрим некоторую точку b из $E(x,f)$. Доказательство будет основано на том, что с вероятностью, стремящейся к 1, для любого y вне $K_\delta(E(x, f))$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y) > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, b). \tag{7.55}$$

Для обоснования этого неравенства рассмотрим все элементы разбиения $W_1, W_2, \ldots, W_m$, имеющие непустое пересечение с внешностью δ-пятки $K_\delta(E(x, f))$. Из неравенства (7.54) следует, что для любого y вне $K_\delta(E(x, f))$ левая часть неравенства (7.55) не меньше

$$\min_j \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, w_j) \right) - \varepsilon, \tag{7.56}$$

где минимум берется по центрам всех элементов разбиения, имеющим непустое пересечение с внешностью δ-пятки. Возьмем теперь в каждом таком разбиении точку v_i, лежащую вне δ-пятки $K_\delta(E(x, f))$. Тогда из неравенств (7.31) раздела 7.6 и (7.56) следует, что левая часть неравенства (7.55) не меньше

$$\min_j \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, v_j) \right) - 2\varepsilon. \tag{7.57}$$

В силу закона больших чисел для действительнозначных случайных величин каждая из участвующих в соотношениях (7.55) и (7.57) средних арифметических имеет своими пределами соответствующие математические ожидания, причем в соотношении (7.57) эти пределы не менее

$$Mf(x(\omega), b) + \delta - 2\varepsilon,$$

поскольку точки v_i лежат вне δ-пятки $K_\delta(E(x, f))$. Следовательно, при

$$\delta - 2\varepsilon > 0$$

и достаточно большом n, обеспечивающем необходимую близость рассматриваемого конечного числа средних арифметических к их математическим ожиданиям, справедливо неравенство (7.55).

Из неравенства (7.55) следует, что пересечение $E_n(f)$ с внешностью $K_\delta(E(x, f))$ пусто. При этом точка b может входить в $E_n(f)$, а может и не входить. Во втором случае $E_n(f)$ состоит из иных точек, входящих в $K_\delta(E(x, f))$. Теорема 7.11 доказана.

Если X не является бикомпактным пространством, то необходимо суметь оценить рассматриваемые суммы «на периферии», вне бикомпактного ядра, которое обычно выделяется естественным путем. Один из возможных комплексов условий сформулирован выше в теореме 7.10 раздела 7.6.

Теорема 7.12. *В условиях теоремы 7.10 раздела 7.6 справедлив закон больших чисел, т.е. соотношение* (7.53).

Доказательство. Будем использовать обозначения, введенные в теореме 7.10 раздела 7.6 и при ее доказательстве. Пусть r и R, $r < R$, — положительные числа. Рассмотрим точку x в шаре $K(r)$ и точку y вне шара $K(R)$. Поскольку

$$f(x_0, y) \le D\{f(x_0, x) + f(x, y)\},$$

то

$$f(x, y) \ge \frac{1}{D} f(x_0, y) - f(x_0, x) \ge \frac{R}{D} - r.. \qquad (7.58)$$

Положим

$$f(x, y) \ge \frac{1}{D} f(x_0, y) - f(x_0, x) \ge \frac{R}{D} - r..$$

Сравним $g_n(x_0)$ и $g_n(y)$. Выборку $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ разобьем на две части. В первую часть включим те элементы выборки, которые входят в $K(r)$, во вторую — все остальные (т.е. лежащие вне $K(r)$). Множество индексов элементов первой части обозначим $I = I(n,r)$. Тогда в силу неотрицательности f имеем

$$g_n(y) \ge \frac{1}{n} \sum_{i \in I} f(x_i, y),$$

а в силу неравенства (7.58)

$$\sum_{i \in I} f(x_i, y) \geqslant \left(\frac{R}{D} - r \right) Card I(n, r),$$

где $Card\ I(n,r)$ — число элементов в множестве индексов $I(n,r)$. Следовательно,

$$g_n(y) \ge \frac{1}{n} \left(\frac{R}{D} - r \right) J, \qquad (7.59)$$

где $J = Card\, I(n,r)$ — биномиальная случайная величина $B(n,p)$ с вероятностью успеха $p = P\{x(\omega)\in K(r)\}$. По теореме Хинчина для $g_n(x_0)$ справедлив (классический) закон больших чисел. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $n_1 = n_1(\varepsilon)$ так, чтобы при $n > n_1$ было выполнено соотношение

$$P\{g_n(x_0)-g(x_0)>\varepsilon\}<\varepsilon, \tag{7.60}$$

где $g(x_0) = Mf(x_1, x_0)$. Выберем r так, чтобы вероятность успеха $p > 0{,}6$. По теореме Бернулли можно выбрать $n_2 = n_2(\varepsilon)$ так, чтобы при $n > n_2$

$$P\{J>0{,}5n\}>1-\varepsilon. \tag{7.61}$$

Выберем R так, чтобы

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{D}-r\right)>g(x_0)+\varepsilon.$$

Тогда

$$K_\varepsilon(g)\subseteq K(R) \tag{7.62}$$

и согласно (7.59), (7.60) и (7.61) при $n > n_3 = \max(n_1, n_2)$ с вероятностью не менее $1 - \varepsilon$ имеем

$$g_n(y) > g_n(x_0) \tag{7.63}$$

для любого y вне $K(R)$. Из (7.62) следует, что минимизировать g_n достаточно внутри бикомпактного шара $K(R)$, при этом $E_n(f)$ не пусто и

$$E_n(f)\subseteq K(R) \tag{7.64}$$

с вероятностью не менее $1–2\varepsilon$.

Пусть g_n и g — сужения g_n и $g(x) = Mf(x(\omega), x)$ соответственно на $K(R)$ как функций от x. В силу (7.62) справедливо равенство $K_\varepsilon(g') = K_\varepsilon(f)$. Согласно доказанной выше теореме 7.11 найдется $n_4 = n_4(\omega)$ такое, что

$$P(K_0(g_n^{'}) \subseteq K_\varepsilon(g)) > 1 - \varepsilon.$$

Согласно (7.64) с вероятностью не менее 1– 2ε

$$K_0(g_n^{'}) = E_n(f)$$

При $n > n_3$ следовательно, при $n > n_5(\varepsilon) = \max(n_3, n_4)$ имеем

$$P(E_n(f) \subseteq K_\varepsilon(g)) > 1 - 3\varepsilon,$$

что и завершает доказательство теоремы 7.12.

Справедливы и иные варианты законов больших чисел, полученные, в частности, в статье [23]. Разберем важный для прикладных исследований пример.

Медиана Кемени и экспертные оценки. Рассмотрим на основе развитой выше теории частный случай пространств нечисловой природы — пространство бинарных отношений на конечном множестве $Q = \{q_1, q_2, ..., q_k\}$ и его подпространства. Как известно, каждое бинарное отношение A можно описать матрицей $||a(i,j)||$ из 0 и 1, причем $a(i,j) = 1$ тогда и только тогда q_i и q_j находятся в отношении A, и $a(i,j) = 0$ в противном случае. Напомним определение расстояния Кемени (см. начало раздела 7.5).

Определение 2. Расстоянием Кемени между бинарными отношениями A и B, описываемыми матрицами $||a(i,j)||$ и $||b(i,j)||$ соответственно, называется

$$d(A,B) = \sum_{i,j=1}^{k} | a(i,j) - b(i,j) | .$$

Замечание. Иногда в определение расстояния Кемени вводят множитель, зависящий от k.

Определение 3. Медианой Кемени для выборки, состоящей из бинарных отношений, называется эмпирическое среднее, построенное с помощью расстояния Кемени.

Замечание. В определение медианы Кемени входит множество, по которому проводится минимизация. Сам Дж. Кемени рассматривал минимизацию по пространству упорядочений [9]. Можно минимизировать по пространству отношений эквивалентности или по пространству отношений толерантности, по всем бинарным отношениям, а также по иным множествам, например, по совокупности ответов экспертов — тогда медианой Кемени будет мнение того эксперта, который оказался «в центре» мнений членов экспертной комиссии.

Поскольку число бинарных отношений на конечном множестве конечно, то эмпирические и теоретические средние для произвольных показателей различия существуют и справедливы законы больших чисел, описанные формулами (7.49) и (7.50) выше.

Бинарные отношения, в частности, упорядочения, часто используются для описания мнений экспертов. Тогда расстояние Кемени измеряет близость мнений экспертов, а медиана Кемени позволяет находить итоговое усредненное мнение комиссии экспертов. Расчет медианы Кемени обычно включают в информационное обеспечение систем принятия решений с использованием оценок экспертов. Речь идет, например, о математическом обеспечении автоматизированного рабочего места «Математика в экспертизе» (АРМ «МАТЭК»), предназначенного, в частности, для использования при проведении экспертиз в задачах экологического страхования. Поэтому представляет большой практический интерес численное изучение свойств медианы Кемени при конечном объеме выборки. Такое изучение дополняет описанную выше асимптотическую теорию, в которой объем выборки предполагается безгранично возрастающим ($n \to \infty$).

Компьютерное изучение свойств медианы Кемени при конечных объемах выборок. С помощью специально разработанной программной системы В.Н. Жихарев провел ряд серий численных экспериментов по изучению свойств выборочных медиан Кемени. Представление о полученных результатах дается табл.7.2, взятой из статьи [6]. В каждой серии методом статистических испытаний определенное число раз моделировался случайный и независимый выбор одинаково распределенных экспертных ранжировок, а затем находились все медианы Кемени для смоделированного набора мнений экспертов. При этом в сериях 1– 5 распределение ответа эксперта предполагалось равномерным на множестве всех ранжировок. В серии 6 это распределение являлось монотонным относительно расстояния Кемени с некоторым центром (о понятии монотонности см. раздел 7.3), т.е. вероятность выбора определенной ранжировки убывала с увеличением расстояния Кемени этой ранжировки от центра. Таким образом, серии 1– 5 соответствуют ситуации, когда у экспертов нет почвы для согласия, нет группировки их мнений относительно некоторого единого среднего группового мнения, в то время как в серии 6 есть единое мнение — описанный выше центр, к которому тяготеют ответы экспертов.

Результаты, приведенные в табл.7.2, можно комментировать разными способами. Неожиданным явилось большое число элементов в выборочной медиане Кемени — как среднее, так и особенно максимальное. Одновременно обращает на себя внимание убывание этих чисел при росте числа экспертов и особенно при переходе к ситуации реального существования группового мнения (серия 6). Достаточно часто один из ответов экспертов входит в медиану Кемени (т.е. пересечение множества ответов экспертов и медианы Кемени непусто), а диаметр медианы как множества в пространстве ранжировок заметно меньше диаметра множества ответов экспертов. По этим показателям — наилучшее положение в серии 6. Грубо говоря, всяческие «патологии» в поведении медианы Кемени наиболее резко проявляются в ситуации, когда ее применение не имеет содержательного обоснования, т.е. когда у экспертов нет основы для согласия, их ответы равномерно распределены на множестве ранжировок.

Таблица 7.2

Вычислительный эксперимент по изучению медианы Кемени

Номер серии	1	2	3	4	5	6
Число испытаний	100	1000	50	50	1000	1000
Количество объектов	5	5	7	7	5	5
Количество экспертов	10	30	10	30	10	10

Номер серии	1	2	3	4	5	6
Частота непустого пересечения	0,85	0,58	0,52	0,2	0,786	0,911
Среднее отношение диаметров	0.283	0,124	0,191	0,0892	0,202	0.0437
Средняя мощность медианы	5,04	2,41	6,4	2,88	3,51	1,35
Максимальная. мощность медианы	30	14	19	11	40	12

Увеличение числа испытаний в 10 раз при переходе от серии 1 к серии 5 не очень сильно повлияло на приведенные в таблице характеристики, поэтому представляется, что суть дела выявляется при числе испытаний (в методе Монте-Карло), равном 100 или даже 50. Увеличение числа объектов или экспертов увеличивает число элементов в рассматриваемых пространствах ранжировок, а потому уменьшается частота попадания какого-либо из мнений экспертов внутрь медианы Кемени. А также отношение диаметра медианы к диаметру множества экспертов и число элементов медианы Кемени (среднее и максимальное). Можно сказать, что увеличение числа объектов или экспертов уменьшает степень дискретности задачи, приближает ее к непрерывному случаю, а потому уменьшает выраженность различных «патологий».

Есть много интересных направлений исследований, которые здесь не рассматриваем. Они связаны, в частности, со сравнением медианы Кемени с другими методами усреднения мнений экспертов, например, с нахождением итогового упорядочения по методу средних арифметических рангов или методу медиан рангов, а также объединяющему их методу с использованием расчета согласующей ранжировки (см. главу 5). Другое перспективное направление связано с использованием малых окрестностей ответов экспертов для поиска входящих в медиану ранжировок (с целью сокращения расчетов). Весьма важно получить теоретические и численные оценок скорости сходимости в законах больших чисел.

Различные варианты медианы Кемени. Согласно энциклопедии «Вероятность и математическая статистика», медиана

Кемени — это эмпирическое среднее $x_{cp} = E_n(f) = E_n(x_1, x_2, x_3,\ldots,x_n; f)$ относительно расстояния Кемени f в том или ином пространстве бинарных отношений X [3]. Обратим внимание на роль пространства X. В зависимости от того, каково X, вычисление медианы может быть как весьма сложной задачей, так и элементарной.

Если X — пространство упорядочений (ранжировок), как в основополагающей книге Кемени и Снелла [9], то имеет место первый из этих случаев. Для нахождения медианы Кемени по выборке, состоящей из ранжировок, понадобилось разработать специальные достаточно сложные алгоритмы [6, 13].

Если же X — пространство всех бинарных отношений, то медиана Кемени элементарно находится по правилу большинства [19]. А именно, если у более чем половины матриц, описывающих входящие в выборку бинарные отношения, на определенном месте стоит 1, то и у медианы Кемени на этом месте стоит 1. Если для более чем половины матриц определенный элемент равен 0, то и у эмпирического среднего этот элемент равен 0. Если же число единиц и нулей совпадает (это возможно лишь при четном объеме выборки), то медиана Кемени определяется неоднозначно. Соответствующий элемент итоговой матрицы может равняться как 0, так и 1 — сумма расстояний от неё до элементов выборки одна и та же — минимальная из возможных. Это утверждение вытекает из аналогичного результата для подмножеств конечного множества, поскольку бинарные отношения — это подмножества декартова квадрата того множества, между элементами которого рассматриваются отношения. Поясним сказанное.

Если A и B — подмножества конечного множества $X = \{y_1, y_2,\ldots, y_k\}$, то, как показано в разделе 7.5, расстояние, обобщающее расстояние Кемени, имеет вид

$$d(A,B) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \mid \chi_A(y_j) - \chi_B(y_j) \mid,$$

где χ_C — индикатор (индикаторная функция) множества C, т.е. $\chi_C(x) = 1$, если $x \in C$, и $\chi_C(x) = 0$ в противном случае. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — та совокупность подмножеств X, для которой ищем эмпирическое среднее. Необходимо решить оптимизационную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i, z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \mu_j \left|\chi_{x_i}(y_j) - \chi_z(y_j)\right| \to \min, \quad z \subseteq X .$$

Ясно, что можно поменять местами суммы и решать задачу

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i, z) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_j \left|\chi_{x_i}(y_j) - \chi_z(y_j)\right|\right) \to \min, \quad z \subseteq X .$$

Эта задача допускает декомпозицию на k задач:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_j \left|\chi_{x_i}(y_j) - \chi_z(y_j)\right| \to \min, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad z \subseteq X .$$

Другими словами, для каждого элемента X по отдельности надо решить, включать его в эмпирическое среднее или нет. При конкретном j обозначим $\chi_{x_i}(y_i) = a_i$, $\chi_z(y_i) = b$. Тогда каждая из поэлементных задач имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b| \to \min, \ \ b \in \{0,1\},$$

причем каждое из a_i — либо 0, либо 1. Таким образом, надо найти минимум из двух величин:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i, n - \sum_{i=1}^{n} a_i\right\},$$

Первая из этих сумм соответствует $b = 0$, вторая — $b = 1$. Если первая сумма меньше, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < n - \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i < \frac{n}{2},$$

то следует положить $b = 0$, т.е. не включать элемент y_j в эмпирическое среднее. Если

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > n - \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i > \frac{n}{2},$$

то, наоборот, включать. Если же имеет место равенство,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n - \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2},$$

то оба варианта $b = 0$ и $b = 1$ дают одно и то же значение минимизируемой функции, и решение задачи оптимизации неоднозначно, эмпирическое среднее состоит из 2^t подмножеств, где t — число элементов X, для которых имеет место рассматриваемые равенства. Таким образом, решение принимается по правилу большинства.

Вернемся к медиане Кемени. В ее определении, строго говоря, участвуют не одно пространство бинарных отношений, а два. Первое — это пространство X_1, в котором лежат усредняемые бинарные отношения (мнения экспертов) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Второе — это пространство X_2, по элементам которого проводится минимизация (в котором ищется эмпирическое среднее как решение задачи оптимизации). Эти пространства могут различаться. Например, пусть X_1 — пространство всех бинарных отношений, а X_2 — пространство ранжировок без связей. Это значит, что итоговое мнение комиссии экспертов — строгое упорядочение, в то время как ответы экспертов могут включать в себя противоречия (не быть транзитивными). Возможна и противоположная постановка — пусть ответы экспертов — строгие упорядочения (ранжировки без связей), а итоговое мнение ищется среди кластеризованных ранжировок.

Выделение двух пространств бинарных отношений позволяет более адекватно обрабатывать ответы экспертов. Например, мнение эксперта, особенно если оно получено с применением процедуры парных сравнений, отнюдь не всегда свободно от противоречий (не всегда выполнена транзитивность). Чтобы применять классическую процедуру получения итогового мнения комиссии экспертов в виде медианы Кемени — Снелла [9], иногда рекомендуют предварительно корректировать мнения экспертов, избавляясь от противоречий. Естественно, при этом искажаются исходные мнения экспертов. Использование концепции «двух пространств бинарных отношений» позволяет избежать этого искажения и получить итоговое мнение комиссии экспертов, более адекватное исходным мнениям экспертов. Приведенные соображения важны, в частности, при использовании люсианов как моделей ответов экспертов ([30, гл.11], [31, гл.3]).

Вычисление медианы Кемени в общем случае — задача целочисленного программирования. Для ее нахождения используются различные алгоритмы дискретной математики, в частности, основанные на методе ветвей и границ. Применяют также алгоритмы, основанные на идее случайного поиска, поскольку для каждого бинарного отношения нетрудно найти множество его соседей.

Рассмотрим пример вычисления медианы Кемени. Пусть дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний для множества бинарных отношений из 9 элементов A_1, A_2, A_3,…, A_9 (см. табл.7.3). Найдем в этом множестве из 9 элементов *медиану* для выборки из 5 элементов $\{A_2, A_4, A_5, A_8, A_9\}$. (Здесь пространство X_2, по элементам которого проводится минимизация, состоит из 9 элементов A_1, A_2, A_3,…, A_9.)

Таблица 7.3

Матрица попарных расстояний

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	0	2	13	1	7	4	10	3	11
A_2	2	0	5	6	1	3	2	5	1
A_3	13	5	0	2	2	7	6	5	7
A_4	1	6	2	0	5	4	3	8	8
A_5	7	1	2	5	0	10	1	3	7
A_6	4	3	7	4	10	0	2	1	5
A_7	10	2	6	3	1	2	0	6	3
A_8	3	5	5	8	3	1	6	0	9
A_9	11	1	7	8	7	5	3	9	0

В соответствии с определением медианы Кемени следует ввести в рассмотрение функцию

$$C(A) = \sum_{i\in\{2,4,5,8,9\}} D\left(A_i, A\right) =$$

$$= D(A_2, A) + D(A_4, A) + D(A_5, A) + D(A_8, A) + D(A_9, A),$$

рассчитать ее значения для всех $A = A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9$ и выбрать наименьшее. Проведем расчеты:

$$C(A_1) = D(A_2, A_1) + D(A_4, A_1) + D(A_5, A_1) + D(A_8, A_1) + \\ + D(A_9, A_1) = 2 + 1 + 7 + 3 + 11 = 24,$$

$$C(A_2) = D(A_2, A_2) + D(A_4, A_2) + D(A_5, A_2) + D(A_8, A_2) + \\ + D(A_9, A_2) = 0 + 6 + 1 + 5 + 1 = 13,$$

$$C(A_3) = D(A_2, A_3) + D(A_4, A_3) + D(A_5, A_3) + D(A_8, A_3) + \\ + D(A_9, A_3) = 5 + 2 + 2 + 5 + 7 = 21,$$

$$C(A_4) = D(A_2, A_4) + D(A_4, A_4) + D(A_5, A_4) + D(A_8, A_4) + \\ + D(A_9, A_4) = 6 + 0 + 5 + 8 + 8 = 27,$$

$$C(A_5) = D(A_2, A_5) + D(A_4, A_5) + D(A_5, A_5) + D(A_8, A_5) + \\ + D(A_9, A_5) = 1 + 5 + 0 + 3 + 7 = 16,$$

$$C(A_6) = D(A_2, A_6) + D(A_4, A_6) + D(A_5, A_6) + D(A_8, A_6) + \\ + D(A_9, A_6) = 3 + 4 + 10 + 1 + 5 = 23,$$

$$C(A_7) = D(A_2, A_7) + D(A_4, A_7) + D(A_5, A_7) + D(A_8, A_7) + \\ + D(A_9, A_7) = 2 + 3 + 1 + 6 + 3 = 15,$$

$$C(A_8) = D(A_2, A_8) + D(A_4, A_8) + D(A_5, A_8) + D(A_8, A_8) + \\ + D(A_9, A_8) = 5 + 8 + 3 + 0 + 9 = 25,$$

$$C(A_9) = D(A_2, A_9) + D(A_4, A_9) + D(A_5, A_9) + D(A_8, A_9) + \\ + D(A_9, A_9) = 1 + 8 + 7 + 9 + 0 = 25.$$

Из всех вычисленных сумм наименьшая равна 13, и достигается она при $A = A_2$, следовательно, медиана Кемени — это множество $\{A_2\}$, состоящее из одного элемента A_2.

В данном случае медиана Кемени — одно из исходных экспертных мнений. В общем случае медиана Кемени может не совпадать ни с одним из мнений экспертов. Последнее обстоятельство является поводом для критики рассматриваемого способа усреднения. Действительно, если представить себе, что ответы экспертов равномерно распределены по поверхности бублика (в математической терминологии — тора), то может случиться так, что медиана Кемени — центр бублика, лежит в пустоте, следовательно, далека от мнений кого-либо из экспертов.

Выход из этого парадокса может быть найден путем изменения области минимизации $\{A\}$ в определении медианы Кемени. Действительно, если принять, что пространство X_2, по элементам которого проводится минимизация, совпадает с множеством ответов экспертов, то, очевидно, решением задачи минимизации будет одно из экспертных мнений. Такое эмпирическое среднее назовем «модифицированной медианой Кемени». Здесь наглядно видна польза концепции «двух пространств бинарных отношений».

Преимуществом модифицированной медианы Кемени является значительно меньшая вычислительная трудоемкость. Если для расчета медианы Кемени необходимо применять специальные алгоритмы дискретной оптимизации (см., например, [13]), то модифицированную медиану Кемени можно найти без привлечения компьютера, как это и продемонстрировано выше.

Дальнейшие результаты статистики нечисловых данных содержатся в специальной литературе, в частности, в учебниках [30, 31].

7.8. Непараметрические оценки плотности

Плотности распределения вероятностей используются при решении различных задач эконометрики. Так, согласно лемме Неймана-Пирсона оптимальное правило принятия решений при проверке статистических гипотез основано на отношении плотностей распределения вероятностей, соответствующих нулевой и альтернативной гипотезам. Непараметрическая оценка регрессионной зависимости строится путем замены неизвестной исследователю плотности совместного распределения на непараметрическую состоятельную оценку этой плотности (раздел 3.3 выше). Для решения задач классификации, как кластер-анализа, так и диагостики (дискриминации, распознавания образов с учителем), используют непараметрические оценки плотности [30, 31].

В главе 2 применялась эмпирическая функция распределения — состоятельная непараметрическая оценка функции распределения числовой случайной величины. А как оценить плотность? Если формально продифференцировать эмпирическую функцию распределения, то получим бесконечности в точках, соответствующих элементам выборки, и 0 во всех остальных. Ясно, что это не оценка плотности.

Как же действовать? Каждому элементу выборки соответствует в эмпирическом распределении вероятность $1/n$, где n — объем выборки. Целесообразно эту вероятность не помещать в одну точку, а «размазать» вокруг нее, построив «холмик». Если «холмики» налегают друг на друга, то получаем положительную плотность на всей прямой. Чтобы получить состоятельную оценку плотности, необходимо выбирать ширину «холмика» в зависимости от объема выборки. При этом число «холмиков», покрывающих фиксированную точку, должно безгранично расти. Но одновременно доле таких «холмиков» следует убывать, поскольку покрывающие «холмики» должны быть порождены лишь ближайшими членами вариационного ряда.

Реализация описанной идеи привела к различным вариантам непараметрических оценок плотности. Основополагающей является работа Н.В. Смирнова 1951 г. [37]. Вначале рассматривались непараметрические оценки плотности распределения числовых случайных величин и конечномерных случайных векторов. В 1980-х годах удалось сконструировать такие оценки в пространствах произвольной природы [25], а затем и для конкретных видов нечисловых данных [28].

О гистограммах. При описании числовых данных часто используют гистограммы. При этом область изменения случайной переменной разбивают на интервалы равной длины, подсчитывают число попаданий в каждый интервал и строят соответствующую столбиковую диаграмму. Она напоминает график плотности. И действительно, Н.В. Смирнов показал в работе [37], что последовательность гистограмм при определенных условиях сходится к плотности.

Процедура построения гистограммы зависит от субъективного мнения статистика. Не существует научно обоснованных правил выбора числа интервалов и их длины. Рекомендации по этому поводу, приводимые в различных изданиях, отражают лишь традицию и/или субъективное мнение авторов.

К настоящему времени разработано много методов оценивания плотности распределения. О некоторых из них речь пойдет ниже. Что же касается гистограмм, то с научной точки зрения их надо отнести к истории статистики.

Непараметрические оценки плотности в пространствах произвольной природы. Сначала рассмотрим непараметрические оценки плотности в наиболее общей ситуации. Напомним, что в нечисловой статистике выделяют общую теорию и статистику в конкретных пространствах нечисловой природы (например, статистику ранжировок). В общей теории есть два основных сюжета. Один связан со средними величинами и асимптотическим поведением решений экстремальных статистических задач, второй — с непараметрическими оценками плотности. Первый сюжет рассмотрен выше, второму посвящен настоящий раздел.

Понятие плотности в пространстве произвольной природы X требует специального обсуждения. В пространстве X должна быть выделена некоторая специальная мера μ, относительно которой будут рассматриваться плотности, соответствующие другим мерам, например, мере ν, задающей распределение вероятностей некоторого случайного элемента ξ. В таком случае $\nu = (A) = P(\xi \in A)$ для любого случайного события A. Плотность $f(x)$, соответствующая мере ν — это такая функция, что

$$\nu(A) = \int_A f(x) d\mu$$

для любого случайного события A. Для случайных величин и векторов мера μ — это объем множества A, в математических терминах — мера Лебега. Для дискретных случайных величин и элементов со значениями в конечном множестве X в качестве меры μ естественно использовать считающую меру, которая событию A ставит в соответствие число его элементов. Используют также нормированную случайную меру, когда число точек в множестве A делят на число точек во всем пространстве X. В случае считающей меры значение плотности в точке x совпадает с вероятностью попасть в точку x, т.е. $f(x) = P(\xi = x)$. Таким образом, с рассматриваемой точки зрения стирается грань между понятиями «плотность вероятности» и «вероятность (попасть в точку)».

Как могут быть использованы непараметрические оценки плотности распределения вероятностей в пространствах нечисловой природы? Например, для решения задач классификации (диагностики, распознавания образов) [30, 31]. Зная плотности распределения классов, можно решать основные задачи диагностики — как задачи выделения кластеров, так и задачи отнесения вновь поступающего объекта к одному из диагностических классов. В задачах кластер-анализа можно находить моды плотности и принимать их за центры кластеров или за начальные точки итерационных методов типа k-средних или динамических сгущений. В задачах собственно диагностики (дискриминации, распознавания образов с учителем) можно принимать решения о диагностике объектов на основе отношения плотностей, соответствующих классам. При неизвестных плотностях представляется естественным использовать их состоятельные оценки.

Методы оценивания плотности вероятности в пространствах общего вида предложены и первоначально изучены в работе [25]. В частности, в задачах диагностики объектов нечисловой природы предлагаем использовать непараметрические ядерные оценки плотности типа Парзена — Розенблатта (этот вид оценок и его название впервые были введены в статье [25]). Они имеют вид:

$$f_n(x) = \frac{1}{\eta_n(h_n, x)} \sum_{1 \le i \le n} K(\frac{d(x_i, x)}{h_n}),$$

где K: $R_+^1 \to R^1$ — так называемая ядерная функция, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, — выборка, по которой оценивается плотность, $d(x_i, x)$ — показатель различия (метрика, расстояние, мера близости) между элементом выборки x_i и точкой x, в которой оценивается плотность, последовательность h_n показателей размытости такова, что $h_n \to 0$ и $nh_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $\eta_n(h_n, x)$ — нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение условия нормировки (интеграл по всему пространству от непараметрической оценки плотности $f_n(x)$ по мере μ должен равняться 1). Ранее американские исследователи Е. Парзен и М. Розенблатт использовали подобные статистики в случае $X = R^1$ с $d(x_i, x) = |x_i - x|$.

Введенные описанным образом ядерные оценки плотности — частный случай так называемых линейных оценок, также впервые предложенных в работе [25]. В теоретическом плане они выделяются тем, что удается получать результаты такого же типа, что в классическом одномерном случае, но, разумеется, с помощью совсем иного математического аппарата.

Свойства непараметрических ядерных оценок плотности. Рассмотрим выборку со значениями в некотором пространстве произвольного вида. В этом пространстве предполагаются заданными показатель различия d и мера μ. Одна из основных идей рассматриваемого подхода состоит в том, чтобы согласовать их между собой. А именно, на их основе построим новый показатель различия d_1, так называемый «естественный», в терминах которого проще формулируются свойства непараметрической оценки плотности. Для этого рассмотрим шары $L_t(x) = \{y \in X: d(y, x) \leqslant t\}$ радиуса $t \geqslant 0$ и их меры $F_x(t) = \mu(L_t(x))$. Предположим, что $F_x(t)$ как функция t при фиксированном x непрерывна и строго возрастает. Введем функцию $d_1(x,y) = F_x(d(x,y))$. Это — монотонное преобразование показателя различия или расстояния, а потому $d_1(x,y)$ — также показатель различия (даже если d — *метрика,* для d_1 неравенство треугольника может быть не выполнено). Другими словами, $d_1(x,y)$, как и $d(x,y)$, можно рассматривать как показатель различия (меру близости) между x и y.

Для вновь введенного показателя различия $d_1(x,y)$ введем соответствующие шары $L_{1t}(x) = \{y \in X : d_1(y, x) \leqslant t\}$. Поскольку обратная функция $F^{-1}_x(t)$ определена однозначно, то

$$L_{1t}(x) = \{y \in X : d_1(y,x) \leqslant F_x^{-1}(t)\} = L_T(x) \ ,$$

где $T = F^{-1}_x(t)$. Следовательно, справедлива цепочка равенств $F^1_x(t) = \mu\ (L_{1t}(x)) = \mu\ (L_T(x)) = F_x(F^{-1}_x(t)) = t$ (для всех тех значений параметра t, для которых определены все участвующие в записи математические объекты).

Переход от d к d_1 напоминает классическое преобразование, использованное Н.В. Смирновым при изучении непараметрических критериев согласия и однородности, а именно, преобразование $\eta = F(\xi)$, переводящее случайную величину ξ с непрерывной функцией распределения $F(x)$ в случайную величину η, равномерно распределенную на отрезке [0,1]. Оба рассматриваемых преобразования существенно упрощают дальнейшие рассмотрения. Преобразование $d_1 = F_x(d)$ зависит от точки x, что не влияет на дальнейшие рассуждения, поскольку ограничиваемся изучением сходимости в отдельно взятой точке.

Функцию $d_1(x,y)$, для которой мера шара радиуса t равна t, называем в соответствии с работой [25] «естественным показателем различия» или «естественной метрикой». В случае конечномерного пространства R^k и евклидовой метрики d имеем $d_1(x,y) = c_k d^k(x,y)$, где c_k — объем шара единичного радиуса в R^k .

Поскольку можно записать, что

$$K\left(\frac{d(x_i,x)}{h_n}\right) = K_1\left(\frac{d_1(x_i,x)}{h_n}\right),$$

где

$$K_1(u) = K\left(\frac{F_x^{-1}(uh_n)}{h_n}\right),$$

то переход от одного показателя различия к другому, т.е. от d к d_1, соответствует переходу от одной ядерной функции к другой, т.е. от K к K_1. Выгода от такого перехода заключается в том, что утверждения о поведении непараметрических оценок плотности приобретают более простую формулировку.

Теорема 7.13. Пусть d — естественная метрика, плотность f непрерывна в точке x и ограничена на всем пространстве X , причем $f(x) > 0$, *ядерная функция* $K(u)$ *удовлетворяет простым условиям регулярности*

$$\int_0^1 K(u)du = 1, \int_0^\infty (|K(u)| + K^2(u))du < \infty .$$

Тогда $\eta_n(h_n, x) = nh_n$, *оценка* $f_n(x)$ *является состоятельной, т.е.* $f_n(x) \to f(x)$ *по вероятности при* $n \to \infty$ *и, кроме того,*

$$\lim_{n\to\infty}(nh_n Df_n(x)) = f(x)\int_0^{+\infty} K^2(u)du. .$$

Теорема 7.13 доказывается методами, развитыми в работе [25]. Однако остается открытым вопрос о скорости сходимости ядерных оценок, в частности, о поведении величины $\alpha_n = M(f_n(x)\text{-}f(x))^2$ — среднего квадрата ошибки, и об оптимальном выборе показателей размытости h_n . Для того, чтобы продвинуться в решении этого вопроса, введем новые понятия. Для случайного элемента $X(\omega)$ со значениями в X рассмотрим т.н. круговое распределение $G(x,t) = P\{d(X(\omega), x) \leqslant t\}$ и круговую плотность $g(x,t) = G'_t(x,t)$.

Теорема 7.14. *Пусть ядерная функция* $K(u)$ *непрерывна и финитна, т.е. существует число E такое, что* $K(u) = 0$ *при* $u > E$. *Пусть круговая плотность является достаточно гладкой, т.е. допускает разложение*

$$g(x,t) = f(x) + tg_t^{'}(x,0) + \frac{t^2}{2} g_{tt}^{''}(x,0) + \frac{t^3}{3!} g_{ttt}^{'''}(x,0) + \ldots + \frac{t^k}{k!} g_{t^{(k)}}^{(k)}(x,0) + o(h_n^k)$$

при некотором натуральном k, причем остаточный член равномерно ограничен на $[0, hE]$. *Пусть*

$$\int_0^E u^i K(u)du = 0, i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Тогда

$$\alpha_n = [Mf_n(x) - f(x)]^2 + Df_n(x) =$$

$$= h_n^{2k}\left(\int_0^E u^k K(u)du\right)^2 (g_{t^{(k)}}^k(x,0))^2 + \frac{f(x)}{nh_n}\int_0^E K^2(u)du + o\left(h_n^{2k} + \frac{1}{nh_n}\right).$$

Доказательство теоремы 7.14 проводится с помощью разработанной в нечисловой статистике математической техники, образцы которой представлены, в частности, в работе [25]. Если коэффициенты при основных членах в правой части последней формулы не равны 0, то величина α_n достигает минимума, равного $\alpha_n = O\left(n^{-1+\frac{1}{2k+1}}\right)$, при $h_n = n^{-\frac{1}{2k+1}}$. Эти выводы совпадают с классическими результатами, полученными ранее рядом авторов для весьма частного случая прямой $X = R^1$ (см., например, монографию [7, с.316]). Заметим, что для уменьшения смещения оценки приходится применять знакопеременные ядра $K(u)$.

Непараметрические оценки плотности в конечных пространствах [28]. В случае пространств из конечного числа элементов естественных метрик не существует. Однако можно получить аналоги теорем 7.13 и 7.14, переходя к пределу не только по объему выборки n, но и по новому параметру дискретности m.

Рассмотрим некоторую последовательность X_m, $m = 1, 2, \ldots$, конечных пространств. Пусть в X_m заданы показатели различия d_m. Будем использовать нормированные считающие меры μ_m ставящие в соответствие каждому подмножеству A долю элементов всего пространства X_m, входящих в A. Как и ранее, рассмотрим как функцию t объем шара радиуса t, т.е.

$$F_{mx}(t) = \mu_m(\{y \in X_m : d_m(x,y) \le t\}).$$

Введем аналог естественного показателя различия $d_{1m}(x, y) = F_{mx}(d_m(x, y))$. Наконец, рассмотрим аналоги преобразования Смирнова $F^1_{mx}(t) = \mu_m(\{y \in X_m : d_{1m}(x, y) \leqslant t\})$. Функции $F^1_{mx}(t)$, в отличие от ситуации предыдущего раздела, уже не совпадают тождественно с t, они кусочно-постоянны и имеют скачки в некоторых точках t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем в этих точках $F^1_{mx}(t) = t_i$.

Теорема 7.15. *Пусть точки скачков равномерно сближаются, т.е.* $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$ *при* $m \to \infty$ (*другими словами*, $\sup|F^1_{mx}(t) - t| \to 0$ *при* $m \to \infty$). *Тогда существует последовательность параметров дискретности* m_n *такая, что при предельном переходе* $n \to \infty$, $m \to \infty$, $m \geqslant m_n$ *справедливы заключения теорем 7.13 и 7.14*.

Пример 1. Пространство $X_m = 2^{\sigma(m)}$ всех подмножеств конечного множества $\sigma(m)$ из m элементов допускает (см. раздел 7.5 или монографию [19]) аксиоматическое введение метрики $d(A, B) = card(A\Delta B)/2^m$, где δ — символ симметрической разности множеств. Рассмотрим непараметрическую ядерную оценку плотности типа Парзена — Розенблатта

$$f_{nm}(A) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{1}{h_n}\Phi\left(\frac{2card(A\Delta X_i) - m}{\sqrt{m}}\right)\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция нормального стандартного распределения. Можно показать, что эта оценка удовлетворяет условиям теоремы 7.15 с $m_n = (\ln n)^6$.

Пример 2. Рассмотрим пространство функций $f : Y_r \to Z_q$, определенных на конечном множестве $Y_r = \{1/r, 2/r, \ldots, (r - 1)/r, 1\}$, со значениями в конечном множестве $Z_q = \{0, {}^1/_q, {}^2/_q, \ldots, {}^{q-1}/_q, 1\}$. Это пространство можно интерпретировать как пространство нечетких множеств (см. раздел 7.2), а именно, Y_r — носитель нечеткого множества, а Z_q — множество значений функции принадлежности. Очевидно, число элементов пространства X_m равно $(q+1)^r$. Будем использовать расстояние $d(f, g) = \sup|f(y) - g(y)|$ в этом пространстве. Непараметрическая оценка плотности имеет вид:

$$f_{nm}(x)=\frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{[2\sup_y|x(y)-x_i(y)|+1/q]^r}{h_n(1+1/q)^r}\right).$$

Если $r = n^{\alpha}$, $q = n^{\beta}$, то при $\beta > \alpha$ выполнены условия теоремы 7.15, а потому справедливы теоремы 7.13 и 7.14.

Пример 3. Рассматривая пространства ранжировок m объектов, в качестве расстояния $d(A,B)$ между ранжировками A и B примем минимальное число инверсий, необходимых для перехода от A к B. Тогда $\max(t_i - t_{i-1})$ не стремится к 0 при $m \to \infty$, условия теоремы 7.15 не выполнены.

Пример 4. В прикладных работах наиболее распространенный пример объектов нечисловой природы — вектор разнотипных данных: реальный объект описывается вектором, часть координат которого — значения количественных признаков, а часть — качественных (номинальных и порядковых). Для пространств разнотипных признаков, т.е. декартовых произведений непрерывных и дискретных пространств, возможны различные постановки. Пусть, например, число градаций качественных признаков остается постоянным. Тогда непараметрическая оценка плотности сводится к произведению двух величин — частоты попадания в точку в пространстве качественных признаков и классической оценки типа Парзена-Розенблатта в пространстве количественных переменных. В общем случае расстояние $d(x,y)$ можно, например, рассматривать как сумму трех расстояний. А именно, евклидова расстояния d_1 между количественными факторами, расстояния d_2 между номинальными признаками ($d_2(x,y) = 0$, если $x = y$, и $d_2(x,y) = 1$, если $x \neq y$) и расстояния d_3 между порядковыми переменными (если x и y — номера градаций, то $d_3(x,y) = |x - y|$). Наличие количественных факторов приводит к непрерывности и строгому возрастанию функции $F_{mx}(t)$, а потому для непараметрических оценок плотности в пространствах разнотипных признаков верны теоремы 7.13– 7.14.

Программная реализация описания данных с помощью непараметрических оценок плотности включена в ряд программных продуктов по прикладной статистике, в частности, в пакет программ анализа данных ППАНД [33].

Литература

1. *Беляев Ю.К.* Вероятностные методы выборочного контроля. — М.: Наука, 1975. — 408 с.

2. *Борель Э.* Вероятность и достоверность. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 120 с.

3. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. — 910 с.

4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. Изд. 7-е, исправл. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 320 с.

5. *Дэвид Г.* Метод парных сравнений. — М.: Статистика, 1978.- 144 с.

6. *Жихарев В.Н., Орлов А.И.* Законы больших чисел и состоятельность статистических оценок в пространствах произвольной природы. — В сб.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. — Пермь: Изд-во Пермского государственного университета, 1998. С.65–84.

7. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979. — 528 с.

8. *Келли Дж.* Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 384 с.

9. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения. — М.: Советское радио, 1972. — 192 с.

10. *Кендалл М.Дж., Стъюарт А.* Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973. — 900 с.

11. *Кендэл М.* Ранговые корреляции. — М.: Статистика, 1975. — 216 с.

12. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

13. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация. Методы получения и анализа. — М.: Радио и связь, 1982. –184 с.

14. *Лумельский Я.П.* Статистические оценки результатов контроля качества. — М.: Изд-во стандартов, 1979. — 200 с.

15. *Льюс Р., Галантер Е.* Психофизические шкалы // Психологические измерения. — М.: Мир, 1967. — С.111–195.

16. *Окстоби Дж.* Мера и категория. — М.: Мир, 1974. — 158 с.

17. Организация и планирование машиностроительного производства (производственный менеджмент): Учебник / К.А. Грачева, М.К. Захарова, Л.А. Одинцова и др. Под ред. Ю.В. Скворцова, Л.А. Некрасова. — М.: Высшая школа, 2003. — 470 с.

18. *Орлов А.И.* Связь между нечеткими и случайными множествами: Нечеткие толерантности // Исследования по вероятностно-ста-

тистическому моделированию реальных систем. — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1977. — С.140–148.

19. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

20. *Орлов А.И.* Случайные множества с независимыми элементами (люсианы) и их применения. — В сб.: Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. Ученые записки по статистике, т.36. — М.: Наука, 1980. — С. 287–308.

21. *Орлов А.И.* Задачи оптимизации и нечеткие переменные. — М.: Знание, 1980. — 64 с.

22. *Орлов А.И.* Парные сравнения в асимптотике Колмогорова. — В сб.: Экспертные оценки в задачах управления. — М.: Изд-во Института проблем управления АН СССР, 1982. — С. 58–66.

23. *Орлов А.И.* Асимптотика решений экстремальных статистических задач. — В сб.: Анализ нечисловых данных в системных исследованиях. Сборник трудов. Вып.10. — М.: Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований, 1982. С. 4–12.

24. *Орлов А.И.* Логистическое распределение. — В сб.: Математическая энциклопедия. Т.3. — М.: Советская энциклопедия, 1982. — С.414.

25. *Орлов А.И.* Непараметрические оценки плотности в топологических пространствах. — В сб.: Прикладная статистика. Ученые записки по статистике, т.45. — М.: Наука, 1983. — С. 12–40.

26. *Орлов А.И.* Асимптотика некоторых оценок размерности модели в регрессии. — В сб.: Прикладная статистика. Ученые записки по статистике, т.45. — М.: Наука, 1983. С.260–265.

27. *Орлов А.И.* Вероятностные модели конкретных видов объектов нечисловой природы. — Журнал «Заводская лаборатория». 1995. Т.61. №5. С.43–51.

28. *Орлов А.И.* Ядерные оценки плотности в пространствах произвольной природы. — В сб.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. — Пермь: Пермский госуниверситет, 1996, с.68–75.

29. *Орлов А.И.* Эконометрика. Учебник для вузов. Изд. 3-е, исправленное и дополненное. — М.: Изд-во «Экзамен», 2004. — 576 с.

30. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Наука, 2006. — 671 с.

31. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование. Часть 1. Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 544 с.

32. *Орлов А.И., Раушенбах Г.В.* Метрика подобия: аксиоматическое введение, асимптотическая нормальность // Статистические методы

оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. — Пермь: Изд-во Пермского государственного университета, 1986, с.148–157.

33. Пакет программ анализа данных “ППАНД”. Учебное пособие / Орлов А.И., Легостаева И.Л. и еще 9 соавторов. — М.: Сотрудничающий центр ВОЗ по профессиональной гигиене, 1990. — 93 с.

34. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.) — М.: Наука, 1973.- 496 с.

35. *Раушенбах Г.В.* Меры близости и сходства // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. — М.; Наука, 1986. — С.169–203.

36. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980. — 456 с.

37. *Смирнов Н.В.* О приближении плотностей распределения случайных величин. — Ученые записки МГПИ им. В.П.Потемкина. 1951. Т.XVI. Вып.3. С. 69–96.

38. *Толстова Ю.Н.* Измерение в социологии. — М: Инфра-М, 1998.- 184 с.

39. *Тюрин Ю.Н., Василевич А.П., Андрукович П.Ф.* Статистические модели ранжирования. — В сб.: Статистические методы анализа экспертных оценок. — М.: Наука, 1977. — С.30–58.

40. *Четыркин Е.М., Васильева Н.Е.* Выборочные методы в аудите. — М.: Дело, 2003. — 144 с.

41. *Шубкин В.П.* Социологические опыты. — М.: Мысль, 1970. — 256 с.

42. *Щукина Г.И.* Проблема познавательного интереса в педагогике. — М.: Педагогика, 1971. — 352 с.

Контрольные вопросы и задачи

1. Приведите примеры практического использования количественных и категоризованных данных.

2. Как соотносятся группы допустимых преобразований для различных шкал измерения?

3. Почему анализ нечисловых данных занимает одно из центральных мест в прикладной статистике?

4. Какая математическая модель используется для описания случайного множества?

5. Докажите, что для блочного расстояния (пример 4 из раздела 7.4) справедливо неравенство треугольника.

6. Расскажите о многообразии расстояний в различных пространствах статистических данных.

7. Докажите, что если $d(x, y)$ — расстояние в некотором пространстве, то $\sqrt{d(x, y)}$ — также расстояние в этом пространстве.

8. Как бинарные отношения описываются матрицами из 0 и 1?

9. Выпишите матрицу из 0 и 1, соответствующую бинарному отношению (кластеризованной ранжировке) $5 < \{1, 3\} < 4 < 2 < \{6, 7\}$.

10. Что такое расстояние Кемени и медиана Кемени?

11. Найдите расстояние Кемени между бинарными отношениями — упорядочениями $A = [3 < 2 < 1 < \{4,5\}]$ и $B = [1 < \{2, 3\} < 4 < 5]$.

12. Дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний (мер различия) для множества бинарных отношений из 9 элементов $X_2 = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9\}$ (табл.7.4). Найдите в этом множестве медиану Кемени и модифицированную медиану Кемени для выборки из 5 элементов $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_9\}$.

Таблица 7.4

Попарные расстояния между бинарными отношениями

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	0	5	3	6	7	4	10	3	11
A_2	5	0	5	6	10	3	2	5	7
A_3	3	5	0	8	2	7	6	5	7
A_4	6	6	8	0	5	4	3	8	8
A_5	7	10	2	5	0	10	8	3	7
A_6	4	3	7	4	10	0	2	3	5
A_7	10	2	6	3	8	2	0	6	3
A_8	3	5	5	8	3	3	6	0	9
A_9	11	7	7	8	7	5	3	9	0

13. Чем закон больших чисел для медианы Кемени отличается от «классического» закона больших чисел, известного в статистике?

14. Как соотносятся эмпирические и теоретические средние величины для числовых данных и в пространствах произвольной природы?

15. Как соотносятся законы больших чисел для числовых случайных величин и в пространствах произвольной природы?

16. Почему описание числовых данных с помощью непараметрических оценок плотности предпочтительнее их описания с помощью гистограмм?

17. Можно ли строить непараметрические оценки плотности для результатов наблюдений из дискретных пространств?

Темы докладов, рефератов, исследовательских работ

1. Содержание первого сочинения по прикладной статистике — книги «Числа» в Библии.

2. Взаимосвязи различных классов объектов нечисловой природы между собой.

3. Вероятностные модели бинарных отношений.

4. Вероятностные модели парных сравнений.

5. Методы теории люсианов в теории и практике экспертных оценок.

6. Центральная роль статистики объектов произвольной природы в прикладной статистике.

7. Расстояния в пространствах функций.

8. Докажите, что аксиоматически введенный в разделе 7.5 показатель различия между множествами $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ удовлетворяет неравенству треугольника.

9. Расстояние Кемени и медиана Кемени в экспертных оценках.

10. Рассчитайте модифицированную медиану Кемени упорядочения 7 инвестиционных проектов, приведенных в табл.5.4 главы 5 (задача 13).

11. Средние величины в теории и практике анализа статистических данных.

12. Средние и законы больших чисел в пространстве упорядочений.

13. Законы больших чисел в пространствах нечисловой природы.

14. Непараметрические оценки плотности в непрерывных и дискретных пространствах.

15. Использование непараметрических оценок плотности для восстановления зависимости.

16. Применение общих результатов нечисловой статистики в конкретных областях прикладной статистики.

Теоретические инструменты эконометрики

В настоящем приложении собраны основные математические результаты, постоянно используемые при обосновании эконометрических методов и моделей. Эти теоретические инструменты отнюдь не всегда легко найти в литературе по теории вероятностей и математической статистике. Например, такие рассматриваемые далее теоремы и методы, как многомерная центральная предельная теорема, теоремы о наследовании сходимости и метод линеаризации, даже не включены в энциклопедию «Вероятность и математическая статистика» [3] — наиболее полный, по мнению составителей, свод знаний по заявленной тематике. Последний факт наглядно демонстрирует разрыв между математической дисциплиной «теория вероятностей и математическая статистика» и потребностями организационно-экономического моделирования.

П.1.1. Законы больших чисел

Законы больших чисел позволяют описать поведение сумм случайных величин. Примером является следующий результат, доказанный русским математиком П.Л.Чебышевым (1821–1894) в 1867 г. Пусть сначала вероятностное пространство состоит из конечного числа элементов.

Теорема П.1.1. (теорема Чебышёва). *Пусть случайные величины X_1, X_2,…, X_k попарно независимы и существует число C такое, что $D(X_i) \leqslant C$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда для любого положительного числа* ε *выполнено неравенство*

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_k}{k} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_k)}{k}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{C}{k\varepsilon^2} \tag{П1.1}$$

Частным случаем теоремы Чебышева является теорема Бернулли — первый в истории вариант закона больших чисел. Известный математики Якоб Бернулли (1654–1705), живший в городе Базель в Швейцарии, в самом конце XVII века доказал это утверждение в рамках математической модели (опубликовано доказательство было лишь после его смерти, в 1713 году). Современная формулировка теоремы Бернулли такова.

Теорема П.1.2 (теорема Бернулли). *Пусть m — число наступлений события A в k независимых* (*попарно*) *испытаниях, и p есть вероятность наступления события A в каждом из испытаний. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$P\left\{\left|\frac{m}{k}-p\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{p(1-p)}{k\varepsilon^2}. \quad (\text{П}1.2)$$

Ясно, что при росте k выражения в правых частях формул (П1.1) и (П1.2) стремятся к 0. Таким образом, среднее арифметическое попарно независимых случайных величин сближается со средним арифметическим их математических ожиданий.

Напомним, что выше шла речь лишь о пространствах элементарных событий из конечного числа элементов. Однако приведенные теоремы верны и в общем случае, для произвольных пространств элементарных событий. Однако в список условий закона больших чисел необходимо добавить требование существования дисперсий. Легко видеть, что если существуют дисперсии, то существуют и математические ожидания. Закон больших чисел в форме Чебышёва приобретает следующий вид.

Теорема П.1.3 (теорема Чебышёва) [4, с.147]. *Если X_1, X_2,..., X_k,... — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной,*

$$D(X_1)\leqslant C,\ D(X_2)\leqslant C, \dots\ D(X_i)\leqslant C, \dots$$

то, каково бы ни было постоянное число $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} MX_j\right| < \varepsilon\right\} = 1.. \quad (П1.3)$$

С точки зрения прикладных статистических исследований ограниченность дисперсий вполне естественна. Она вытекает, например, из ограниченности диапазона изменения практически всех величин, используемых при реальных расчетах.

В 1923 г. А.Я. Хинчин показал, что если случайные величины не только независимы, но и одинаково распределены, то существование у них математического ожидания является необходимым и достаточным условием для применимости закона больших чисел [4, с.150]. Найдены и более экзотические варианты закона больших чисел. Например, такой.

Теорема П.1.4 [4, с.150– 151]. *Для того чтобы для последовательности* $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ (*как угодно зависимых*) *случайных величин при любом положительном* ε *выполнялось соотношение* (П1.3), *необходимо и достаточно, чтобы* при $n \to \infty$

$$M\frac{\left(\sum_{j=1}^{k}(X_j - MX_j)\right)^2}{n^2 + \left(\sum_{j=1}^{k}(X_j - MX_j)\right)^2} \to 0..$$

Законы больших чисел для случайных величин служат основой для аналогичных утверждений для случайных элементов в пространствах более сложной природы. В частности, в пространствах произвольной природы (см. главу 7 выше). Однако здесь мы ограничимся классическими формулировками, служащими основой для современных статистических методов.

Смысл классических законов больших чисел состоит в том, что выборочное среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин приближается (сходится) к математическому ожиданию этих величин. Другими словами, *выборочные средние сходятся к теоретическому среднему.*

Это утверждение справедливо и для других видов средних. Например, выборочная медиана сходится к теоретической медиане. Это утверждение — тоже закон больших чисел, но не классический.

Существенным продвижением в теории вероятностей во второй половине XX в. явилось введение средних величин в пространствах произвольной природы и получение для них законов больших чисел, т.е. утверждений, состоящих в том, что эмпирические (т.е. выборочные) средние сходятся к теоретическим средним.

П.1.2. Центральные предельные теоремы

Простейший вариант Центральной предельной теоремы (ЦПТ) теории вероятностей таков.

Теорема П.1.5 (Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых). *Пусть X_1, X_2,…, X_n, …— независимые одинаково распределенные случайные величины с математическими ожиданиями $M(X_i) = m$ и дисперсиями $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2,\ldots, n,\ldots$ Тогда для любого действительного числа x существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}dy, ,$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Эту теорему иногда называют теоремой Линдеберга-Леви [9, с.122].

В ряде прикладных задач не выполнено условие одинаковой распределенности. В таких случаях центральная предельная теорема обычно остается справедливой, однако на последовательность случайных величин приходится накладывать те или иные условия. Суть этих условий состоит в том, что ни одно слагаемое не должно быть доминирующим, вклад каждого слагаемого в среднее арифметическое должен быть пренебрежимо мал по сравнению с итоговой суммой. Наиболее часто используется теорема Ляпунова.

Теорема П.1.6 (теорема Ляпунова — Центральная предельная теорема для разнораспределенных слагаемых). *Пусть X_1, X_2,..., X_n, ...— независимые случайные величины с математическими ожиданиями $M(X_i) = m_i$ и дисперсиями $D(X_i) = \sigma_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Пусть при некотором $\delta >$ 0 у всех рассматриваемых случайных величин существуют центральные моменты порядка $2+\delta$* и *безгранично убывает «дробь Ляпунова»*:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} M \mid X_k - m_k \mid^{2+\delta} = 0, ,$$

где

$$B_k^2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 = D\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \right). .$$

Тогда для любого действительного числа x существует предел

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - m_1 - m_2 - \ldots - m_n}{B_n} < x \right) = \Phi(x), ,$$

(П1.4)

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

В случае одинаково распределенных случайных слагаемых

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m, \quad B_n = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sigma\sqrt{n},$$

и теорема Ляпунова переходит в теорему Линдеберга-Леви.

История получения центральных предельных теорем для случайных величин растянулась на два века — от первых работ Муавра в 30-х годах XVIII века для необходимых и достаточных условий, полученных Линдебергом и Феллером в 30-х годах 20-го века.

Теорема П.1.7 (теорема Линдеберга — Феллера). *Пусть* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *— независимые случайные величины с математическими ожиданиями* $M(X_i) = m_i$ *и дисперсиями* $D(X_i) = \sigma_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ *Предельное соотношение* (П1.4), *т.е. центральная предельная теорема, выполнено тогда и только тогда, когда при любом* $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-m_k|>\tau B_n} (x-m_k)^2 \, dF_k(x) = 0,$$

где $F_k(x)$ *обозначает функцию распределения случайной величины* X_k.

Доказательства перечисленных в настоящем разделе центральных предельных теорем для случайных величин можно найти в классическом курсе теории вероятностей [4].

Для обоснования многих статистических методов большое значение имеет многомерная центральная предельная теорема. В ней речь идет не о сумме случайных величин, а о сумме случайных векторов.

Теорема П.1.8 (**необходимое и достаточное условие многомерной сходимости** [9, с.124]). *Пусть* F_n *обозначает совместную функцию распределения k-мерного случайного вектора* $(X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(k)})$, $n = 1, 2, \ldots,$ *и* $F_{\lambda n}$ *— функция распределения линейной комбинации* $\lambda_k X_n^{(1)} + \ldots + \lambda_k X_n^{(k)}$. *Необходимое и достаточное условие для сходимости* F_n *к некоторой k-мерной функции распределения F состоит в том, что* $F_{\lambda n}$ *имеет предел для любого вектора* λ.

Приведенная теорема ценна тем, что с ее помощью сходимость векторов сводится к сходимости линейных комбинаций их координат, т.е. к сходимости обычных случайных величин, рассмотренных ранее. Однако она не дает возможности непосредственно указать предельное распределение. Это можно сделать с помощью следующей теоремы.

Теорема П.1.9 (теорема о многомерной сходимости). *Пусть F_n и $F_{\lambda n}$ — те же, что в предыдущей теореме. Пусть F — совместная функция распределения k-мерного случайного вектора (X_1, ..., X_k). Если функция распределения $F_{\lambda n}$ сходится при росте объема выборки к функции распределения F_λ для любого вектора λ, где F_λ — функция распределения линейной комбинации $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_k X_k$, то F_n сходится к F.*

Здесь сходимость F_n к F означает, что для любого k-мерного вектора (x_1, ..., x_k) такого, что функция распределения F непрерывна в (x_1, ..., x_k), числовая последовательность $F_n(x_1, \ldots, x_k)$, сходится при росте n к числу $F(x_1, \ldots, x_k)$. Другими словами, сходимость функций распределения понимается точно так же, как при обсуждении предельных теорем для случайных величин выше. Приведем многомерный аналог этих теорем.

Теорема П.1.10 (многомерная центральная предельная теорема) [9]. *Рассмотрим независимые одинаково распределенные k-мерные случайные вектора*

$$U_n^{'} = (U_{1n}, \ldots, U_{kn}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где штрих обозначает операцию транспонирования вектора. Предположим, что случайные вектора $\mathrm{U_n}$ имеют моменты первого и второго порядка, т.е.

$$M(U_n) = \mu,\ D(U_n) = \Sigma,$$

где μ — вектор математических ожиданий координат случайного вектора, Σ — его ковариационная матрица. Введем последовательность средних арифметических случайных векторов:

$$\overline{U}_n = (\overline{U}_{1n}, \ldots, \overline{U}_{kn}), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \overline{U}_{in} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U_{ij}. \, .$$

Тогда случайный вектор $\sqrt{n}(\overline{U}_n - \mu)$ *имеет асимптотическое k-мерное нормальное распределение* $N_k(0, \Sigma)$, *т.е. он асимптотически распределен так же, как k-мерная нормальная* *величина с нулевым математическим ожиданием, ковариационной* Σ *и плотностью*

$$N_k(u \mid 0, \Sigma) = (2\pi)^{-k/2} \mid \Sigma \mid^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}u'\Sigma^{-1}u\right\}..$$

Здесь $|\Sigma|$ *— определитель матрицы* Σ. *Другими словами, распределение случайного вектора* $\sqrt{n}(\overline{U}_n - \mu)$ *сходится к k-мерному нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей* Σ.

Напомним, что многомерным нормальным распределением с математическим ожиданием μ и ковариационной матрицей Σ называется распределение, имеющее плотность

$$N_k(u \mid \mu, \Sigma) = (2\pi)^{-k/2} \mid \Sigma \mid^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(u-\mu)'\Sigma^{-1}(u-\mu)]\right\}..$$

Многомерная центральная предельная теорема показывает, что распределения сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов при большом числе слагаемых хорошо приближаются с помощью нормальных распределений, имеющих такие же первые два момента (вектор математических ожиданий координат случайного вектора и его корреляционную матрицу), как и исходные вектора. От одинаковой распределенности можно отказаться, но это потребует некоторого усложнения символики. В целом из теоремы о многомерной сходимости вытекает, что многомерный случай ничем принципиально не отличается от одномерного.

Пример. Пусть X_1, ... X_n ,...— независимые одинаково распределенные случайные величины. Рассмотрим k-мерные независимые одинаково распределенные случайные вектора

$$U_n^{'} = (X_n, X_n^2, X_n^3, \dots, X_n^k), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Их математическое ожидание — вектор теоретических начальных моментов, а ковариационная матрица составлена из соответствующих центральных моментов. Тогда $\overline{U}_n$ — вектор выборочных центральных моментов. Многомерная центральная предельная теорема утверждает, что $\overline{U}_n$ имеет асимптотически нормальное распределение. Как вытекает из теорем о наследовании сходимости и о линеаризации (см. ниже), из распределения $\bar{U}_n$ можно вывести распределения различных функций от выборочных начальных моментов. А поскольку центральные моменты выражаются через начальные моменты, то аналогичное утверждение верно и для них.

П.1.3. Теоремы о наследовании сходимости

Суть проблемы наследования сходимости. Пусть распределения случайных величин X_n при $n \to \infty$ стремятся к распределению случайной величины X. При каких функциях f можно утверждать, что распределения случайных величин $f(X_n)$ сходятся к распределению $f(X)$, т.е. наследуется сходимость?

Хорошо известно, что для непрерывных функций f сходимость наследуется [9]. Однако в статистических методах используются различные обобщения этого утверждения. Необходимость обобщений связана с тремя обстоятельствами.

1) Статистические данные могут моделироваться не только случайными величинами, но и случайными векторами, случайными множествами, случайными элементами произвольной природы (т.е. функциями на вероятностном пространстве со значениями в произвольном множестве).

2) Переход к пределу должен рассматриваться не только для случая безграничного возрастания объема выборки, но и в более общих случаях. Например, если в постановке статистической задачи участвуют несколько выборок объемов $n(1)$, $n(2)$, … , $n(k)$, то вполне обычным является предположение о безграничном росте всех этих объемов (что можно описать и как $\min \{n(1), n(2), \dots, n(k)\} \to \infty$).

3) Функция f не обязательно является непрерывной. Она может иметь разрывы. Кроме того, она может зависеть от параметров, по которым происходит переход к пределу. Например, может зависеть от объемов выборок. Например, в главе 2 при изучении критерия Крамера-Уэлча понадобилось рассмотреть функцию $f = f(n(1), n(2), \dots, n(k))$, для расчета значений которой необходимо использовать объемы выборок.

Расстояние Прохорова и сходимость по направленному множеству. Введем необходимые для дальнейшего изложения понятия.

Расстояние (метрика) Прохорова. Пусть C — некоторое пространство, A — его подмножество, d — метрика в C. Введем понятие ε-окрестности множества A в метрике d:

$$S(A,\varepsilon) = \{x \in C: d(A,x) < \varepsilon\}.$$

Таким образом, ε-окрестность множества A — это совокупность всех точек пространства C, отстоящих от A не более чем на положительное число ε. При этом расстояние от точки x до множества A — это точная нижняя грань расстояний от x до точек множества A, т.е.

$$d(A,x) = \inf\{d(x,y): y \in A\}.$$

Пусть P_1 и P_2 — две вероятностные меры на C (т.е. распределения двух случайных элементов со значениями в C). Пусть D_{12} — множество чисел $\varepsilon > 0$ таких, что

$$P_1(A) \leqslant P_2(S(A,\varepsilon)+\varepsilon$$

для любого замкнутого подмножества A пространства C. Пусть D_{21} — множество чисел $\varepsilon > 0$ таких, что

$$P_2(A) \leqslant P_1(S(A,\varepsilon)+\varepsilon$$

для любого замкнутого подмножества A пространства C. *Расстояние Прохорова* $L(P_1,P_2)$ между вероятностными мерами (его можно рассматривать и как расстояние между случайными элементами с распределениями P_1 и P_2 соответственно) вводится формулой

$$L(P_1,P_2) = \max(\inf D_{12}, \inf D_{21}).$$

С помощью расстояния (метрики) Прохорова формализуется понятие сходимости распределений случайных элементов в произвольном пространстве.

Расстояние $L(P_1,P_2)$ введено академиком РАН Юрием Васильевичем Прохоровым в середине XX в. и широко используется в современной теории вероятностей.

Сходимость по направленному множеству [5, с.95–96]. Бинарное отношение $\geqslant$ (упорядочение), заданное на множестве B, называется направлением на нем, если B не пусто и

(а) если m, n и p — такие элементы множества B, что $m \geqslant n$ и $n \geqslant p$, то $m \geqslant p$;

(б) $m \geqslant m$ для любого m из B;

(в) если m и n принадлежат B, то найдется элемент p из B такой, что $p \geqslant m$ и $p \geqslant n$.

Направленное множество — это пара $(B, \geqslant)$, где $\geqslant$ — направление на множестве B. Направленностью (или «последовательностью по направленному множеству») называется пара $(f, \geqslant)$, где f — функция, $\geqslant$ — направление на ее области определения. Пусть f: $B \to Y$, где Y — топологическое пространство. Направленность $(f, \geqslant)$ сходится в топологическом пространстве Y к точке y_0, если для любой окрестности U точки y_0 найдется p из B такое, что $f(q) \in U$ при любом $q \geqslant p$. В таком случае говорят также о сходимости по направленному множеству.

Пусть $B = \{(n(1), n(2), \ldots , n(k))\}$ — совокупность векторов, каждый из которых составлен из объемов k выборок. Пусть

$$(n(1), n(2), \ldots , n(k)) \geqslant (n_1(1), n_1(2), \ldots , n_1(k))$$

тогда и только тогда, когда $n(i) \geqslant n_1(i)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда $(B, \geqslant)$ — направленное множество, сходимость по которому эквивалентна сходимости при $\min \{n(1), n(2), \ldots , n(k)\} \to \infty$.

Чтобы охватить различные частные случаи, целесообразно предельные теоремы формулировать в терминах сходимости по направленному множеству. Будем писать $B = \{\alpha\}$. Пусть запись $\alpha\to\infty$ обозначает переход к пределу по направленному множеству.

Формулировка проблемы наследования сходимости. Пусть случайные элементы X_α со значениями в пространстве C сходятся при $\alpha\to\infty$ к случайному элементу X, где через $\alpha\to\infty$ обозначен переход к пределу по направленному множеству.

Сходимость случайных элементов означает, что $L(X_\alpha, X) \to 0$ при $\alpha \to \infty$, где L — метрика Прохорова в пространстве C.

Пусть f_α: $C \to Y$ — некоторые функции. Какие условия надо на них наложить, чтобы из $L(X_\alpha, X) \to 0$ вытекало, что $L_1(f_\alpha(X_\alpha), f_\alpha(\mathrm{X})) \to 0$ при $\alpha \to \infty$, где L_1 — метрика Прохорова в пространстве Y? Другими словами, какие условия на функции f_α: $C \to Y$ гарантируют наследование сходимости?

В работах [6, 7] найдены необходимые и достаточные условия на функции f_α: $C \to Y$, гарантирующие наследование сходимости. Описанию этих условий посвящена оставшаяся часть раздела П1.3.

Приведем для полноты изложения строгие формулировки математических предположений.

Математические предположения. Пусть C и $У$ — полные сепарабельные метрические пространства, Пусть выполнены обычные предположения измеримости: X_α и X — случайные элементы C, $f_\alpha(X_\alpha)$ и $f_\alpha(X)$ — случайные элементы в $У$, рассматриваемые ниже подмножества пространств C и $У$ лежат в соответствующих σ—алгебрах измеримых подмножеств, и т.д.

Понадобятся некоторые *определения*. Разбиение $T_n = \{C_{1n}, C_{2n}, \ldots, C_{nn}\}$ пространства C — это такой набор подмножеств C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, этого пространства, что пересечение любых двух из них пусто, а объединение совпадает с C. Диаметром $diam(A)$ подмножества A множества C называется точная верхняя грань расстояний между элементами A, т.е.

$$diam(A) = \sup \{d(x,y),\ x \in A,\ y \in A\},$$

где $d(x,y)$ — метрика в пространстве C. Обозначим ∂A границу множества A, т.е. совокупность точек x таких, что любая их окрестность $U(x)$ имеет непустое пересечение как с A, так и с $C \backslash A$. Колебанием $\delta(f, B)$ функции f на множестве B называется

$$\delta(f, B) = \sup \{|f(x) - f(y)|,\ x \in B,\ y \in B\}.$$

Теорема П.1.11 (достаточное условие для наследования сходимости). *Пусть* $L(X_\alpha, X) \to 0$ *при* $\alpha \to \infty$. *Пусть существует последовательность* T_n *разбиений пространства* C *такая,* *что* $P(X \in \partial A) = 0$ *для любого* A *из* T_n *и, основное условие, для любого* $\varepsilon > 0$

$$m_\varepsilon(\alpha, n) = \sum P(X \in A) \to 0 \qquad (\text{П}1.5)$$

при $n \to \infty$ *и* $\alpha \to \infty$, *где сумма берется по всем тем* A *из* T_n, *для которых колебание функции* f_α *на* A *больше* ε, *т.е.* $\delta(f_\alpha, \mathrm{A}) > \varepsilon$. *Тогда* $L_1(f_\alpha(X_\alpha), f_\alpha(X)) \to 0$ *при* $\alpha \to \infty$.

Теорема П.1.12 (необходимое условие для наследования сходимости). *Пусть* $У$ *— конечномерное линейное пространство,* $У = R^k$. *Пусть случайные элементы* $f_\alpha(X)$ *асимптотически ограничены по вероятности при* $\alpha \to \infty$, *т.е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют число* $S(\varepsilon)$ *и элемент направленного множества* $\alpha(\varepsilon)$ *такие, что* $P(||f_\alpha(X)|| > S(\varepsilon)) < \varepsilon$ *при* $\alpha \geqslant \alpha(\varepsilon)$, *где* $||f_\alpha(X)||$ *— норма (длина) вектора* $f_\alpha(X)$. *Пусть существует последовательность* T_n *разбиений пространства* C *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \max\{diam(C_{jn}),\ C_{jn} \in T_n\} = 0\ ,$$

т.е. последовательность T_n *является безгранично измельчающейся. Самое существенное — пусть условие* (П1.5) *не выполнено для последовательности* T_n. *Тогда существует последовательность случайных элементов* X_α *такая, что* $L(X_\alpha, X) \to 0$ *при* $\alpha \to \infty$, *но* $L_1(f_\alpha(X_\alpha), f_\alpha(X))$ *не сходится к* 0 *при* $\alpha \to \infty$.

Несколько огрубляя, можно сказать, что *условие* (П1.5) *является необходимым и достаточным для наследования сходимости*.

Пример 1. Пусть C и $У$ — конечномерные линейные пространства, функции f_α не зависят от α, т.е. $f_\alpha \equiv f$, причем функция f ограничена. Тогда условие (П1.5) эквивалентно требованию интегрируемости по Риману-Стилтьесу функции f по мере $G(A) = P(X \in A)$. В частности, условие (П1.5) выполнено для непрерывной функции f.

В конечномерных пространствах C вместо сходимости $L(X_\alpha, X) \to 0$ при $\alpha \to \infty$ можно говорить о слабой сходимости функций распределения случайных векторов X_α к функции распределения случайного вектора X. Речь идет о «сходимости по распределению», т.е. о сходимости во всех точках непрерывности функции распределения случайного вектора X. В этом случае разбиения могут состоять из многомерных параллелепипедов [6, гл.2].

Пример 2. Полученные выше результаты дают обоснование для рассуждений типа следующего (ср., например, утверждения в главе 2 выше). Пусть по двум независимым выборкам объемов m и n соответственно построены статистики X_m и Y_n. Пусть известно, что распределения этих статистик сходятся при безграничном росте объемов выборок к стандартному нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1. Пусть $a(m, n)$ и $b(m, n)$ — некоторые коэффициенты. Тогда согласно результатам примера 1 распределение случайной величины $Z(m, n) = a(m, n)X_m + b(m, n)Y_n$ сближается с распределением нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией $a^2(m, n) + b^2(m, n)$. Если же $a^2(m, n) + b^2(m, n) = 1$, например,

$$a(m,n)=\sqrt{\frac{m}{m+n}}.\quad b(m,n)=\sqrt{\frac{n}{m+n}}\ ,$$

то распределение $Z(m, n)$ сходится при безграничном росте объемов выборок к стандартному нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

П.1.4. Метод линеаризации

При разработке статистических методов часто возникает следующая задача [9, с.338]. Имеется последовательность k-мерных случайных векторов $X_n = (X_{1n}, X_{2n}, \ldots, X_{kn})$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $X_n \to a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ при $n \to \infty$, и последовательность функций $f_n: R^k \to R^1$. Требуется найти распределение случайной величины $f_n(X_n)$.

Основная идея — рассмотреть главный линейный член функции f_n в окрестности точки a. Из математического анализа известно, что

$$f_n(X_n)-f_n(a)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f_n(a)}{\partial x_j}(X_{jn}-a_j)+O_n(|\,|X_n-a\,|^2)\ ,$$

где остаточный член является бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем линейный член. Таким образом, произвольная функция может быть заменена на линейную функцию от координат случайного вектора. Эта замена проводится с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. Конечно, должны быть выполнены некоторые математические условия регулярности. Например, функции f_n должны быть дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки a.

Если вектор X_n является асимптотически нормальным с математическим ожиданием a и ковариационной матрицей $\sum/n$, где $\sum = ||\sigma_{ij}||$, причем $\sigma_{ij} = nM(X_i - a_i)(X_j - a_j)$, то линейная функция от его координат также асимптотически нормальна. Следовательно, при очевидных условиях регулярности $f_n(X_n)$ — асимптотически нормальная случайная величина с математическим ожиданием $f_n(a)$ и дисперсией

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f_n(a)}{\partial x_i}\frac{\partial f_n(a)}{\partial x_j}\sigma_{ij}\ .$$

Для практического использования асимптотической нормальности $f_n(X_n)$ остается заменить неизвестные моменты a и $\sum$ на их оценки. Например, если X_n — это среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных векторов, то a можно заменить на X_n, а $\sum$ — на выборочную ковариационную матрицу.

Пример. Пусть $Y_1,\ Y_2,\ \dots\ ,\ Y_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. В качестве X_n $(k = 1)$ рассмотрим выборочное среднее арифметическое

$$\overline{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n}\ .$$

Как известно, в силу закона больших чисел $\overline{Y} \to a = M(У)$. Следовательно, для получения распределений функций от выборочного среднего арифметического можно использовать метод линеаризации. В качестве примера рассмотрим $f_n(y) = f(y) = y^2$. Тогда

$$\left(\overline{Y}\right)^2 - a^2 = \frac{df(a)}{dy}\left(\overline{Y} - a\right) + O\left(\left(\overline{Y} - a\right)^2\right) = 2a\left(\overline{Y} - a\right) + O\left(\left(\overline{Y} - a\right)^2\right).$$

Из этого соотношения следует, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка

$$\left(\overline{Y}\right)^2 = a^2 + 2a\left(\overline{Y} - a\right).$$

Поскольку в соответствии с Центральной предельной теоремой (раздел П1.2) выборочное среднее арифметическое является асимптотически нормальной случайной величиной с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2/n, то квадрат этой статистики является асимптотически нормальной случайной величиной с математическим ожиданием a^2 и дисперсией $4a^2\sigma^2/n$. Для практического использования может оказаться полезной замена параметров (асимптотического нормального распределения) на их оценки, а именно, математического ожидания — на $\left(\overline{Y}\right)^2$, а дисперсии — на $4\left(\overline{Y}\right)^2 s^2 \big/ n$, где s^2 — выборочная дисперсия.

Большое внимание (целая глава!) уделено методу линеаризации в классическом учебнике Е.С. Вентцель [2].

П.1.5. Принцип инвариантности

Пусть Y_1, Y_2, ... , Y_n — независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Многие используемые в статистических методах функции от результатов наблюдений выражаются через эмпирическую функцию распределения $F_n(x)$ (эмпирической функцией распределения $F_n(x)$ называется доля элементов выборки, меньших x). К ним относятся статистики Колмогорова, Смирнова, омега-квадрат. Отметим, что и другие статистики выражаются через эмпирическую функцию распределения, например:

$$\overline{Y} = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_n(x).$$

Полезным является преобразование Н.В.Смирнова $t = F(x)$. Тогда независимые случайные величины $Z_j = F(Y_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, имеют равномерное распределение на отрезке [0; 1]. Рассмотрим построенную по ним эмпирическую функцию распределения $F_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Эмпирическим процессом* называется случайный процесс

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t) .$$

Рассмотрим критерии проверки согласия функции распределения выборки с фиксированной функцией распределения $F(x)$. Статистика критерия Колмогорова записывается в виде

$$K_n = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\, \xi_n(t)\, |,$$

статистика критерия Смирнова — это

$$S_n = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \xi_n(t), ,$$

а статистика критерия омега-квадрат (Крамера — Мизеса — Смирнова) имеет вид

$$\omega_n^2 = \int_0^1 \xi_n^2(t)dt .$$

Случайный процесс $\xi_n(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию $M\xi_n(s)\xi_n(t) = \min(s,\mathrm{t}) - st$. Рассмотрим гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ с такими же математическим ожиданием и ковариационной функцией. Он называется броуновским мостом. (Напомним, что гауссовским процесс именуется потому, что вектор $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_k))$ имеет многомерное нормальное распределение при любых наборах моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_k$.)

Пусть f — функционал, определенный на множестве возможных траекторий случайных процессов. *Принцип инвариантности* [3] состоит в том, что последовательность распределений случайных величин $f(\xi_n)$ сходится при $n \to \infty$ к распределению случайной величины $f(\xi)$. Сходимость по распределению обозначим символом $=>$. Тогда принцип инвариантности кратко записывается так: $f(\xi_n) => f(\xi)$. В частности, согласно принципу инвариантности статистика Колмогорова и статистика омега-квадрат сходятся по распределению к распределениям соответствующих функционалов от случайного процесса ξ:

$$K_n = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\xi_n(t)|\, K_n = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\xi_n(t)| \Rightarrow \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\xi(t)|,\ \omega_n^2 = \int_0^1 \xi_n^2(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \xi^2(t)dt .$$

Таким образом, от проблем прикладной статистики сделан переход к теории случайных процессов. Методами этой теории найдены распределения случайных величин

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\xi(t)|, \quad \int_0^1 \xi^2(t)dt .$$

Принцип инвариантности — инструмент получения предельных распределений функций от результатов наблюдений, используемых в прикладной статистике.

Обоснование принципу инвариантности может быть дано на основе теории сходимости вероятностных мер в функциональных пространствах [1]. Более простой подход, позволяющий к тому же получать необходимые и достаточные условия в предельной теории статистик интегрального типа (принцип инвариантности к ним нельзя применить), рассмотрен в главе 7 учебника [8].

Почему «принцип инвариантности» так назван? Обратим внимание, что предельные распределения рассматриваемых статистик не зависят от их функции распределения $F(x)$. Другими словами, предельное распределение инвариантно относительно выбора $F(x)$.

В более широком смысле термин «принцип инвариантности» применяют тогда, когда предельное распределение не зависит от тех или иных характеристик исходных распределений [3]. В этом смысле наиболее известный «принцип инвариантности» — это Центральная предельная теорема, поскольку предельное стандартное нормальное распределение — одно и то же для всех возможных распределений независимых одинаково распределенных слагаемых (лишь бы слагаемые имели конечные математическое ожидание и дисперсию).

Литература

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977. — 352 с.

2. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1964.- 576 с.

3. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В.Прохоров. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. — 910с.

4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей: Учебник. 7-е изд., исправл. — М.: Эдиториал УРСС, 2001.- 320 с.

5. *Келли Дж.* Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 384 с.

6. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

7. *Орлов А.И.* Асимптотическое поведение статистик интегрального типа. — В сб.: Вероятностные процессы и их приложения. Межвузовский сборник. — М.: МИЭМ, 1989. — С.118–123.

8. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Изд-во «Экзамен», 2006. — 671 с.

9. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения. — М.: Наука, 1968. — 548 с.

Контрольные вопросы и задачи

1. Какова роль законов больших чисел в обосновании статистических методов?

2. Приведите примеры использования Центральных предельных теорем при построении статистических процедур доверительного оценивания и проверки гипотез.

3. Почему при обосновании статистических методов необходимо использовать теоремы о наследовании сходимости?

4. Примените метод линеаризации для изучения распределения выборочной дисперсии (исходя из асимптотической нормальности при $n \to \infty$ среднего арифметического двумерных векторов $(X_k, (X_k)^2)$, $k = 1, 2, \dots, n$).

5. Приведите примеры применения в прикладной статистике принцип инвариантности.

Темы докладов, рефератов, исследовательских работ

1. Законы больших чисел и различные варианты Центральной предельной теоремы — основные результаты классической теории вероятностей.

2. Применение многомерной центральной предельной теоремы совместно с теоремой о наследовании сходимости в эконометрике (по материалам глав 1– 7 настоящего учебника).

3. Место теорем о наследовании сходимости и метода линеаризации в асимптотической прикладной статистике.

4. Необходимые и достаточные условия наследования сходимости.

5. Принцип инвариантности для классических непараметрических статистик.

Нечеткие множества — частный случай нечисловых данных

Нечеткие множества —важный для применений эконометрики вид объектов нечисловой природы. Они не раз упоминались в главе 7 настоящего учебника. Для тех, кто не изучал теорию нечетких множеств, приведем основные сведения о ней.

П.2.1. Основы теории нечетких множеств

Нечеткие множества. Пусть A — некоторое множество. Подмножество B множества A характеризуется своей характеристической функцией

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B. \end{cases} \qquad (\text{П.2.1})$$

Что такое *нечеткое* множество? Обычно говорят, что нечеткое подмножество C множества A характеризуется своей функцией принадлежности $\mu_C : A \to [0;\ 1]$. Значение функции принадлежности в точке x показывает степень принадлежности этой точки нечеткому множеству. Нечеткое множество описывает неопределенность, соответствующую точке x — она одновременно и входит, и не входит в нечеткое множество C. За вхождение — $\mu_C(x)$ шансов, за второе, т.е. за то, что точка не входит в множество, $(1 - \mu_C(x))$ шансов.

Если функция принадлежности $\mu_C(x)$ имеет вид (П.2.1) при некотором B, то C есть обычное (четкое) подмножество A, а именно, $B = C$. Таким образом, теория нечетких множество является более общей или хотя бы не менее общей математической дисциплиной, чем обычная теория множеств, поскольку обычные множества — частный случай нечетких. Соответственно можно ожидать, что теория нечеткости как целое обобщает классическую математику. Однако позже мы увидим, что теория нечеткости в определенном смысле сводится к теории случайных множеств и тем самым является частью классической математики. Другими словами, по степени общности обычная математика и нечеткая математика эквивалентны. Однако для практического применения, например, в теории принятия решений описание и анализ неопределенностей с помощью теории нечетких множеств весьма плодотворны.

Обычное подмножество можно было бы отождествить с его характеристической функцией. Этого математики не делают, поскольку для задания функции (в ныне принятом подходе) необходимо сначала задать множество. Нечеткое же подмножество с формальной точки зрения можно отождествить с его функцией принадлежности. Однако термин «нечеткое подмножество» предпочтительнее при построении математических моделей реальных явлений.

Теория нечеткости является обобщением интервальной математики, посвященной обработке интервальных чисел (см. главу 7 настоящего учебника). Действительно, функция принадлежности

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [a; b], \\ 0, \ x \notin [a; b]. \end{cases}$$

задает интервальную неопределенность — про рассматриваемую величину известно лишь, что она лежит в заданном интервале $[a, b]$. Тем самым описание неопределенностей с помощью нечетких множеств является более общим, чем с помощью интервалов.

Начало современной теории нечеткости положено работой 1965 г. американского ученого азербайджанского происхождения Л.А. Заде [19]. К настоящему времени по этой теории опубликованы тысячи книг и статей, издается несколько международных журналов (половина — в Китае), выполнено достаточно много как теоретических, так и прикладных работ. Первая книга российского автора по теории нечеткости вышла в 1980 г. [12].

Основоположник теории нечеткости Л.А. Заде рассматривал теорию нечетких множеств как аппарат анализа и моделирования гуманистических систем, т.е. систем, в которых участвует человек. Его подход опирается на предпосылку о том, что элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов, для которых переход от «принадлежности» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен [6]. В настоящее время методы теории нечеткости используются почти во всех прикладных областях, в том числе при управлении предприятиями, качеством продукции и технологическими процессами, при описании предпочтений потребителей и оптимизации процессов варки стали.

Л.А. Заде использовал термин «*fuzzy set*» (нечеткое множество). На русский язык термин «*fuzzy*» переводили как нечеткий, размытый, расплывчатый, и даже как пушистый и туманный.

Аппарат теории нечеткости довольно громоздок. В качестве примера дадим определения теоретико-множественных операций над нечеткими множествами. Пусть C и D — два нечетких подмножества A с функциями принадлежности $\mu_C(x)$ и $\mu_D(x)$ соответственно. Пересечением $C \cap D$, произведением CD, объединением $C \cup D$, отрицанием $\bar{C}$, суммой $C + D$ называются нечеткие подмножества A с функциями принадлежности

$$\mu_{C \cap D}(x) = \min(\mu_C(x), \mu_D(x)),$$

$$\mu_{CD}(x) = \mu_C(x)\ \mu_D(x),$$

$$\mu_{\bar{C}}(x) = 1 - \mu_C(x), \ \mu_{C \cup D}(x) = \max(\mu_C(x), \mu_D(x)),$$

$$\mu_{C+D}(x) = \mu_C(x)\ \mu_D(x) - \mu_C(x)\ \mu_D(x),\ x \in A,$$

соответственно.

Теория нечетких множеств в определенном смысле сводится к теории вероятностей, а именно, к теории случайных множеств. Соответствующий цикл теорем приведен в следующем разделе. Однако при решении прикладных задач вероятностно-статистические методы и методы теории нечеткости обычно рассматриваются как различные.

Для знакомства со спецификой нечетких множеств изучим некоторые их свойства.

В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые нечеткие множества являются подмножествами одного и того же множества Y.

Законы де Моргана для нечетких множеств. Как известно, законами де Моргана называются следующие тождества алгебры множеств

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (\text{П.2.2})$$

Теорема П.2.1. *Для нечетких множеств справедливы тождества*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (\text{П.2.3})$$

$$\overline{A + B} = \overline{A}\ \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} \qquad (\text{П.2.4})$$

Доказательство теоремы П.2.1 состоит в непосредственной проверке справедливости соотношений (П.2.3) и (П.2.4) путем вычисления значений функций принадлежности участвующих в этих соотношениях нечетких множеств на основе определений, данных выше.

Тождества (П.2.3) и (П.2.4) назовем *законами де Моргана для нечетких множеств*. В отличие от классического случая соотношений (П.2.2), они состоят из четырех тождеств, одна пара которых относится к операциям объединения и пересечения, а вторая — к операциям произведения и суммы. Как и соотношение (П.2.2) в алгебре множеств, законы де Моргана в алгебре нечетких множеств позволяют преобразовывать выражения и формулы, в состав которых входят операции отрицания.

Дистрибутивный закон для нечетких множеств. Некоторые свойства операций над множествами не выполнены для нечетких множеств. Так, $A + A \neq A$, за исключением случая, когда A — «четкое» множество (т.е. функция принадлежности принимает только значения 0 и 1).

Верен ли дистрибутивный закон для нечетких множеств? В литературе иногда расплывчато утверждается, что «не всегда». Внесем полную ясность.

Теорема П.2.2. *Для любых нечетких множеств A, B и C*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{П.2.5}$$

В то же время равенство

$$A(B + C) = AB + AC \tag{П.2.6}$$

справедливо тогда и только тогда, когда при всех $y \in Y$

$$\mu_A^2(y) - \mu_A(y)\mu_B(y)\mu_C(y) = 0 .$$

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $y \in Y$. Для сокращения записи обозначим $a = \mu_A(y)$, $b = \mu_B(y)$, $c = \mu_C(y)$. Для доказательства тождества (П.2.5) необходимо показать, что

$$\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c)). \tag{П.2.7}$$

Рассмотрим различные упорядочения трех чисел a, b, c. Пусть сначала $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда левая часть соотношения (П.2.7) есть $\min(a, c) = a$, а правая $\min(a, a) = a$, т. е. равенство (П.2.7) справедливо.

Пусть $b \leqslant a \leqslant c$. Тогда в соотношении (П.2.7) слева стоит $\min(a, c) = a$, а справа $\max(b, a) = a$, т.е. соотношение (П.2.7) опять является равенством.

Если $b \leqslant c \leqslant a$, то в соотношении (П.2.7) слева стоит $\min(a, c) = c$, а справа $\max(b, c) = c$, т.е. обе части снова совпадают.

Три остальные упорядочения чисел a, b, c разбирать нет необходимости, поскольку в соотношение (П.2.6) числа b и c входят симметрично. Тождество (П.2.5) доказано.

Второе утверждение теоремы 2 вытекает из того, что в соответствии с определениями операций над нечеткими множествами

$$\mu_{A(B+C)}(y) = a(b + c - bc) = ab + ac - abc$$

и

$$\mu_{AB+AC}(y) = ab + ac - (ab)(ac) = ab + ac - a^2bc.$$

Эти два выражения совпадают тогда и только тогда, когда $a^2bc = abc$, что и требовалось доказать.

Определение П.2.1. *Носителем нечеткого множества А называется совокупность всех точек* $y \in Y$ *для которых* $\mu_A(y) > 0$.

Следствие теоремы П.2.2. *Если носители нечетких множеств В и С совпадают с У, то равенство* (П.2.6) *имеет место тогда и только тогда, когда А — «четкое» (т.е. обычное, классическое, не нечеткое) множество.*

Доказательство. По условию $\mu_B(y)\,\mu_C(y) \neq 0$ при всех $y \in Y$. Тогда из теоремы 2 следует, что $\mu_A^2(y)\,\mu_A(y) = 0$, т.е.) $\mu_A(y) = 1$ или) $\mu_A(y) = 0$, что и означает, что A — четкое множество.

П.2.2. Примеры практического применения нечетких множеств

Рассмотрим три примера использования нечетких множеств при решении практических задач экономики и управления (менеджмента).

Пример описания неопределенности с помощью нечеткого множества. Понятие «богатый» часто используется при обсуждении социально-экономических проблем, в том числе и в связи с подготовкой и принятием решений. Однако очевидно, что разные лица вкладывают в это понятие различное содержание. Сотрудники Института высоких статистических технологий и эконометрики провели в 2004 г. небольшое пилотное (т.е пробное) социологическое исследование представления различных слоев населения о понятии «богатый человек».

Мини-анкета опроса выглядела так:

1. При каком месячном доходе (в тыс. руб. на одного человека) Вы считали бы себя богатым человеком?

2. Оценив свой сегодняшний доход, к какой из категорий Вы себя относите:

а) богатые;

б) достаток выше среднего;

в) достаток ниже среднего;

г) бедные;

д) за чертой бедности?

(В дальнейшем вместо полного наименования категорий будем оперировать буквами, например, «в» — категория, «б» — категория и т.д.)

3. Ваша профессия, специальность.

Всего опрошено 74 человека, из них 40 — научные работники и преподаватели, 34 человека — не занятых в сфере науки и образования, в том числе 5 рабочих и 5 пенсионеров. Из всех опрошенных только один (!) считает себя богатым. Несколько типичных ответов научных работников и преподавателей приведено в табл.П.2.1, а аналогичные сведения для работников коммерческой сферы — в табл.П.2.2.

Таблица П.2.1

Типичные ответы научных работников и преподавателей

Ответы на вопрос 3	Ответы на вопрос 1, тыс. руб./чел.	Ответы на вопрос 2	Пол
Кандидат наук	6	д	ж
Преподаватель	6	в	ж
Доцент	6	б	ж
Учитель	60	в	м
Старший научный сотрудник	60	д	м
Инженер-физик	140	д	ж
Программист	150	г	м
Научный работник	270	г	м

Таблица П.2.2

Типичные ответы работников коммерческой сферы

Ответы на вопрос 3	Ответы на вопрос 1	Ответы на вопрос 2	Пол
Вице-президент банка	600	а	ж
Зам. директора банка	300	б	ж
Начальник кредитного отдела	300	б	м
Начальник отдела ценных бумаг	60	б	м
Главный бухгалтер	120	д	ж
Бухгалтер	90	в	ж
Менеджер банка	66	б	м
Начальник отдела проектирования	60	в	ж

Разброс ответов на первый вопрос — от 6 до 600 тыс. руб. в месяц на человека. Результаты опроса показывают, что критерий богатства у финансовых работников в целом несколько выше, чем у научных работников и преподавателей (см. гистограммы на рис.П.2.1 и рис.П.2.2 ниже).

Опрос показал, что выявить какое-нибудь конкретное значение суммы, которая необходима «для полного счастья», пусть даже с небольшим разбросом, нельзя, что вполне естественно. Как видно из табл.П.2.1 и П.2.2, денежный эквивалент богатства колеблется от 6 до 600 тыс. руб. в месяц. Подтвердилось мнение, что работники сферы образования в подавляющем большинстве причисляют свой достаток к категории «в» и ниже (81% опрошенных), в том числе к категории «д» отнесли свой достаток 57%.

Со служащими коммерческих структур и бюджетных организаций иная картина: «г» — категория 1 человек (4%), «д» — категория 4 человека (17%), «б» — категория — 46% и 1 человек «а» — категория.

Пенсионеры, что не вызывает удивления, отнесли свой доход к категории «д» (4 человека), и лишь один человек указал «г» — категорию. Рабочие же ответили так: 4 человека — «в», и один человек — «б».

Для представления общей картины в табл.П.2.3 приведены данные об ответах работников других профессий.

Прослеживается интересное явление: чем выше планка богатства для человека, тем к более низкой категории относительно этой планки он себя относит.

Для сводки данных естественно использовать гистограммы. Для этого необходимо сгруппировать ответы. Использовались 7 классов (интервалов):

1 —до 30 тыс.;

2 — от 30 до 60 тыс.;

3 — от 60 до 90 тыс.;

4 — от 90 до 120 тыс.;

5 — от 120 до 150 тыс.;

6 — от 150 до 180 тыс.;

7 — более 180 тыс.

(Во всех интервалах левая граница исключена, а правая, наоборот — включена.)

Таблица П.2.3

Типичные ответы работников различных профессий

Ответы на вопрос 3	Ответы на вопрос 1	Ответы на вопрос 2	Пол
Работник торговли	6	б	ж
Дворник	12	в	ж
Водитель	60	в	м
Военнослужащий	60	в	м
Владелец бензоколонки	120	б	ж
Пенсионер	36	д	ж
Начальник фабрики	120	б	м
Хирург	30	в	м
Домохозяйка	60	в	ж
Слесарь-механик	150	в	м
Юрист	60	б	м
Оператор ЭВМ	120	д	м
Работник собеса	18	д	ж
Архитектор	150	б	ж

Сводная информация представлена на рис.П.2.1 (для научных работников и преподавателей) и рис.П.2.2 (для всех остальных, т.е. для лиц, не занятых в сфере науки и образования — служащих иных бюджетных организаций, коммерческих структур, рабочих, пенсионеров).

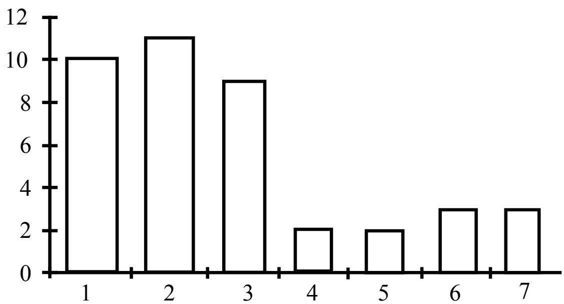

Рис. П.2.1. *Гистограмма ответов на вопрос 1 для научных работников и преподавателей (40 человек)*

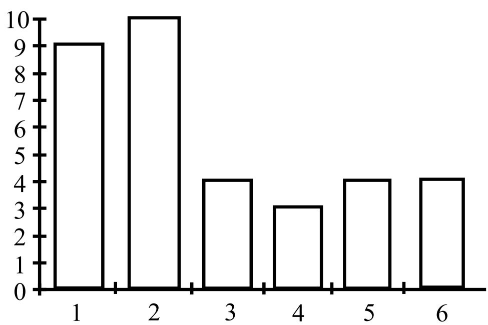

Рис. П.2.2. *Гистограмма ответов на вопрос 1 для лиц, не занятых в сфере науки и образования (34 человека)*

Для двух выделенных групп, а также для некоторых подгрупп второй группы рассчитаны сводные средние характеристики — выборочные средние арифметические, медианы, моды. При этом медиана группы — количество тыс. руб., названное центральным по порядковому номеру опрашиваемым в возрастающем ряду ответов на вопрос 1, а мода группы — интервал, на котором столбик гистограммы — самый высокий, т.е. в него «попало» максимальное количество опрашиваемых. Результаты приведены в табл.П.2.4.

Таблица П.2.4

Сводные средние характеристики ответов на вопрос 1 для различных групп (в тыс. руб. в мес. на чел.)

Группа опрошенных	Среднее арифметическое	Медиана	Мода
Научные работники и преподаватели	70,0	43,5	(30; 60]
Лица, не занятые в сфере науки и образования	86,4	120,0	(30; 60]
Служащие коммерческих структур и бюджетных организаций	107,5	60,0	(30; 60]
Рабочие	90,0	78,0	—
Пенсионеры	61,8	60,0	—

Построим нечеткое множество, описывающее понятие «богатый человек» в соответствии с представлениями опрошенных. Для этого составим табл.П.2.5 на основе рис.П.2.1 и рис.П.2.2 с учетом размаха ответов на первый вопрос (обратите внимание, что первый и последний из использованных ранее интервалов в табл.П.2.5 разбиты каждый на два интервала).

Пятая строка табл.П.2.5 задает функцию принадлежности нечеткого множества, выражающего понятие «богатый человек» в терминах его ежемесячного дохода. Это нечеткое множество является подмножеством множества из 9 интервалов, заданных в строке 2 табл.П.2.5. Или множества из 9 условных номеров {0, 1, 2, ..., 8}. Эмпирическая функция распределения, построенная по выборке из ответов 74 опрошенных на первый вопрос мини-анкеты, описывает понятие «богатый человек» как нечеткое подмножество положительной полуоси.

Таблица П.2.5

Число ответов, попавших в интервалы

№	Номер интервала	0	1	2	3	4
1	Интервал, тыс. руб. в месяц	(0;6)	[6;30]	(30;60]	(60;90]	(90;120]
2	Число ответов в интервале	0	19	21	13	5
3	Доля ответов в интервале	0	0,257	0,284	0,176	0,068
4	Накопленное число ответов	0	19	40	53	58
5	Накопленная доля ответов	0	0,257	0,541	0,716	0,784

Окончание таблицы П.2.5

№	Номер интервала	5	6	7	8
1	Интервал, тыс. руб. в месяц	(120;150]	(150;180]	(180;600)	[600; +∞)
2	Число ответов в интервале	6	7	2	1
3	Доля ответов в интервале	0,081	0,095	0,027	0,013
	Интервал, тыс. руб. в месяц	(120;150]	(150;180]	(180;600)	[600; +∞)
	Накопленное число ответов	64	71	73	74
	Накопленная доля ответов	0,865	0,960	0,987	1,000

О разработке методики ценообразования на основе теории нечетких множеств. Для оценки значений показателей, не имеющих количественного выражения, можно использовать методы нечетких множеств. Например, в работе П.В. Битюкова [1] нечеткие множества применялись при моделировании задач ценообразования на электронные обучающие курсы, используемые при дистанционном обучении. Им проведено исследование значений фактора «Уровень качества курса» с использованием нечетких множеств. В ходе практического использования предложенной П.В. Битюковым методики ценообразования значения ряда других факторов могут также определяться с использованием теории нечетких множеств. Например, ее можно использовать для расчета прогноза рейтинга специальности в вузе с помощью экспертов, а также значений других факторов, относящихся к группе «Особенности курса». Опишем подход П.В. Битюкова как пример практического использования теории нечетких множеств.

Значение оценки, присваиваемой каждому интервалу для фактора «Уровень качества курса», определяется на универсальной шкале [0;1], где необходимо разместить значения лингвистической переменной «Уровень качества курса»: НИЗКИЙ, СРЕДНИЙ, ВЫСОКИЙ. Степень принадлежности некоторого значения вычисляется как отношение числа ответов, в которых оно встречалось в определенном интервале шкалы, к максимальному (для этого значения) числу ответов по всем интервалам.

Был проведен опрос экспертов о степени влияния уровня качества электронных курсов на их потребительную ценность. Каждому эксперту в процессе опроса предлагалось оценить с позиции потребителя ценность того или иного класса курсов в зависимости от уровня качества. Эксперты давали свою оценку для каждого класса курсов по 10-ти балльной шкале (где 1 — min, 10 — max). Для перехода к универсальной шкале [0;1], все значения 10-ти балльной шкалы оценки ценности были разделены на максимальную оценку, т.е. на 10.

Используя свойства функции принадлежности, необходимо предварительно обработать данные, чтобы уменьшить искажения, вносимые опросом. Естественными свойствами функций принадлежности являются наличие одного максимума и гладкие, затухающие до нуля фронты. Для обработки статистических данных можно воспользоваться так называемой матрицей подсказок. Предварительно удаляются явно ошибочные элементы. Критерием удаления служит наличие нескольких нулей в строке вокруг этого элемента.

Элементы матрицы подсказок вычисляются с использованием величин:

$$k_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}, \quad j = \overline{1, n},$$

где b_{ij} — элемент таблицы с результатами анкетирования, сгруппированными по интервалам.

Выбирается максимальный элемент: $k_{\max} = \max\limits_j k_j$, и далее все элементы матрицы при $k_j \neq 0$ преобразуются по формуле:

$$c_{ij} = \frac{b_{ij} k_{\max}}{k_j}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

Для столбцов, где $k_j = 0$, применяется линейная аппроксимация:

$$c_{ij} = \frac{c_{ij-1} + c_{ij+1}}{2}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Результаты расчетов сводятся в таблицу, на основании которой строятся функции принадлежности. Для этого находятся максимальные элементы по строкам:

$$c_{i\max} = \max_j c_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Функция принадлежности вычисляется по формуле:

$$\mu_{ij} = c_{ij}/c_{i\max}.$$

Результаты расчетов приведены в табл.П.2.6.

На рис.П.2.3 сплошными линиями показаны функции принадлежности значений лингвистической переменной «Уровень качества курса» после обработки таблицы, содержащей результаты опроса. Как видно из графика, функции принадлежности удовлетворяют описанным выше свойствам. Для сравнения пунктирной линией показана функция принадлежности лингвистической переменной для значения НИЗКИЙ без обработки данных.

Таблица П.2.6

Значения функции принадлежности лингвистической переменной

μ_i	Интервал на универсальной шкале									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
μ_1	0	0,2	1	1	0,89	0,67	0	0	0	0
μ_2	0	0	0	0	0	0,33	1	1	0	0
μ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Рис.П.2.3. *График функций принадлежности значений лингвистической переменной «Уровень качества курса»*

Теория нечетких множеств — основа эконометрической поддержки контроллинга инноваций. Организационно-экономические модели на основе теории нечеткости являются полезными во многих областях экономики и управления. В качестве примера рассмотрим их применение в технологиях управления инновационными процессами [5].

В настоящее время активно разрабатывается подход к управлению инновационными проектами, основанный на методологии контроллинга. Одной из главных причин возникновения и внедрения концепции контроллинга для разработки инноваций на промышленных предприятиях стала необходимость в системной интеграции различных аспектов управления инновационными проектами. Контроллинг обеспечивает методическую и инструментальную базу для поддержки основных функций менеджмента: планирования, учета, контроля и анализа, а также оценки ситуаций для принятия управленческих решений [7].

Согласно [5], контроллинг инноваций включает в себя четыре этапа:

— оценки реализуемости проекта;

— информационной поддержки планирования разработки инновационного проекта;

— информационной поддержки контроля над осуществлением инновационного проекта;

— информационной поддержки функции анализа.

На первом этапе контроллеру проекта необходимо ответить на вопрос: достигнет ли предприятие поставленных перед ним целей, если приступит к реализации проекта. Цели проекта — как и цели самого предприятия, должны иметь ясный смысл, результаты, полученные при достижении цели, должны быть измеримы, а заданные ограничения (по времени, рамкам бюджета, выделенным ресурсам и качеству получаемых результатов) выполнимы. Если при реализации проекта общефирменные цели не достигаются, то подразделение контроллинга вырабатывает предложения об альтернативных вариантах реализации проекта, способных удовлетворить поставленные цели.

На этом этапе возникает задача выбора варианта реализации проекта, позволяющего достичь общефирменные цели. Каждый предложенный вариант реализации проекта имеет свои преимущества и недостатки. Он может характеризоваться как количественными экономическими показателями, такими как затраты, поступления и др., техническими показателями, описывающими характеристики качества разрабатываемого продукта, так и качественными показателями, выраженными в виде терминов, например, «крошечный», «маленький», «средний».

Целесообразно выделить эталонный вариант реализации проекта и его характеристики. Характеристики подбираются таким образом, чтобы проект был оптимальным с точки зрения предъявляемых к нему требований. Чтобы сравнить варианты реализации проекта с эталонным вариантом и выбрать из них лучший, можно применить эконометрические методы на основе теории нечеткости, рассмотренные ниже.

На втором этапе осуществляется разработка планово-организационных мероприятий. Подразделение контроллинга разрабатывает методики и инструменты планирования, наилучшим образом подходящие в данных условиях и обеспечивающие наиболее точные результаты. Подготовленный план проверяется на реализуемость, затем решаются вопросы, связанные с координацией участников проекта, с организацией информационного потока, с организацией работ и назначением ответственных.

На третьем этапе устанавливается время проведения контрольных мероприятий, связанное с выполнением определенных блоков работ. Выбираются подконтрольные показатели, характеризующие финансовое и организационное состояние проекта. Устанавливаются допустимые отклонения выбранных показателей, превышение которых может привести к негативным последствиям. Проводится учет показателей, фиксация отклонений. Выявляются причины и виновники отклонений.

На заключительном четвертом этапе подразделение контроллинга оценивает влияние выявленных отклонений на дальнейшие шаги реализации проекта. Выясняет, как выявленные отклонения повлияли на основные управляемые параметры проекта.

По окончанию цикла, контроллер проекта подготавливает отчет с предложением вариантов решения возникших проблем и изменением плановых величин на следующий период.

Применение эконометрических методов сравнения и выбора в контроллинге инноваций. На первом этапе контроллинга инноваций необходимо решить задачу выбора варианта реализации проекта. Выбор между вариантами очевиден, если один из вариантов лучше другого по всем рассматриваемым показателям. В реальных ситуациях выбора варианты обычно несравнимы — первый лучше по одним показателям, второй — по другим. Для сравнения вариантов приходится прибегать к экспертным технологиям (см. главу 5 настоящего учебника).

Одна группа экспертных технологий нацелена на выявление объективного упорядочения вариантов в результате усреднения мнений экспертов. Используют различные способы расчета на основе средних рангов (прежде всего средних арифметических и медиан). Для моделирования результатов парных сравнений применяют теорию люсианов (см. раздел 7.3 настоящего учебника). Для экспертных оценок находят медиану Кемени, и т.д.

Другая группа экспертных технологий нацелена на получение коэффициентов весомости (важности, значимости) отдельных показателей [17]. Итоговая оценка варианта реализации проекта получается в результате суммирования произведений значений показателей на соответствующие коэффициенты весомости. Иногда эти коэффициенты оцениваются экспертами на основе иерархической системы показателей. Более обоснованным является экспертно-статистический метод, согласно которому на основе обучающей выборки восстанавливается зависимость между показателями варианта реализации инновационного проекта и его итоговой оценкой.

Хотя с момента появления первой книги российского автора по теории нечеткости [12] прошло уже около 30 лет, только сейчас эта теория начинает широко применяться в исследованиях по экономике и менеджменту. В частности, для сравнения вариантов реализации инновационного проекта и выбора из них лучшего можно использовать подход, основанный на описании качественных характеристик нечеткими множествами. Опишем его, используя работу [3].

Пусть $S = \left\{ S_i \left| i = \overline{1,n} \right. \right\}$ — множество, состоящее из n вариантов реализации инновационного проекта. Для каждого варианта S_i определено m характеристик Q_{ij}, $j = \overline{1,m}$. В зависимости от конкретных условий набор характеристик может меняться.

Необходимо выделить эталонный вариант реализации проекта S_o и его характеристики Q_{oj}. Характеристики подбираются таким образом, чтобы проект был оптимальным с точки зрения предъявляемых к нему требований.

Требуется проранжировать имеющиеся варианты S реализации инновационного проекта по заданным m характеристикам на соответствие эталону.

Для каждой характеристики Q_{ij}, согласно рассматриваемой методике, строится нечеткое множество $Q_{ij}, i = \overline{0,1} \quad j = \overline{1, m}$. Для этого сначала определяются возможные значения переменной x_j, удовлетворяющие характеристике Q_{ij} Предполагается, что они составляют отрезок X_{ij}. Определяется середина q_{ij} и полуширина (радиус) $\delta_{ij} > 0$ отрезка X_{ij}: Таким образом,

$$X_{ij} = |q_{ij} - \delta_{ij}; q_{ij} + \delta_{ij}|.$$

Для описания критерия Q_{ij} могут применяться различные функции принадлежности. В работе [3] используют функцию принадлежности следующего вида:

$$\mu_{ij}(x_i) = e^{\frac{\ln 2}{\delta_{ij}^2}(x_{ij} - q_{ij})^2}, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Исходя из построения множества X_{ij}, в точке q_{ij} функция имеет максимум, в пределах множества X_{ij} функция принадлежности принимает значения больше 0,5, а вне X_{ij} — меньшее:

$$\mu_{ij} : G_j \to [0; 1]$$

$$\mu_{ij}(q_{ij}) = 1; \qquad .$$

$$\mu_{ij}(x_j) \geqslant 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad x_j \in X_{ij}$$

В результате получаем нечеткие множества

$$\widehat{Q}_{ij} = \{x_j \mid \mu(x_j)\}, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}.$$

Чтобы определить, в какой мере характеристика варианта S_i близка характеристике эталонного варианта $S_о$, вычисляют степень равенства v_{ij} соответствующих нечетких множеств:

$$\nu_{ij} = \max_{G_j} \min(\mu_{ij}(x_j), \mu_{oj}(x_j)).$$

Значение максимина достигается в точке пересечения функций принадлежности:

$$\nu_{ij} = \mu_{oj}\left(x_{ij}^{*}\right),$$

где

$$\nu_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \nu_{ij} \ .$$

Произведя взвешенное голосование, получают интегральную оценку v_i соответствия совокупности характеристик варианта реализации проекта S_i совокупности характеристик эталонного варианта $S_{\text{о}}$:

$$\nu_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \nu_{ij} \ ,$$

где

$$\alpha_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1 \, .$$

Здесь α_j *является* весом *j*-го критерия и показывает уровень его важности.

При обсуждении различных подходов к выбору наилучшего варианта реализации инновационного проекта иногда противопоставляют вероятностно-статистические модели и методы теории нечеткости. С методологической точки зрения весьма важно, что такое противопоставление лишено оснований. Давно известно [12], что теория нечеткости в определенном смысле сводится к теории случайных множеств и тем самым к теории вероятностей. Дадим приведено развернутое обоснование этого утверждения.

П.2.3. Сведение нечетких множеств к случайным

Нечеткость и случайность. С самого начала появления современной теории нечеткости в 1960-е годы (см. выше) началось обсуждение ее взаимоотношений с теорией вероятностей.

Дело в том, что функция принадлежности нечеткого множества напоминает распределение вероятностей. Отличие только в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины (или интеграл, если множество возможных значений несчетно) всегда равна 1, а сумма S значений функции принадлежности (в непрерывном случае — интеграл от функции принадлежности) может быть любым неотрицательным числом. Возникает искушение пронормировать функцию принадлежности, т.е. разделить все ее значения на S (при $S \neq 0$), чтобы свести ее к распределению вероятностей (или к плотности вероятности). Однако специалисты по нечеткости справедливо возражают против такого «примитивного» сведения, поскольку оно проводится отдельно для каждой размытости (нечеткого множества), и определения обычных операций над нечеткими множествами согласовать с ним нельзя. Последнее утверждение означает следующее. Пусть указанным образом преобразованы функции принадлежности нечетких множеств A и B. Как при этом преобразуются функции принадлежности $A \cap B$, $A \cup B$, $A + B$, AB? Установить это *невозможно в принципе*. Последнее утверждение становится совершенно ясным после рассмотрения нескольких примеров пар нечетких множеств с одними и теми же суммами значений функций принадлежности, но различными результатами теоретико-множественных операций над ними. Причем и суммы значений соответствующих функций принадлежности для этих результатов теоретико-множественных операций, например, для пересечений множеств, также различны.

В работах по нечетким множествам время от времени утверждается, что теория нечеткости самостоятельный раздел прикладной математики и не имеет отношения к теории вероятностей (см., например, обзор литературы в монографиях [11, 12]). Некоторые авторы, обсуждавшие взаимоотношения теории нечеткости и теории вероятностей, подчеркивали различие между этими областями теоретических и прикладных исследований. Обычно сопоставляют аксиоматику и сравнивают области приложений.

Аргументы при втором типе сравнений не имеют доказательной силы, поскольку по поводу границ применимости даже такой давно выделившейся научной области, как вероятностно-статистические методы, имеются различные мнения. Более того, нет единства мнений об арифметике. Напомним, что итог рассуждений одного из наиболее известных французских математиков Анри Лебега по поводу границ применимости арифметики таков: «Арифметика применима тогда, когда она применима» (см. его монографию [8, с. 21–22]).

При сравнении различных аксиоматик теории нечеткости и теории вероятностей нетрудно увидеть, что списки аксиом различаются. Из этого, однако, отнюдь не следует, что между указанными теориями нельзя установить связь, типа известного сведения евклидовой геометрии на плоскости к арифметике (точнее к теории числовой системы R^2 — см., например, монографию [4]). Эти две аксиоматики — евклидовой геометрии и арифметики — на первый взгляд весьма сильно различаются.

Можно понять желание энтузиастов теории нечеткости подчеркнуть принципиальную новизну своего научного аппарата. Однако не менее важно установить связи этого подхода с ранее известными.

Проекция случайного множества. Как оказалось, теория нечетких множеств тесно связана с теорией случайных множеств. Еще в 1975 г. в работе [9] показано, что нечеткие множества естественно рассматривать как «проекции» случайных множеств. Рассмотрим этот метод сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств.

Определение П.2.2. *Пусть $A = A(\omega)$ — случайное подмножество конечного множества У. Нечеткое множество B, определенное на У, называется проекцией A и обозначается Proj A, если*

$$\mu_B(y) = P(y \in A) \qquad (\text{П}.2.8)$$

при всех $y \in Y$.

Очевидно, каждому случайному множеству A можно поставить в соответствие с помощью формулы (П.2.8) нечеткое множество $B = Proj\ A$. Оказывается, верно и обратное.

Теорема П.2.3. *Для любого нечеткого подмножества B конечного множества У существует случайное подмножество A множества У такое, что B = Proj A.*

Доказательство. Достаточно задать распределение случайного множества A. Пусть $У_1$ — носитель B (см. определение П.2.1 в разделе П.2.1 выше). Без ограничения общности можно считать, что $Y_1 = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ при некотором m и элементы $У_1$ занумерованы в таком порядке, что

$$0 < \mu_B(y_1) \leqslant \mu_B(y_2) \leqslant ... \leqslant \mu_B(y_m).$$

Введем множества

$Y(1) = Y_1$, $Y(2) = \{y_2, ..., y_m\}$, ..., $Y(t) = \{y_t, ..., y_m\}$, ..., $Y(m) = \{y_m\}$

Положим

$$P(A = Y(1)) = \mu_B(y_1),\ P(A = Y(2)) = \mu_B(y_2) - \mu_B(y_1),\ ...,$$

$$P(A = Y(t)) = \mu_B(y_t) - \mu_B(y_{t-1}),\ ...,$$

$$P(A = Y(m)) = \mu_B(y_m) - \mu_B(y_{m-1}),$$

$$P(A = \varnothing) = 1 - \mu_B(y_m).$$

Для всех остальных подмножеств X множества $У$ положим $P(A = X)=0$. Поскольку элемент y_t входит во множества $Y(1)$, $Y(2)$,..., Y(t) и не входит во множества $Y(t+1)$,..., $Y(m)$, то из приведенных выше формул следует, что $P(y_t \in A) = \mu_B(y_t)$. Если $y \in Y_1$ то, очевидно, $P(y \in A) = 0$. Теорема П.2.3 доказана.

Распределение случайного множества с независимыми элементами, как показано выше в главе 7 настоящего учебника, полностью определяется его проекцией. Для конечного случайного множества общего вида это не так. Для уточнения сказанного понадобится следующая теорема.

Теорема П.2.4. *Для случайного подмножества A множества $У$ из конечного числа элементов наборы чисел $P(A = X)$, $X \subseteq Y$, и $P(X \subseteq A)$, $X \subseteq Y$, выражаются один через другой.*

Доказательство. Второй набор выражается через первый следующим образом:

$$P(X \subseteq A) = \sum_{X':X \subseteq X'} P(A = X')$$

Элементы первого набора выразить через второй можно с помощью формулы включений и исключений из формальной логики, в соответствии с которой

$P(A = X) = P(A \subseteq X)\ \Sigma P(X \cup \{y\} \subseteq A) + \Sigma P(X \cup \{y_1, y_2\} \subseteq A) - \ldots \pm P(Y \subseteq A)$.

В этой формуле в первой сумме переменная суммирования y пробегает все элементы множества $Y \backslash X$, во второй сумме переменные суммирования y_1 и y_2 не совпадают и также пробегают это множество, и т.д. Ссылка на формулу включений и исключений завершает доказательство теоремы П.2.4.

В соответствии с теоремой П.2.4 случайное множество A можно характеризовать не только распределением, но и набором чисел $P(X \subseteq A)$, $X \subseteq Y$. В этом наборе $P(\varnothing \subseteq A) = 1$, а других связей типа равенств нет. В этот набор входят числа $P(\{y\} \subseteq A) = P(y \in A)$, следовательно, фиксация проекции случайного множества эквивалентна фиксации $k = Card(Y)$ параметров из $(2^k — 1)$ параметров, задающих распределение случайного множества A в общем случае.

При обосновании возможности сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств будет применяться следующая теорема.

Теорема П.2.5. *Если $Proj\ A = B$, то $Proj\ \bar{A} = \bar{B}$.*

Для *доказательства* достаточно воспользоваться тождеством из теории случайных множеств $P(\bar{A} = X) = P(A = \bar{X})$, формулой для вероятности накрытия $P(y \in A)$, определением отрицания нечеткого множества и тем, что сумма всех $P(A=X)$ равна 1. При этом под формулой для вероятности накрытия имеется в виду следующее утверждение: чтобы найти вероятность накрытия фиксированного элемента q случайным подмножеством S конечного множества Q, достаточно вычислить

$$P(q \in S) = P(\{\omega : q \in S(\omega)\}) = \sum_{A: q \in A, A \subseteq 2^Q} P(S = A)$$

где суммирование идет по всем подмножествам A множества Q, содержащим q.

Пересечения и произведения нечетких и случайных множеств. Выясним, как операции над случайными множествами соотносятся с операциями над их проекциями. В силу законов де Моргана (теорема П.2.1 в разделе П.2.1) и теоремы П.2.5 достаточно рассмотреть операцию пересечения случайных множеств.

Теорема П.2.6. *Если случайные подмножества A_1 и A_2 конечного множества У независимы, то нечеткое множество Proj*$(A_2 \cap A_2)$ *является произведением нечетких множеств Proj A_1 и Proj A_2.*

Доказательство. Надо показать, что для любого $y \in Y$

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = P(y \in A_1) P(y \in A_2) \qquad (\text{П.2.9})$$

По формуле для вероятности накрытия точки случайным множеством (см. выше)

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \sum_{X: y \in X} P((A_1 \cap A_2) = X) \qquad (\text{П.2.10})$$

Легко проверить, что распределение пересечения случайных множеств $A_1 \cap A_2$ можно выразить через их совместное распределение следующим образом:

$$P(A_1 \cap A_2 = X) = \sum_{X_1, X_2 : X_1 \cap X_2 = X} P(A_1 = X_1, A_2 = X_2) \qquad (\text{П.2.11})$$

Из соотношений (П.2.10) и (П.2.11) следует, что вероятность накрытия для пересечения случайных множеств можно представить в виде двойной суммы

$$P\left(y \in A_1 \cap A_2\right) = \sum_{X:y\in X}\ \sum_{X_1,X_2:X_1\cap X_2=X} P\left(A_1 = X_1, A_2 = X_2\right)$$

(П.2.12)

Заметим теперь, что правую часть формулы (П.2.12) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{X_1,X_2:y\in X_1,\ y\in X_2} P\left(A_1 = X_1, A_2 = X_2\right) \qquad \text{(П.2.13)}$$

Действительно, формула (П.2.12) отличается от формулы (П.2.13) лишь тем, что в ней сгруппированы члены, в которых пересечение переменных суммирования $X_1 \cap X_2$ принимает постоянное значение. Воспользовавшись определением независимости случайных множеств и правилом перемножения сумм, получаем, что из (П.2.12) и (П.2.13) вытекает равенство

$$P\left(y \in A_1 \cap A_2\right) = \left(\sum_{X_1:y\in X_1} P\left(A_1 = X_1\right)\right)\left(\sum_{X_2:y\in X_2} P\left(A_2 = X_2\right)\right)$$

Для завершения доказательства теоремы 4 достаточно еще раз сослаться на формулу для вероятности накрытия точки случайным множеством.

Определение П.2.3. *Носителем случайного множества C называется совокупность всех тех элементов $y \in Y$, для которых $P(y \in C) > 0$.*

Теорема П.2.7. *Равенство*

$$Proj(A_1 \cap A_2) = (ProjA_1) \cap (ProjA_2)$$

верно тогда и только тогда, когда пересечение носителей случайных множеств $\bar{A}_1 \cap A_2$ и $A_1 \cap \bar{A}_2$ пусто.

Доказательство. Необходимо выяснить условия, при которых

$$P(y \in A_1 \cap A_2) = \min\left(P(y \in A_1), P(y \in A_2)\right) \qquad \text{(П.2.14)}$$

Положим

$$p_i = P(y \in A_1 \cap A_2),\ \ p_2 = P\left(y \in \bar{A}_1 \cap A_2\right),\ \ p_3 = P\left(y \in A_1 \cap \bar{A}_2\right)$$

.

Тогда равенство (П.2.14) сводится к условию

$$p_1 = \min(p_1 + p_2, p_1 + p_3). \qquad \text{(П.2.15)}$$

Ясно, что соотношение (П.2.15) выполнено тогда и только тогда, когда $p_2 p_3 = 0$ при всех $y \in Y$, т.е. не существует ни одного элемента $y_0 \in Y$ такого, что одновременно $P(y_0 \in \bar{A}_1 \cap A_2) > 0$ и $P(y_0 \in A_1 \cap \bar{A}_2) > 0$, а это эквивалентно пустоте пересечения носителей случайных множеств $\bar{A}_1 \cap A_2$ и $A_1 \cap \bar{A}_2$. Теорема П.2.7 доказана.

Сведение последовательности операций над нечеткими множествами к последовательности операций над случайными множествами. Выше получены некоторые связи между нечеткими и случайными множествами. Изучение этих связей в работе [9] началось с введения случайных множеств с целью развития и обобщения аппарата нечетких множеств Л. Заде. Дело в том, что математический аппарат нечетких множеств не позволяет в должной мере учитывать различные варианты зависимости между понятиями (объектами), моделируемыми с его помощью, т.е. не является достаточно гибким. Так, для описания «общей части» двух нечетких множеств есть лишь две операции — произведение и пересечение. Если применяется первая из них, то фактически предполагается, что множества ведут себя как проекции независимых случайных множеств (см. выше теорему П.2.6). Операция пересечения также накладывает вполне определенные ограничения на вид зависимости между множествами (см. выше теорему П.2.7), причем в этом случае найдены даже необходимые и достаточные условия. Желательно иметь более широкие возможности для моделирования зависимости между множествами (понятиями, объектами). Использование математического аппарата случайных множеств предоставляет такие возможности.

Цель сведения теории нечетких множеств к теории случайных множеств в том, чтобы за любой конструкцией из нечетких множеств увидеть конструкцию из случайных множеств, определяющую свойства первой, аналогично тому, как за плотностью распределения вероятностей мы видим случайную величину. Рассмотрим результаты по сведению алгебры нечетких множеств к алгебре случайных множеств.

Определение П.2.4. *Вероятностное пространство* $\{\Omega, G, P\}$ *назовем делимым, если для любого измеримого множества* $X \in G$ *и любого положительного числа* α, *меньшего* $P(X)$, *можно указать измеримое множество* $Y \subset X$ *такое, что* $P(Y) = \alpha$.

Пример. Пусть Ω — единичный куб конечномерного линейного пространства, G есть сигма-алгебра борелевских множеств, а P — мера Лебега. Тогда $\{\Omega, G, P\}$ — делимое вероятностное пространство.

Таким образом, делимое вероятностное пространство — это не экзотика. Обычный куб — пример такого пространства.

Доказательство сформулированного в примере утверждения проводится стандартными математическими приемами, основанными на том, что измеримое множество можно сколь угодно точно приблизить открытыми множествами. Последние представляются в виде суммы не более чем счетного числа открытых шаров, а для шаров делимость проверяется непосредственно (от шара X тело объема $\alpha < P(X)$ отделяется соответствующей плоскостью).

Теорема П.2.8. *Пусть даны случайное множество* A *на делимом вероятностном пространстве* $\{\Omega, G, P\}$ *со значениями во множестве всех подмножеств множества* $У$ *из конечного числа элементов, и нечеткое множество* D *на* $У$. *Тогда существуют случайные множества* C_1, C_2, C_3, C_4 *на том же вероятностном пространстве такие, что*

$$Proj(A \cap C_1) = B \cap D\ ,\ Proj(A \cap C_2) = BD,$$

$$Proj(A \cup C_3) = B \cup D\ ,\ Proj(A \cup C_4) = B + D,$$

$$ProjC_i = D\ ,\ I = 1, 2, 3, 4,$$

где $B = Proj\ A$.

Доказательство. В силу справедливости законов де Моргана для нечетких (см. теорему П.2.1 в разделе П.2.1 выше) и для случайных множеств, а также теоремы П.2.5 выше (об отрицаниях) достаточно доказать существование случайных множеств C_1 и C_2.

Рассмотрим распределение вероятностей на множестве всех подмножеств множества $У$, соответствующее случайному множеству C такому, что $Proj\ C = D$ (оно существует в силу теоремы П.2.3).

Построим случайное множество C_2 с указанным распределением, независимое от A. Тогда $Proj(A \cap C_2) = BD$ по теореме П.2.6.

Перейдем к построению случайного множества C_1. По теореме П.2.7 необходимо и достаточно определить случайное множество $C_1(\omega)$ так, чтобы $Proj\ C_1 = D$ и пересечение носителей случайных множеств $A \cap \bar{C}_1$ и $\bar{A} \cap C_1$ было пусто, т.е.

$$p_2 = P\left(y \in A \cap \overline{C}_1\right) = 0$$

для $y \in Y_1 = \{y : \mu_B(y) \leqslant \mu_D(y)\}$ и

$$p_2 = P\left(y \in \overline{A} \cap C_1\right) = 0$$

для $y \in Y_2 = \{y : \mu_B(y) \geqslant \mu_D(y)\}$.

Построим $C_1(\omega)$, исходя из заданного случайного множества $A(\omega)$. Пусть $y_1 \in Y_2$. Исключим элемент y_1 из $A(\omega)$ для стольких элементарных событий ω, чтобы для полученного случайного множества $A_1(\omega)$ было справедливо равенство

$$P(y_1 \in A_1) = \mu_D(y_1)$$

(именно здесь используется делимость вероятностного пространства, на котором задано случайное множество $A(\omega)$). Для $y \neq y_1$, очевидно,

$$P(y \in A_1) = P(y \in A).$$

Аналогичным образом последовательно исключаем y из $A(\omega)$ для всех $y \in Y_2$ и добавляем y в $A(\omega)$ для всех $y \in Y_1$, меняя на каждом шагу $P(y \in A_i)$ только для $y = y_i$ так, чтобы

$$P(y_i \in A_i) = \mu_D(y_i)$$

(ясно, что при рассмотрении $y_i \in Y_1 \cap Y_2$ случайное множество $A_i(\omega)$ не меняется). Перебрав все элементы $У$, получим случайное множество $A_k(\omega) = C_1(\omega)$, для которого выполнено требуемое. Теорема П.2.8 доказана.

Основной результат о сведении теории нечетких множеств к теории случайных множеств дается следующей теоремой.

Теорема П.2.9. *Пусть $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_t$ — некоторые нечеткие подмножества множества $У$ из конечного числа элементов. Рассмотрим результаты последовательного выполнения теоретико-множественных операций*

$$B^m = ((\ldots((B_1 \circ B_2) \circ B_3) \circ \ldots) \circ B_{m-1}) \circ B_m,\ m = 1, 2, \ldots, t,$$

где $\circ$ – символ одной из следующих теоретико–множественных операций над нечеткими множествами: пересечение, произведение, объединение, сумма (на разных местах могут стоять разные символы). Тогда существуют случайные подмножества $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_t$ того же множества $У$ такие, что

$$ProjA_i = B_i,\ i = 1, 2, \ldots, t,$$

и, кроме того, результаты теоретико-множественных операций связаны аналогичными соотношениями

$$Proj\{((\ldots((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes A_{m-1}) \otimes A_m\} = B^m,\ m = 1, 2, \ldots, t,$$

где знак $\otimes$ означает, что на рассматриваемом месте стоит символ пересечения $\cap$ случайных множеств, если в определении B^m стоит символ пересечения или символ произведения нечетких множеств, и соответственно символ объединения $\cup$ случайных множеств, если в B^m стоит символ объединения или символ суммы нечетких множеств

Комментарий. Поясним содержание теоремы. Например, если

$$B^5 = (((B_1 + B_2) \cap B_3)B_4) \cup B_5,$$

то

$$(((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes A_4) \otimes A_5 = (((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \cap A_4) \cup A_5.$$

Как совместить справедливость дистрибутивного закона для случайных множеств (вытекающего из его справедливости для обычных множеств) с теоремой П.2.2 раздела П.2.1 выше, в которой показано, что для нечетких множеств, вообще говоря, $(B_1 + B_2)B_3 \neq B_1B_3 + B_2B_3$? Дело в том, что хотя в соответствии с теоремой П.2.9 для любых трех нечетких множеств B_1, B_2 и B_3 можно указать три случайных множества A_1, A_2 и A_3 такие, что

$$Proj(A_i) = B_i,\ i = 1, 2, 3,\ Proj(A_1 \cup A_2) = B_1 + B_2,$$

$$Proj((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = B^3,$$

где

$$B^3 = (B_1 + B_2)B_3,$$

но при этом, вообще говоря,

$$Proj(A_1 \cap A_3) \neq B_1B_3$$

и, кроме случаев, указанных в теореме П.2.2 раздела П.2.1,

$$Proj((A_1 \cup A_1) \cap A_3) \neq B_1B_3 + B_2B_3.$$

Доказательство теоремы 7 проводится методом математической индукции. При $t = 1$ распределение случайного множества строится с помощью теоремы П.2.3. Затем конструируется само случайное множество A_1, определенное на делимом вероятностном пространстве (нетрудно проверить, что на делимом вероятностном пространстве можно построить случайное подмножество конечного множества с любым заданным распределением именно в силу делимости пространства). Далее случайные множества A_2, A_3, ..., A_t строим по индукции с помощью теоремы П.2.8. Теорема П.2.9 доказана.

Замечание. Проведенное доказательство теоремы П.2.9 проходит и в случае, когда при определении B^m используются отрицания, точнее, кроме B^m ранее введенного вида используются также последовательности результатов теоретико-множественных операций, очередной шаг в которых имеет вид

$$B_1^m = \overline{B^{m-1}} \circ B_m,\ \ B_2^m = B^{m-1} \circ \overline{B_m},\ \ B_1^m = \overline{B^{m-1}} \circ \overline{B_m}$$

А именно, сначала при помощи законов де Моргана (теорема П.2.1 раздела П.2.1 выше) проводится преобразование, в результате которого в последовательности B^m остаются только отрицания отдельных подмножеств из совокупности B_1, B_2, B_3, …, B_t, а затем с помощью теоремы П.2.5 вообще удается избавиться от отрицаний и вернуться к условиям теоремы П.2.9.

Итак, в настоящем разделе описаны связи между такими объектами нечисловой природы, как нечеткие и случайные множества, установленные в нашей стране в первой половине 1970-х годов. Через несколько лет, а именно, в начале 1980-х гг., близкие подходы стали развиваться и за рубежом. Одна из работ [18] носит примечательное название «Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств».

В нечисловой статистике разработан ряд методов статистического анализа нечетких данных. В том числе методы классификации, регрессии, проверки гипотез о совпадении функций принадлежности по опытным данным и т.д. При этом оказались полезными общие подходы статистики объектов нечисловой природы (см. главу 7 настоящего учебника). Методологические и прикладные вопросы теории нечеткости обсуждались и в научно-популярной литературе (см., например, статью [13], которая представляет интерес и в XXI веке).

П.2.4. Статистика нечетких множеств

Нечеткие множества — частный вид объектов нечисловой природы. Поэтому при обработке выборки, элементами которой являются нечеткие множества, могут быть использованы различные методы анализа статистических данных произвольной природы — расчет средних, непараметрических оценок плотности, построение диагностических правил и т.д.

Среднее значение нечеткого множества. Однако иногда используются методы, учитывающие специфику нечетких множеств. Например, пусть носителем нечеткого множества является конечная совокупность действительных чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогда под средним значением нечеткого множества иногда понимают число. А именно, среднее значение нечеткого множества определяют по формуле:

$$M(A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)}, ,$$

где $\mu_A(x_i)$ — функция принадлежности нечеткого множества A. Если знаменатель равен 1, то эта формула определяет математическое ожидание случайной величины, для которой вероятность попасть в точку x_i равна $\mu_A(x_i)$. Такое определение наиболее естественно, когда нечеткое множество A интерпретируется как нечеткое число.

Очевидно, наряду с $M(A)$ может оказаться полезным использование эмпирических средних, определяемых (согласно статистике в пространствах произвольной природы) путем решения соответствующих оптимизационных задач. Для конкретных расчетов необходимо ввести то или иное расстояние между нечеткими множествами.

Расстояния в пространствах нечетких множеств. Как известно, многие методы статистики нечисловых данных базируются на использовании расстояний (или показателей различия) в соответствующих пространствах нечисловой природы. Расстояние между нечеткими подмножествами A и B множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ можно определить как

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(x_j) - \mu_B(x_j) \right|, ,$$

где $\mu_A(x_i)$ — функция принадлежности нечеткого множества A, а $\mu_B(x_j)$ — функция принадлежности нечеткого множества B. Может использоваться и другое расстояние:

$$D(A,B)=\frac{\sum_{j=1}^{k}\left|\mu_A(x_j)-\mu_B(x_j)\right|}{\sum_{j=1}^{k}\left|\mu_A(x_j)+\mu_B(x_j)\right|}$$

(Примем это расстояние равным 0, если функции принадлежности тождественно равны 0.)

В соответствии с аксиоматическим подходом к выбору расстояний (метрик) в пространствах нечисловой природы разработан обширный набор систем аксиом, из которых выводится тот или иной вид расстояний (метрик) в конкретных пространствах, в том числе в пространствах нечетких множеств (см. раздел 7.5 настоящего учебника). При использовании вероятностных моделей расстояние между случайными нечеткими множествами (т.е. между случайными элементами со значениями в пространстве нечетких множеств) само является случайной величиной, имеющей в ряде постановок асимптотически нормальное распределение [16].

Проверка гипотез о нечетких множествах. Пусть ответ эксперта — нечеткое множество. Естественно считать, что его ответ, как показание любого средства измерения, содержит погрешности. Если есть несколько экспертов, то в качестве единой оценки (группового мнения) естественно взять эмпирическое среднее их ответов. Но возникает естественный вопрос: действительно ли все эксперты измеряют одно и то же? Может быть, глядя на реальный объект, они оценивают его с разных сторон? Например, на научную статью можно смотреть как с теоретической точки зрения, так и с прикладной, и соответствующие оценки будут, скорее всего, различны (если они совпадают, то работа либо никуда не годится, либо является выдающейся).

Итак, возник вопрос: как проверить согласованность мнений экспертов? Надо сначала определить понятие согласованности. Пусть A — нечеткий ответ эксперта. Будем считать, что соответствующая функция принадлежности есть сумма двух слагаемых:

$$\mu_A(u) = \mu_{N(A)}(u) + \xi_A(u),$$

где $N(A)$ — «истинное» нечеткое множество, а $\xi_A(u)$ — «погрешность» эксперта как прибора. Естественно рассмотреть две постановки.

1. Мнения экспертов $A(1)$, $A(2)$, ..., $A(m)$ будем считать согласованными, если

$$N(A(1)) = N(A(2)) = \ldots = N(A(m)).$$

2. Рассмотрим две группы экспертов. В первой у всех «истинное» мнение $N(A)$, а во второй — у всех $N(B)$. Две группы будем считать согласованными по мнениям, если

$$N(A) = N(B).$$

Согласованность определена. Как же ее проверить? Если экспертов достаточно много, то эти гипотезы можно проверять отдельно для каждого элемента множества — общего носителя нечетких ответов. Проверка последней гипотезы переходит в проверку однородности двух независимых выборок (см. главу 2 настоящего учебника). Здесь ограничимся приведенными выше постановками основных гипотез (ср. с аналогичными гипотезами для люсианов, рассмотренными в [14, 15]).

Восстановление зависимости между нечеткими переменными. Рассмотрим две нечеткие переменные A и B. Пусть каждый из n испытуемых выдает в ответ на вопрос два нечетких множества A_i и B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Необходимо восстановить зависимость B от A, другими словами, наилучшим образом приблизить B с помощью A.

Для иллюстрации основной идеи ограничимся парной линейной регрессией нечетких множеств. Нечеткое множество C назовем линейной функцией от нечеткого множества A, если для любого x из носителя A функции принадлежности множеств A и C таковы, что $\mu_C(x) = \mu_A(y)$ при $x = \alpha y + \beta$. Другими словами,

$$\mu_C(x) = \mu_A((x - \beta)/\alpha)$$

для любого x из носителя A. В таком случае естественно писать

$$C = \alpha A + \beta.$$

Однако нечеткие переменные, как и привычные статистикам числовые переменные, обычно несколько отклоняются от линейной связи. Наилучшее линейное приближение нечеткой переменной B с помощью линейной функции от нечеткой переменной A естественно искать, решая задачу минимизации по α, β расстояния от B до C. Пусть

$$\rho(B, \alpha_0 A + \beta_0) = \min \rho(B, \alpha A + \beta),$$

где ρ — некоторое расстояние между нечеткими множествами, а минимизация проводится по всем возможным значениям α и β. Тогда наилучшей линейной аппроксимацией B является $\alpha_0 A + \beta_0$. Если рассматриваемый минимум равен 0, то имеет место точная линейная зависимость.

Для восстановления зависимости по выборочным парам нечетких переменных естественно воспользоваться подходом, развитым в статистике в пространствах произвольной природы для параметрической регрессии (аппроксимации). В соответствии с рассмотрениями главы 7 настоящего учебника в качестве наилучших оценок параметров линейной зависимости следует рассматривать

$$(\alpha^*, \beta^*) = Arg \min_{\alpha,\beta} \sum_{k=1}^{n} \rho\left(B_i, \alpha A_i + \beta\right).$$

Тогда наилучшим линейным приближением B является $C^* = \alpha^* A + \beta^*$.

Вероятностно-статистическая теория регрессионного анализа нечетких переменных [12] строится как частный случай аналогичной теории для переменных произвольной природы (глава 7 настоящего учебника, подробнее — в [14, 15]). В частности, при обычных предположениях оценки α^*, β^* являются состоятельными, т.е. $\alpha^* \to \alpha_0$ и $\beta^* \to \beta_0$ при $n \to \infty$.

Кластер-анализ нечетких переменных. Строить группы сходных между собой нечетких переменных (кластеры) можно многими способами. Опишем два семейства алгоритмов.

Пусть на пространстве, в котором лежат результаты наблюдений, т.е. на пространстве нечетких множеств, заданы две меры близости ρ и τ (например, это могут быть введенные выше расстояния d и D). Берется один из результатов наблюдений (нечеткое множество) и вокруг него описывается шар радиуса R, определяемый мерой близости ρ. (Напомним, что шаром с центром в x относительно ρ называется множество всех элементов y рассматриваемого пространства таких, что $\rho(x, y) \leqslant R$.) Берутся результаты наблюдений (элементы выборки), попавшие в этот шар, и находится их эмпирическое среднее относительно второй меры близости τ. Оно берется за новый центр, вокруг которого снова описывается шар радиуса R относительно ρ, и процедура повторяется. (Чтобы алгоритм был полностью определен, необходимо сформулировать правило выбора элемента эмпирического среднего в качестве нового центра, если эмпирическое среднее состоит более чем из одного элемента.)

Когда центр шара зафиксируется (перестанет меняться), попавшие в этот шар элементы объявляются первым кластером и исключаются из дальнейшего рассмотрения. Алгоритм применяется к совокупности оставшихся результатов наблюдений, выделяет из нее второй кластер и т.д.

Всегда ли центр шара остановится? При реальных расчетах в течение многих лет так было всегда. Соответствующая теория была построена лишь в 1977 г. [10]. Доказано, что описанный выше процесс всегда остановится через конечное число шагов. Причем число шагов до остановки оценивается через максимально возможное число результатов наблюдений в шаре радиуса R относительно ρ.

Обширное семейство образуют алгоритмы кластер-анализа типа «Дендрограмма», известные также под названием «агломеративные иерархические алгоритмы средней связи». На первом шаге алгоритма из этого семейства каждый результат наблюдения рассматривается как отдельный кластер. Далее на каждом шагу происходит объединение двух самых близких кластеров. Название «Дендрограмма» объясняется тем, что результат работы алгоритма обычно представляется в виде дерева. Каждая его ветвь соответствует кластеру, появляющемуся на каком-либо шагу работы алгоритма. Слияние ветвей соответствует объединению кластеров, а ствол — заключительному шагу, когда все наблюдения оказываются объединенными в один кластер.

Для работы алгоритмов кластер-анализа типа «Дендрограмма» необходимо определить расстояние между кластерами. Естественно использовать ассоциативные средние (которыми, как известно, являются средние по Колмогорову — см. раздел 6.4 настоящего учебника) всевозможных попарных расстояний между элементами двух рассматриваемых кластеров. Итак, расстояние между кластерами K и L, состоящими из n_1 и n_2 элементов соответственно, определяется по формуле:

$$\tau(K, L) = F^{-1}\left(\frac{1}{n_1 n_2}\sum_{i\in K}\sum_{j\in L}\left(\rho\left(X_i, X_i\right)\right)\right),$$

где ρ — некоторое расстояние между нечеткими множествами, F — строго монотонная функция (строго возрастающая или строго убывающая).

Соображения теории измерений позволяют ограничить круг возможных алгоритмов типа «Дендрограмма». Естественно принять, что единица измерения расстояния выбрана произвольно. Тогда согласно результатам главы 6 настоящего учебника из всех средних по Колмогорову годятся только степенные средние и среднее геометрическое, т.е. $F(z) = z^{\lambda}$ при $\lambda \neq 0$ или $F(z) = \ln z$.

Чтобы получить разбиение на кластеры, надо «разрезать» дерево на определенной высоте, т.е. объединять кластеры лишь до тех пор, пока расстояние между ними меньше заранее выбранной константы. При альтернативном подходе заранее фиксируется число кластеров. Рассматривают и двухкритериальную постановку, когда минимизируют сумму (или максимум) внутрикластерных разбросов и число кластеров. Для решения задачи двухкритериальной минимизации либо один из критериев заменяют на ограничение, либо два критерия «свертывают» в один, либо применяют иные подходы (последовательная оптимизация, построение поверхности Парето и др.).

При классификации нечетких множеств полезны многие подходы, рассмотренные в [14, 15], а именно, все подходы, основанные только на использовании расстояний.

Сбор и описание нечетких данных. Разработано большое количество процедур описания нечеткости. Так, согласно Э. Борелю [2], понятие «Куча» описывается с помощью функции распределения: при каждом конкретном x значение функции принадлежности — это доля людей, считающих совокупность из x зерен кучей. Результат подобного опроса может дать и кривую иного вида, например, по поводу понятия «молодой» (слева будут отделены «дети», а справа — «люди зрелого и пожилого возраста»). Нечеткая толерантность может оцениваться с помощью случайных толерантностей (см. главу 7 настоящего учебника и [14, 15]).

Целесообразно попытаться выделить наиболее практически полезные простые формы функций принадлежности. Видимо, наиболее простой является «ступенька» — внутри некоторого интервала функция принадлежности равна 1, а вне этого интервала равна 0. Это — простейший способ «размывания» числа путем замены его интервалом. Нечеткое множество описывается двумя числами — концами интервала. Оценки этих чисел можно получить с помощью экспертов. Статистическая теория подобных нечетких множеств — т.е. статистика интервальных данных — рассмотрена в [14, 15].

Тремя числами $a < b < c$ описывается функция принадлежности типа треугольника. При этом левее числа a и правее числа c функция принадлежности равна 0. В точке b функция принадлежности принимает значение 1. На отрезке $[a; b]$ функция принадлежности линейно растет от 0 до 1, а на отрезке $[b; c]$ — линейно убывает от 1 до 0. Оценки трех чисел $a < b < c$ получают при опросе экспертов.

Следующий по сложности вид функции принадлежности — типа трапеции — описывается четырьмя числами $a < b$

$< c < d$. Левее a и правее d функция принадлежности равна 0. На отрезке [$a; b$] она линейно возрастает от 0 до 1, на отрезке [$b; c$] во всех точках равна 1, а на отрезке [$c; d$] линейно убывает от 1 до 0. Для оценивания четверки чисел $a < b < c < d$ используют экспертов.

Ряд результатов статистики нечетких данных приведен в первой монографии российского автора по нечетким множествам [12] и во многих дальнейших публикациях.

Литература

1. *Битюков П.В.* Моделирование задач ценообразования на электронные обучающие курсы в области дистанционного обучения: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата экономических наук. — М.: Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2002. — 24 с.

2. *Борель Э.* Вероятность и достоверность. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 120 с.

3. *Гермашев И.В., Дербишер В.Е., Морозенко Т.Ф., Орлова С.А.* Оценка качества технических объектов с использованием нечетких множеств / Заводская лаборатория. 2001. Т.67. №1. С 65– 68.

4. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 580 с.

5. *Загонова Н.С., Орлов А.И.* Эконометрическая поддержка контроллинга инноваций. Нечеткий выбор / Российское предпринимательство. 2004. №4. С.54–57.

6. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 166 с.

7. *Карминский А.М., Оленев Н.И., Примак А.Г., Фалько С.Г.* Контроллинг в бизнесе. Методологические и практические основы построения контроллинга в организациях. — М.: Финансы и статистика, 1998. — 256 с.

8. *Лебег А.* Об измерении величин. — М.: Учпедгиз, 1960. — 204 с.

9. *Орлов А.И.* Основания теории нечетких множеств (обобщение аппарата Заде). Случайные толерантности. — В сб.: Алгоритмы многомерного статистического анализа и их применения. — М.: Изд-во ЦЭМИ АН СССР, 1975. С. 169—175.

10. *Орлов А.И.* Сходимость эталонных алгоритмов. — В сб.: Прикладной многомерный статистический анализ. Ученые записки по статистике. Т. 33. — М.: Наука, 1978. С. 361–364.

11. *Орлов А.И.* Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.

12. *Орлов А.И.* Задачи оптимизации и нечеткие переменные. — М.: Знание, 1980. — 64 с.

13. *Орлов А.И.* Математика нечеткости / Наука и жизнь. 1982. № 7. С. 60–67.

14. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

15. *Орлов А.И.* Организационно-экономическое моделирование. Часть 1. Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 544 с.

16. *Орлов А.И., Раушенбах Г.В.* Метрика подобия: аксиоматическое введение, асимптотическая нормальность. — В сб.: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. — Пермь: Изд-во Пермского государственного университета, 1986, с. 148—157.

17. *Подиновский В.В.* Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. — М.: Физматлит, 2007. — 64 с.

18. *Goodman I.R.* Fuzzy sets as equivalence classes of random sets // Fuzzy Set and Possibility Theory: Recent Developments. — New York-Oxford-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt, Pergamon Press, 1982. — P. 327–343. (Перевод на русский язык: Гудмэн И. Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств. — В сб.: Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. — М.: Радио и связь, 1986. — С. 241–264)

19. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets / Information and Control. — 1965. V.8. N 3. P.338– 353.

Контрольные вопросы и задачи

1. В каких случаях целесообразно применение нечетких множеств?

2. Справедливо ли для нечетких множеств равенство (A + B)C = AC + BC? А равенство (AB)C = (AC)(BC)?

3. Опишите с помощью нечеткого подмножества временной шкалы понятие «молодой человек» (на основе опроса 10–20 экспертов).

4. Опишите с помощью теории нечеткости понятие «куча зерен» (на основе опроса 10–20 экспертов).

5. Как с точки зрения нечетких множеств можно интерпретировать вероятность накрытия определенной точки случайным множеством?

6. На множестве $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ задано нечеткое множество B с функцией принадлежности $\mu_B(y)$, причем $\mu_B(y_1) = 0{,}1$, $\mu_B(y_2) = 0{,}2$,

$\mu_B(y_3) = 0,3$. Постройте случайное множество A так, чтобы Proj A = B.

7. На множестве $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ задано нечеткое множество B с функцией принадлежности $\mu_B(y)$, причем $\mu_B(y_1) = 0,2$, $\mu_B(y_2) = 0,1$, $\mu_B(y_3) = 0,5$. Постройте случайное множество A так, чтобы Proj A = B.

8. На множестве $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ задано нечеткое множество B с функцией принадлежности $\mu_B(y)$, причем $\mu_B(y_1) = 0,5$, $\mu_B(y_2) = 0,4$, $\mu_B(y_3) = 0,7$. Постройте случайное множество A так, чтобы Proj A = B.

9. На множестве $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ задано нечеткое множество B с функцией принадлежности $\mu_B(y)$, причем $\mu_B(y_1) = 0,3$, $\mu_B(y_2) = 0,2$, $\mu_B(y_3) = 0,1$. Постройте случайное множество A так, чтобы Proj A = B.

10. Расскажите о расстояниях в пространствах нечетких множеств.

Темы докладов, рефератов, исследовательских работ

1. Обсудите суждение: «Мы мыслим нечетко» (см. [13]). Почему нечеткость мышления помогает взаимопониманию?

2. Взаимосвязь теории нечеткости и теории вероятностей.

3. Методы оценивания функции принадлежности нечеткого множества.

4. Теория нечеткости и интервальная математика.

5. Описание данных для выборок, элементы которых — нечеткие множества.

6. Регрессионный анализ нечетких переменных (согласно [14, 15]).

7. Кластерный анализ нечетких данных.

8. Случайные толерантности и нечеткие толерантности (согласно [9, 11, 14, 15]).

9. Докажите, что для расстояний между нечеткими множествами, введенных в разделе П.2.4, справедливо неравенство треугольника.

10. Непараметрические оценки плотности распределения вероятностей в пространстве нечетких множеств.

Приложение 3

Методическое обеспечение учебной дисциплины «Эконометрика»

Приведем ряд материалов, полезных преподавателям и студентам. Они отражают десятилетний опыт факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

Примечание. В МГТУ им. Н.Э. Баумана блок «Эконометрика и статистика» состоит из трех дисциплин. Первая из них — «Прикладная статистика» (весенний семестр второго курса). Вторая — «Эконометрика» (осенний семестр четвертого курса). Ее содержание раскрыто в настоящем учебнике. Третий — «Организационно-экономическое моделирование» (весенний семестр четвертого курса). На младших курсах дается обширный блок математических дисциплин, в который входит, в частности, теория вероятностей и математическая статистика.

П.3.1. Содержание лекций и вопросы к экзамену по дисциплине «Эконометрика»

Приводим типовое содержание лекций (34 аудиторных часа) с указанием разделов настоящего учебника.

1. Необходимость выборочных исследований. Построение выборочной функции ожидаемого спроса и расчет оптимальной розничной цены при заданной оптовой цене (издержках). Анкетное исследование (на примере маркетингового исследования потребителей растворимого кофе). Различные виды формулировок вопросов (открытый, закрытый, полузакрытый вопросы), их достоинства и недостатки. Биномиальная и гипергеометрическая модели выборки, их близость в случае большого объема генеральной совокупности по сравнению с выборкой.

Глава 1, разделы 1.1, 1.2.

2. Асимптотическое распределение выборочной доли (в случае ответов типа «да» — «нет»). Интервальное оценивание доли и метод проверки гипотезы о равенстве долей.

Глава 1, разделы 1.3– 1.5.

3. Различные формулировки гипотезы однородности двух выборок. Случай конечного числа градаций. Критерий Крамера-Уэлча для проверки равенства математических ожиданий.

Глава 2, разделы 2.1– 2.3.

4. Гипотеза однородности двух независимых выборок. Расчет статистики двухвыборочного критерия Вилкоксона (Манна-Уитни) и принятие решения на основе его асимптотической нормальности. Состоятельнее критерии проверки однородности. Реальные и номинальные уровни значимости.

Глава 2, разделы 2.4– 2.6.

5. Метод наименьших квадратов для линейной прогностической функции. Подход к оцениванию параметров. Критерий правильности расчетов. Оценка остаточной дисперсии. Точечный и интервальный прогноз. Модель с периодической составляющей.

Глава 3, разделы 3.1, 3.7.

6. Метод наименьших квадратов для модели, линейной по параметрам. Оценивание коэффициентов многочлена. Преобразования переменных. Случай нескольких независимых переменных (регрессоров). Коэффициенты корреляции. Оценивание параметров функции Кобба-Дугласа.

Глава 3, разделы 3.2, 3.3, 3.4.

7. Оценка остаточной дисперсии — критерий качества эконометрической модели (при фиксированном числе оцениваемых параметров). Коррекция на число параметров. Типовое поведение остаточной дисперсии при расширении множества регрессоров. Оценка степени полинома и описание асимптотического поведения этой оценки (геометрическим распределением со сдвигом).

Глава 3, раздел 3.5.

8. Инфляция как рост цен. Разброс цен во времени и пространстве. Потребительские корзины. Определение индекса инфляции. Расчет индекса инфляции. Теорема умножения

и средний индекс (темп) инфляции. Теоремы умножения и сложения для индекса инфляции. Виды инфляции: спроса, издержек, административная.

Глава 4, разделы 4.1– 4.3.

9. Применения индекса инфляции. Приведение к сопоставимым ценам. Прожиточный минимум. Вклады в банки и кредиты. Курс доллара в сопоставимых ценах. Международные сопоставления на основе паритета покупательной способности. Инфляция и бухгалтерская отчетность. Инфляция и стоимость основных фондов предприятия.

Глава 4, разделы 4.4 и 4.5.

10. Примеры процедур экспертного оценивания. Их использование в соревнованиях, при выборе, распределении финансирования. Военный Совет в Филях (1812 год). Метод Дельфи и послевоенное развитие экспертных технологий. Экспертные оценки на современном этапе. Экологические экспертизы. Метод Дельфи. Мозговой штурм. Метод сценариев экспертного прогнозирования.

Глава 5, раздел 5.1.

11. Нахождение итогового мнения комиссии экспертов: методы средних арифметических и медиан рангов. Метод согласования кластеризованных ранжировок.

Глава 5, разделы 5.2 и 5.3.

12. Основные стадии проведения экспертного исследования. Формирование целей экспертного исследования (сбор информации для ЛПР и/или подготовка проекта решения для ЛПР и др.). Роль диссидентов. Формирование состава экспертной комиссии: методы списков (реестров), «снежного кома», самооценки, взаимооценки. Проблема априорных предпочтений экспертов.

Глава 5, раздел 5.4.

13. Различные варианты организации экспертного исследования, различающиеся по числу туров (один, несколько, не фиксировано), порядку вовлечения экспертов (одновременно, последовательно), способу учета мнений (с весами, без весов), организации общения экспертов (без общения, заочное, очное с ограничениями («мозговой штурм», Совет в Филях) или без

ограничений). Интуиция эксперта и информационные технологии.

Глава 5, разделы 5.5 и 5.6.

14. Основные понятия (репрезентативной) теории измерений. Определения, примеры, группы допустимых преобразований для шкал наименований, порядка, интервалов, отношений, абсолютной. Требование устойчивости статистических выводов относительно допустимых преобразований шкал. Недопустимость использования среднего арифметического для данных, измеренных в порядковой шкале.

Глава 6, разделы 6.1 и 6.2.

15. Различные виды средних. Пример с распределением доходов. Степенные средние. Структурные средние. Средние по Коши. Средние по Колмогорову.

Глава 6, раздел 6.2.

16. Описание средних, результат сравнения которых устойчив в порядковой шкале, в шкалах интервалов и отношений.

Глава 6, разделы 6.3 и 6.4.

17. Нечисловые статистические данные. Бинарные отношения. Их свойства: рефлексивность, симметричность, транзитивность. Отношения эквивалентности, кластеризованные ранжировки. Отношения толерантности. Описание бинарных отношений матрицами из 0 и 1. Вероятностные модели порождения нечисловых данных.

Глава 7, разделы 7.1– 7.3.

18. Расстояния в пространствах объектов нечисловой природы. Аксиоматическое введение расстояний. Расстояние Кемени. D-метрика. Расстояния между множествами — мера симметрической разности и D-метрика. Медиана Кемени.

Глава 7, разделы 7.4 и 7.5.

19. Оптимизационный подход к определению средних величин. Примеры: математическое ожидание и среднее арифметическое, выборочная и теоретическая медианы, медиана Кемени, среднее множество.

Глава 7, раздел 7.6.

20. Эмпирические и теоретические средние в пространствах произвольной природы. Законы больших чисел для нечисловых данных и их интерпретация в терминах теории экспертного

опроса. Непараметрические оценки плотности в пространствах производной природы.

Глава 7, разделы 7.7, 7.8.

П.3.2. Практические занятия (семинары) и контрольные работы

Основное содержание семинаров — решение задач по тематике курса лекций. Отчетные мероприятия — контрольные (расчетные, самостоятельные) работы. Приводим содержание пяти типовых контрольных работ. Варианты работ различаются задаваемыми преподавателем конкретными параметрами — объемами выборок, значениями переменных, номерами продовольственных товаров и т.п.

Контрольная работа 1. Выборочные исследования

Нас интересуют доли объектов в двух выборках, обладающих определенным свойством.

Объем первой выборки $n_1 = 900$

Из них обладают рассматриваемым свойством $m_1 = 600$

Объем второй выборки $n_2 = 300$

Из них обладают рассматриваемым свойством $m_2 = 150$

1. Укажите доверительные границы для долей объектов в двух выборках, обладающих определенным свойством (с доверительной вероятностью 0.95).

2. Проверьте гипотезу о равенстве долей (уровень значимости $\alpha=0.05$).

Контрольная работа 2. Метод наименьших квадратов

Исходные данные — набор n пар чисел (t_k, x_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, где t_k — независимая переменная (например, время), а x_k — зависимая (например, индекс инфляции), даны в табл.П.3.1. Предполагается, что переменные связаны зависимостью

$$x_k = a\, t_k + b + e_k,\ k = 1,2,\ldots,n,$$

где a и b — параметры, неизвестные статистику и подлежащие оцениванию, а e_k — погрешности, искажающие зависимость.

Таблица П.3.1

Исходные данные для восстановления функции

t_k	2	4	5	6	8	9
x_k	17	24	27	28	33	35

1. Методом наименьших квадратов оцените параметры a и b линейной зависимости. Выпишите восстановленную зависимость.

2. Вычислите восстановленные значения зависимой переменной, сравните их с исходными значениями (найдите разности) и проверьте условие точности вычислений (при отсутствии ошибок в вычислениях сумма исходных значений должна равняться сумме восстановленных).

3. Найдите остаточную сумму квадратов и оцените дисперсию погрешностей.

4. Выпишите точечный прогноз как функцию от t, а также верхнюю и нижнюю доверительные границы для него (для доверительной вероятности 0,95).

5. Рассчитайте прогнозное значение и доверительные границы для него для момента $t = 12$.

6. Как изменятся результаты, если доверительная вероятность будет увеличена? А если она будет уменьшена?

Контрольная работа 3. Индекс инфляции

1. По данным табл.П.3.2 рассчитайте индекс инфляции с 14.03.1991 по 14.03.2001 на основе потребительской корзины из продуктов №№ 2, 7, 14, 18, 19, 25.

Таблица П.3.2

Номенклатура, годовые нормы потребления и цены (руб.)

№ п/п	Наименование продукта питания	Годовая норма, кг	Цена на 14.03.1991	Цена на 14.03.2001
1	Хлеб пшеничный	59,8	0–50	12
2	Хлеб ржаной	65,3	0–20	10

3	Мука пшеничная	18,5	0–46	10
4	Картофель	124,22	0–10	9
5	Капуста	30,4	0–20	8
6	Помидоры	2,8	0–85	80
7	Столовые корнеплоды	40,6	0–20	9
8	Прочие (лук)	27,9	0–50	8
9	Яблоки свежие	15,1	1–50	20
10	Сахар	19,0	0–90	21
11	Говядина	4,4	2–00	85
12	Субпродукты (печень)	0,5	1–40	45
13	Птица	16,1	2–40	52
14	Колбаса докторская	0,4	2–30	95
15	Копчености	0,3	3–70	200
16	Рыба свежая (минтай)	10,9	0–37	80
17	Сельди	0,8	1–40	40
18	Молоко, кефир	110,0	0–32	17
19	Сметана, сливки	1,6	1–70	50
20	Масло животное	2,5	3–60	70
21	Творог	9,8	1–00	45
22	Сыр и брынза	2,3	3–60	70
23	Яйца, десяток	15,2	0–90	20
24	Масло растительное	3,8	1–80	26
25	Маргарин	6,3	1–20	35

2. Гражданин Иванов в марте 1991 г. получил 200 руб., а в марте 2001 г. — 5000 руб. Во сколько раз изменился его доход? Увеличился или уменьшился? (использовать индекс инфляции из задачи 1).

3. За январь индекс инфляции составил 50%, а за февраль — 200%. Чему равен индекс инфляции за два месяца? Каков средний темп (уровень) инфляции?

4. Выразите текущий курс доллара США в ценах марта 1991 г. (индекс инфляции на момент проведения контрольной работы сообщает преподаватель).

Контрольная работа 4. Нахождение итогового упорядочения комиссии экспертов методом средних рангов

В табл.П.3.3 приведены кластеризованные ранжировки — ответы 7 экспертов.

Таблица П.3.3

Кластеризованные ранжировки — ответы экспертов

Эксперты	Упорядочения
1	1 < {2,3} < 4 < 5 < {6,7}
2	{1,3} < 4 < 2< 5< 7 < 6
3	1 < 4 < 2 < 3 < 6 < 5 < 7
4	1 < {2, 4} < 3 < 5 < 7 <6
5	2 < 3 < 4 < 5 <1 <6 <7
6	1 < 3 < 2 < 5 < 6 < 7 < 4
7	1 < 5 < 3 < 4 < 2 < 6 < 7

Найдите:

1) упорядочение по средним арифметическим рангов;

2) упорядочение по медианам рангов;

3) согласующую эти два упорядочения кластеризованную ранжировку.

Контрольная работа 5. Эмпирическое среднее как решение оптимизационной задачи

Дана квадратная матрица (порядка 9) попарных расстояний (мер различия) для множества из 9 элементов $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9$ (табл.П.3.4). Найдите в этом множестве медиану для множества из 5 элементов $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_9\}$.

Таблица П.3.4

Попарные расстояния между бинарными отношениями

Элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
A_1	0	5	3	6	7	4	10	3	11
A_2	5	0	5	6	10	3	2	5	7
A_3	3	5	0	8	2	7	6	5	7
A_4	6	6	8	0	5	4	3	8	8

A_5	7	10	2	5	0	10	8	3	7
A_6	4	3	7	4	10	0	2	3	5
A_7	10	2	6	3	8	2	0	6	3
A_8	3	5	5	8	3	3	6	0	9
A_9	11	7	7	8	7	5	3	9	0

ФИО студента____________________________

Группа ИБМ 1–51

П.3.3. Домашние задания

Домашние задания связаны с выходом «в реальную экономическую жизнь» и нацелены на решение задач, имеющих практическую ценность для различных хозяйствующих субъектов.

Домашнее задание № 1. Оценивание функции спроса

Краткая формулировка. Соберите информацию о максимально возможной цене (в руб.), которую потребители готовы заплатить за ____ (конкретное название товара или услуги выберите из прилагаемого списка или самостоятельно). Опросите не менее 50 человек (не считая отказавшихся от ответа). Постройте выборочную функцию спроса. Найдите розничные цены, максимизирующие прибыль, для пяти различных значений оптовой цены.

Методом наименьших квадратов восстановите (теоретическую) функцию спроса, используя линейную аппроксимацию. Рассчитайте доверительные границы. На основе восстановленной зависимости найдите розничные цены, максимизирующие прибыль, для пяти различных значений оптовой цены, и сопоставьте с результатами оптимизации на основе выборочной функции спроса.

Оформите полученные результаты в виде отчета.

Литература к домашнему заданию № 1 — главы 1 и 3 настоящего учебника.

Список товаров и услуг для использования в домашнем задании №1

1. Учебник по менеджменту
2. Учебник по маркетингу
3. Учебник по макроэкономике
4. Учебник по микроэкономике
5. Учебник по контроллингу
6. Учебник по статистике
7. Учебник по управлению инвестициями
8. Учебник по философии
9. Учебник по социологии
10. Учебник по психологии
11. Учебник по экологии
12. Учебник по английскому языку
13. Учебник по отечественной истории
14. Учебник по экономике предприятия
15. Учебник по управлению персоналом
16. Учебник по управлению проектами
17. Учебник по стратегическому менеджменту
18. Учебник по инновационному менеджменту
19. Учебник по прогнозированию
20. Учебник по организации производства
21. Чашка кофе
22. Холодильник с морозильной камерой
23. Цветок любимому человеку
24. Доступа в Интернет в течение 1 часа
25. Компьютер среднего уровня
26. Сканер
27. Телевизор
28. Фотоаппарат типа «мыльница»
29. Фотоаппарат цифровой
30. СВЧ-гриль
31. Рюкзак-портфель-сумка
32. Телефонный аппарат (проводная связь)
33. Телефонный аппарат мобильной (сотовой) связи
34. За 1 мин. телефонного разговора по мобильной связи

35. За 1 час. телефонного разговора по проводной связи (внутри города)

36. Стиральная машина

37. Стол (письменный)

38. Диван

39. Видеокамера

40. Часы наручные

41. Калькулятор обычный

42. Калькулятор инженерный

43. Одна поездка в наземном городском транспорте

44. Литр бензина

45. Билет на хороший спектакль

46. Батон хлеба

47. Теплая зимняя куртка

48. Обед в столовой МГТУ им. Н.Э. Баумана

49. Пылесос

50. Плеер переносной

51. Костюм

52. Килограмм яблок

53. Обед в ресторане среднего уровня

54. Килограмм сахара

55. Пломба зуба (неосложненная)

56. Сутки в гостинице (при путешествиях)

57. Компьютерный журнал

58. Молодежный журнал

59. Билет в кино

60. Оплата стрижки волос на голове

61. Тетрадь

62. Ручка для записей

63. Подарок другу (подруге) на день рождения

64. Плитка шоколада (200 г)

65. Литровая пластиковая бутылка минеральной воды (негазированной) подмосковного источника

66. Малогабаритный «народный» автомобиль (типа автомобиля «Ока»)

67. Одна поездка в метро

68. Одна пара осенней обуви

69. Плата за посещение пляжа

70. Любимая газета
71. Килограмм бананов
72. Учебник по экономической теории
73. Бутылка «Пепси-Колы» (0,5 л)
74. Книга по истории МГТУ им. Н.Э. Баумана
75. Мышь (для компьютера)
76. Коврик для мыши
77. Лазерный принтер
78. Тостер
79. Поездка на пригородном поезде на 1 зону
80. Переезд поездом из Москвы в Санкт-Петербург
81. Поездка в Париж на неделю
82. Автомобиль среднего уровня
83. Месячное снабжение квартиры горячей водой
84. Месячное пользование электроэнергией (в среднем)
85. Отопление квартиры за месяц
86. Найм квартиры (в месяц)
87. Стол (обеденный)
88. Загородный деревянный дом + 6 соток
89. Бутылка хорошего вина
91. Комплект постельного белья
92. Кресло

Домашнее задание № 2. Расчет и прогнозирование индекса инфляции

Выберите места сбора информации о ценах. Соберите данные по ценам за четыре момента времени, отстоящие друг от друга не менее чем на две недели. Заполните табл.П.3.5. Рассчитайте индексы инфляции. По первым трем индексам методом наименьших квадратов рассчитайте точечный и интервальный прогноз на четвертый момент времени и сравните прогноз с реальным индексом инфляции.

Результаты работы оформите в виде отчета.

Таблица П.3.5

Информация о нормах потребления и ценах

Наименование продукта питания	Годо-вая норма, кг	Цена 14.03.1991	Место сня-тия цен	Цена __ ____ 20__ г.	Цена __ ____ 20__ г.	Цена __ ____ 20__ г.	Цена __ ____ 20__ г.
1. Хлеб и хлебопродукты							
1.1 Мука пшеничная	18,5	0–46					
1.2 Рис	3,5	0–88					
1.3 Другие крупы	4,9	0–62					
1.4 Хлеб пшеничный	59,8	0–50					
1.5 Хлеб ржаной	65,3	0–20					
1.6 Макаронные изделия	4,9	0–70					
2. Картофель	124,2	0–10					
3. Овощи							
3.1 Капуста	30,4	0–20					
3.2 Огурцы и помидоры	2,8	0–85					
3.3 Столовые корнеплоды	40,6	0–20					
3.4 Прочие (лук и др.)	27,9	0–50					
4. Фрукты и ягоды							
4.1 Яблоки свежие	15,1	1–50					
4.2 Яблоки сушеные	1,0	3–00					
5. Сахар и кондитерские изделия							
5.1 Сахар	19,0	0–90					
5.2 Конфеты	0,8	4–50					

Продолжение табл. П.3.5

Наименование продукта питания	Годо-вая норма, кг	Цена 14.03.1991	Место сня-тия цен	Цена __ ____ 20__ г.	Цена __ ____ 20__ г.	Цена __ ____ 20__ г.	Цена __ ____ 20__ г.
5.3 Печенье и торты	1,2	1–40					
6. Мясо и мясопродукты							
6.1 Говядина	4,4	2–00					
6.2 Баранина	0,8	1–80					
6.3 Свинина	1,4	2–00					
6.4 Субпродукты (печень)	0,5	1–40					
6.5 Птица	16,1	2–40					
6.6 Сало	0,7	2–40					
6.7 Копчености	0,7	3–70					
7. Рыба и рыбопродукты							
7.1 Свежая (минтай)	10,9	0–37					
7.2 Сельди	0,8	1–40					
8. Молоко и молочные продукты							
8.1 Молоко, кефир, л	110,0	0–32					
8.2 Сметана, сливки	1,6	1–70					
8.3 Масло животное	2,5	3–60					
8.4 Творог	9,8	1–00					
8.5 Сыр и брынза	2,3	3–60					
9. Яйца, шт.	152,0	0–09					

Окончание табл. П.3.5

Наименование продукта питания	Годо-вая норма, кг	Цена 14.03.1991	Место сня-тия цен	Цена __ ____ 20__ г.	Цена __ ____ 20__ г.	Цена __ ____ 20__ г.	Цена __ ____ 20__ г.
10. Масло растительн., маргарин							
10.1 Масло растительное, л	3,8	1–80					
10.2 Маргарин	6,3	1–20					

Примечание. Пункт 1.3 — геркулес

Функция спроса и метод наименьших квадратов*

Приложение 4 — это методическая разработка для студентов и преподавателей по выполнению домашнего задания №1 (см. приложение 3, раздел П.3.3) и проведению соответствующих практических занятий (семинаров).

Рассмотрено оценивание функции спроса по эмпирическим данным табличным методом и методом наименьших квадратов. Разобраны два алгоритма обработки данных опроса с помощью метода наименьших квадратов (с учетом повторов пар и без такового), в том числе методы построения доверительных интервалов для прогностической функции. Дано обобщение на случай нелинейных зависимостей. Обсуждается критерий проверки правильности расчетов. Рассмотрены различные способы оценивания точности восстановления зависимости. Даны ответы на часто возникающие вопросы, в частности, связанные с доверительными интервалами, понятиями «квантиль» и «квартиль».

П.4.1. Оценивание функции спроса

При маркетинговых исследованиях полезно проводить опрос потребителей, например, при вводе товара на рынок. Полезно знать, сколько денег потребители готовы заплатить за тот или иной товар, чтобы установить оптимальную цену. Затем необходимо обработать эти данные. Обработка данных проводится с помощью оценивания функции спроса. Это можно сделать, построив выборочную функцию спроса графически, в виде таблицы или обработав данные с помощью метода наименьших квадратов.

Рассмотрим первый метод (табличный).

---

* Приложение 4 подготовлено Л.А. Орловой.

Пусть в результате опроса 50 человек мы получили 50 ответов в ответ на вопрос, какую максимальную цену потребитель готов заплатить за определенный товар. Пусть цена колеблется от 50 руб. до 200 руб. Сначала соберем все цены:

120, 75, 100, 75, 100, 170, 100, 120, 90, 100, 180, 100, 150,
100, 170, 100, 60, 100, 75, 50, 60, 90, 150, 50, 120, 200, 75,
100, 90, 100, 100, 90, 75, 120, 200, 100, 75, 150, 120, 100,
75, 150, 120, 170, 75, 100, 180, 120, 100, 150.

Теперь перейдем к анализу данных опроса. Для начала необходимо составить таблицу исходных данных — пар чисел $(p, D(p))$, где: p — независимая переменная — цена; $D(p)$ — зависимая от p величина — спрос.

Упорядочиваем все значения в порядке возрастания. Затем строим табл.П.4.1. В первом столбце — номера различных значений цены в порядке возрастания (i). Во втором столбце приведены сами значения цены (p_i). В третьем столбце указано, сколько раз названо то или иное значение (N_i).

Таким образом, 50 опрошенных потребителей назвали 10 конкретных значений цены (максимально для них допустимых значений). Каждое из значений, как видно из третьего столбца табл.П.4.1, названо от 2 до 15 раз.

Теперь легко построить выборочную функцию спроса в зависимости от цены. Она представлена в четвертом столбце, который заполняется снизу вверх на основе следующих рассуждений.

Таблица П.4.1

Оценивание функции спроса и расчет оптимальной цены

i	Цена p_i	N_i	Спрос $D(p_i)$	Прибыль $(p_i-10)D(p_i)$	Прибыль $(p_i-30)D(p_i)$
1	50	2	50	40×50=2000	20×50=1000
2	60	2	48	50×48=2400	30×48=1440
3	75	8	46	65×46=2990	45×46=2070
4	90	4	38	80×38=3040	60×38=2280
5	100	15	**34**	**90×34=3060**	**70×34=2380**
6	120	7	19	110×19=2090	90×19=1710

7	150	5	12	140×12=1680	120×12=1440
8	170	3	7	160×7=1120	140×7=980
9	180	2	4	170×4=680	150×4=600
10	200	2	2	190×2=380	170×2=340

Продолжение таблицы П.4.1

i	Цена p_i	Прибыль $(p_i–50)D(p_i)$	Прибыль $(p_i–70)D(p_i)$	Прибыль $(p_i–100)D(p_i)$	Прибыль $(p_i-120)D(p_i)$
1	50	0	—-	—-	—-
2	60	10×48=480	—-	—-	—-
3	75	25×46=1150	5×46=230	—-	—-
4	90	40×38=1520	20×38=760	—-	—-
5	100	**50×34=1700**	**30×34=1020**	0	—-
6	120	70×19=1330	50×19=950	20×19=380	0
7	150	100×12=1200	80×12=960	**50×12=600**	**30×12=360**
8	170	120×7=840	100×7=700	70×7=490	50×7=350
9	180	130×4=520	110×4=440	80×4=320	60×4=240
10	200	150×2=300	130×2=260	100×2=200	80×2=160

Если будем предлагать товар по ценам свыше 200 руб., то его не купит никто. При цене 200 руб. появляются 2 покупателя. А если цену понизить до 180 руб., тогда товар купят четверо — те двое, для которых максимальная цена 180 руб., и те двое, кто был согласен на большую цену 200 руб. Таким образом, четвертый столбец заполняется по правилу: значение в клетке 4-го столбца равно сумме значений в находящейся слева клетке 3-го столбца и в лежащей снизу клетке 4-го столбца.

Зависимость спроса от цены — это зависимость 4-го столбца $D(p_i)$ от 2-го p_i. Зависимость можно представить на графике, в координатах «спрос- цена». Абсцисса — это спрос $D(p_i)$, а ордината — цена p_i (рис.П.4.1).

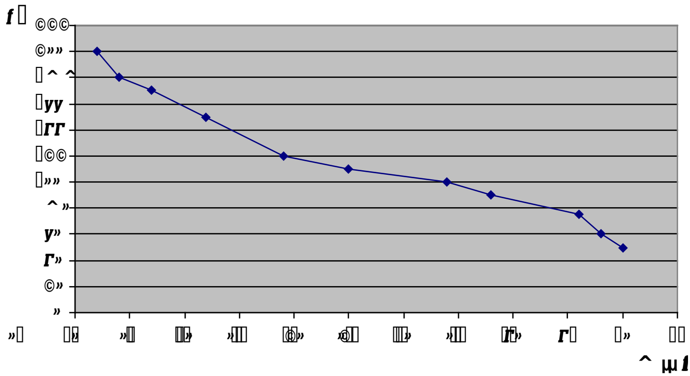

Рис.П.4.1. Выборочная оценка функции спроса.

Из этого графика видно, что 50% покупателей готово купить товар за 110 руб. Действительно, задаем спрос $\frac{50}{2} = 25$, затем проводим вертикаль до пересечения с графиком, а от точки пересечения — горизонталь до оси ординат, получаем цену — 110 руб.

Давайте посчитаем прибыль при различных значениях издержек p_0. Издержки — это либо оптовая цена, если товар закупается, либо — себестоимость единицы продукции, если товар производим сами.

Найдем для каждого значения издержек p_0 оптимальную розничную цену (см. табл.П.4.1). Предполагаемые издержки: 10, 30, 50, 70, 100, 120 (руб.). Для каждого i в табл.1 приведены произведения $(p_i - p_0)D(p_i)$, где p_0 — это издержки.

Анализируя таблицу, видим, что при издержках от 10 до 70 рублей максимум прибыли приходится на цену 100 руб., что соответствует продажам лицам со средними возможностями (товар купят 34 человека из 50-ти). Это 68% или около 2/3 всех возможных покупателей.

При повышении издержек максимум достигается на более обеспеченных покупателях. А именно, при цене 150 руб. купят 12 человек из 50, т.е. 24% или около 1/4 всех покупателей.

Таким образом, даже при значительном изменении издержек от 10 до 70 руб. выгоднее оставить розничную цену постоянной — 100 руб., т.к. при этом мы не только сохраняем покупателей (их количество), но и получаем большую прибыль, чем при переходе на более высокую розничную цену. Сравним.

Возьмем цену 100 руб. Даже при издержках 70 руб. получаем прибыль 1020 руб. Купят 34 покупателя, т.е. 68% от всех потенциальных покупателей. Если же увеличим цену до 150 руб., то при тех же издержках, равных 70 руб., получим прибыль 960 руб., но при этом потеряем покупателей, т.к. купят товар всего 12 человек, т.е. 24% потенциальных покупателей (см. табл.П.4.1).

Рассмотренный пример построен на использовании тех значений цены, которые были названа при опросе. Пока мы не знаем, какой будет спрос при других значениях цены. Может быть, и оптимальная цена будет находиться вне названных при опросе значений.

Поэтому целесообразно восстановить функцию спроса при всех возможных значениях цены, а затем использовать эту восстановленную зависимость для расчета оптимальной цены при различных значениях издержек.

Восстановить зависимость можно с помощью метода наименьших квадратов.

П.4.2. Обработка данных опроса с помощью метода наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов относится к важному разделу эконометрики и прикладной статистики — многомерному статистическому анализу. В многомерном статистическом анализе исходные данные — это как минимум пара чисел (t_i, X_i) (а не одно число).

Предполагается, что переменная X линейно зависит от переменной t, т.е.

$$X(t) = a\,(t - t_{\text{ср.}}) + b.$$

Это — теоретическая модель, а практически известны исходные данные — набор пар чисел $(t_{i,}\ X_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, где:

t_i — независимая переменная (например, время, а в случае определения выборочной функции спроса — цена p_i),

X_i — зависимая переменная (например, индекс инфляции, курс доллара, а в случае определения выборочной функции спроса это будет спрос $D(p_i)$).

Предполагается, что переменные связаны линейной зависимостью:

$$X_i = a(t_i - t_{\text{ср.}}) + b + e_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Это — реальная зависимость, учитывающая погрешности (e_i), искажающие зависимость, параметры a и b нам неизвестны и подлежат оцениванию, а

$$t_{\text{ср.}} = \quad t_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}.$$

Обычно параметры a и b оценивают методом наименьших квадратов.

Согласно этому методу для расчета наилучшей функции, приближающей линейным образом зависимость X от t, следует рассмотреть функцию двух переменных:

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[X_i - a\left(t_i - t_{cp}\right) - b \right]^2 .$$

Фактически — это есть сумма квадратов разностей между реальными значениями функции и теоретически определенными значениями функции от независимой переменной.

Оценки метода наименьших квадратов — это такие значения a и b, при которых функция $f(a,b)$ достигает минимума по всем значениям аргументов. Чтобы найти эти оценки, надо вычислить частные производные от функции $f(a,b)$ по аргументам a и b, т.е. $\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}$ и $\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}$, и приравнять их к 0.

Из полученных уравнений путем внутриматематических преобразований получим оценки:

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i t_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - n t_{cp}^2},$$

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = X_{cp}.$$

Следовательно, восстановленная функция, с помощью которой можно прогнозировать, имеет вид:

$$X^*(t) = a^*(t - t_{cp}) + b^*.$$

Это — теоретическая функция, в которой вместо параметров подставлены их оценки, что позволяет проводить прогнозирование на какой-то интервал независимой переменной t вперед, а также интерполировать эти данные на моменты между наблюдениями.

Если взять другие обозначения, то линейная зависимость может выглядеть так:

$$X_i = ct_i + d + e,\ i = 1, 2, 3, \dots ,\ n. \quad (\text{П}.4.1)$$

Сравнивая выражения:

$$X_i = a(t_i - t_{\text{ср.}}) + b + e_i = at_i - at_{\text{ср}}. + b + e_i$$

и (П.4.1), легко перейти от одного к другому:

$$c = a,\ d = b - at_{\text{ср}}.$$

Аналогичные соотношения справедливы и для оценок:

$$c^* = a^*,\ d^* = b^* - a^* t_{\text{ср}},$$

$$X_i^* = c^* t_i + d^*.$$

Оценкой погрешности (невязки) e_i является кажущаяся невязка

$$e_i^* = X_i - X_i^*.$$

Возникает вопрос, насколько точно оценивается зависимость. Чтобы ответить на него, надо ввести модель порождения данных:

$$X_i = ct_i + d + e_i,$$

где $e_1, e_2 \ldots\ldots e_n$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2.

Таким образом, модель описывается тремя параметрами: c, d и σ^2. Параметры c и d мы умеем оценивать, а для оценки σ^2 используется следующая формула:

$$\sigma^{*2} = \frac{SS}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - X_i^*\right)^2}{n},$$

где SS — так называемая остаточная сумма квадратов, σ^{*2}- оценка дисперсии.

Доверительные интервалы для прогностической функции записываются следующим образом (см. п.3.1 главы 3 настоящего учебника):

$$X^*(t)_{вверхн/нижн}\left[a^*(t - t\text{ср}) + b^*\right] \pm U(\gamma)\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(t - t_{cp}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{cp}^2}},$$

где $\sigma^* = \sqrt{\sigma^{*2}} = \sqrt{\frac{SS}{n}}$, $U(\gamma)$ —квантиль стандартного нормального распределения порядка $\frac{1+\gamma}{2}$.

При доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ находим из таблиц $U(\gamma) = 1{,}96$, при $\gamma = 0{,}99$ имеем $U(\gamma) = 2{,}58$, и $U(\gamma) = 1{,}64$ при $\gamma = 0{,}9$.

Теперь перейдем к обработке данных опроса с помощью метода наименьших квадратов. Для начала необходимо составить таблицу исходных данных — пар чисел $(p, D(p))$ также в порядке возрастания значений параметра p. При расчетах удобно использовать программу Microsoft Excel.

На основе приведенных в разделе П.4.1 данных рассчитаем прогностическую функцию и оптимальную цену при различных уровнях издержек. Удобно использовать табл. П.4.2, при построении которой обращено внимание на необходимость учета повторов названных при опросе значений цен.

Перейдем к расчету теоретической функции спроса:

$$D^*(p_i) = a^*(p - p_{\text{ср.}}) + b^*.$$

Необходимо найти оценки параметров a^* и b^*:

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} D(p_i)p_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} D(p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i - np_{cp}^2} = \frac{133810 - \frac{1}{50}5540 \times 1452}{684400 - 50 \times 110{,}8^2}$$

$= -\,0{,}38362,$

$b^* = 29{,}04$; $d^* = b^* - a^*p_{\text{ср.}} = 29{,}04 - (-\,0{,}38362) \times 110{,}8 = 71{,}54$.

Таким образом, теоретическая функция спроса имеет вид:

$$D^*(p) = (-0{,}38362)p + 71{,}54.$$

Из табл.П.4.2 видно, что остаточная сумма квадратов $SS = 534{,}6$ (после округления). Исходя из этого, найдем оценку среднего квадратического отклонения:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}} = \sqrt{\frac{534{,}6}{50}} = 3{,}27\ .$$

Таблица П.4.2

Оценивание функции спроса методом наименьших квадратов

i	Це-на p_i	N_i	$p_i N_i$	Спрос $D(p_i)$	$D(p_i)N_i$	$P_i^2 N_i$	$D(p_i)p_i N_i$	$D^*(p_i)$	$N_i[D(p_i) - D^*(p_i)]$	$N_i[D(p_i) - D^*(p_i)]^2$
1	50	2	100	50	100	5000	5000	52,36	–4,718	11,12976
2	60	2	120	48	96	7200	5760	48,52	–1,0456	0,54664
3	75	8	600	46	368	45000	27600	42,77	25,852	83,54074
4	90	4	360	38	152	32400	13680	37,01	3,9432	3,887207
5	100	**15**	1500	34	510	150000	51000	33,18	12,33	10,13526
6	120	7	840	19	133	100800	15960	25,51	–45,5392	296,2598
7	150	5	750	12	60	112500	9000	14	–9,985	19,94005
8	170	3	510	7	21	86700	3570	6,325	2,0262	1,368495
9	180	2	360	4	8	64800	1440	2,488	3,0232	4,569869
10	200	2	400	2	4	80000	800	–5,18	14,368	103,2197
Σ		50	5540		1452	684400	133810		0,2548	534,5975
Σ/n			110,8		29,04					SS

Примечание. Здесь $n = 50$ — число ответов участников опроса.

Затем найдем доверительные границы для функции спроса:

$$D^{*}(p)_{\text{верхн.\нижн.}} = (-0{,}38362)p + 71{,}54 \pm 1{,}96\sigma^{*}$$

$$\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(p-p_{cp}\right)^{2}}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_{i}^{2}-np_{cp}^{2}}} = (-0{,}38362)p + 71{,}54$$

$$\pm 1{,}96\times 3{,}27\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(p-110{,}8)^{2}}{684400-50\times 110{,}8^{2}}} = (-0{,}38362)p_{i} + 71{,}54$$

$$\pm 6{,}41\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{(p-110{,}8)^{2}}{70568}}\ .$$

Например, при $p = 120$

$$D^{*}(120)_{\text{верхн.}} = 25{,}51 + 0{,}9333 = 26{,}44,$$

$$D^{*}(120)_{\text{нижн.}} = 25{,}51 - 0{,}9333 = 24{,}57.$$

Таким образом, при цене 120 руб. товар купят 25– 26 человек.

Возьмем теперь другую цену, например 165 руб., тогда

$$D^{*}(165)_{\text{верхн.}} = (-0{,}38362)165 + 71{,}54 + 6{,}41$$

$$\sqrt{\frac{1}{50}+\frac{(165-110{,}8)^{2}}{70568}} = 8{,}2427 + 1{,}5913 = 9{,}83$$

$$D^{*}(165)_{\text{нижн.}} = 8{,}2427 - 1{,}5913 = 6{,}65$$

Итак, при цене товара 165 руб. его купят от 7 до 10 человек.

Теперь перейдем к расчету оптимальной цены при различных уровнях издержек p_0. Для этого мы должны максимизировать прибыль:

$$(p - p_{0.})\, D^{*}(p) = (p_{.} - p_{0.})(a^{*}p + d^{*}).$$

Продифференцируем это выражение по p и приравняем 0 производную:

$$\frac{d}{dp}[a*p^2 - a*pp_0 + d*p - d*p_0] = 0 ,$$

$$2a*p_{\text{опт.}} - a*p_0 + d* = 0,$$

$$p_{\text{опт.}} = \frac{a*p_0 - d*}{2a*} = \frac{p_0}{2} - \frac{d*}{2a*} .$$

Поскольку $a* = -0{,}38362$, а $d* = 71{,}54$,то

$$p_{\text{опт.}} = \frac{p_0}{2} - \frac{71{,}54}{2(-0{,}38362)} = \frac{p_0}{2} + 93{,}24 .$$

Как видно из последней формулы, при возрастании издержек оптимальная розничная цена также возрастает, но вдвое медленнее.

Сравним (табл.П.4.3) оптимальные цены, найденные с помощью метода наименьших квадратов ($p_{\text{опт.2}}$) и рассчитанные ранее с помощью первого метода ($p_{\text{опт.1}}$).

Таблица П.4.3

Сравнение методов расчета оптимальной цены

p_0	$p_{\text{опт.2}}$	$p_{\text{опт.1}}$
10	98,24	100
30	108,24	100
50	118,24	100
70	128,24	100
100	143,24	150
120	153,24	150

Проанализируем результаты, представленные в табл.П.4.2 и П.4.3.

Согласно табл.П.4.2, при расчете восстановленной функции $D*(p)$ при $p = 200$ получаем отрицательную величину (–5,18), что не имеет смысла, т.к. спрос не может быть отрицательным. Рассмотрим ситуацию подробнее. Функция спроса убывает, коэффициент a^* отрицателен, поэтому рано или поздно прямая уйдет в отрицательную область. Это значит, что приближение функции спроса линейной зависимостью может быть корректно лишь на некотором отрезке, а не на всей прямой. Выясним, при какой цене спрос достигает 0:

$$D^*(p) = (-0{,}38362)p + 71{,}54 = 0,$$

$$p = \frac{71{,}54}{0{,}38362} = 186{,}5.$$

То есть корректное приближение функции спроса линейной зависимостью может быть при цене p меньшей, чем 186,5 рублей.

Общепринятых простых методов, позволяющих избежать отрицательных оценок функции спроса, нет. Если получаем отрицательные величины, то должны указать область, в которой линейная зависимость дает корректную оценку, что и сделали выше, когда $D^*(p)$ приравняли к 0.

Рассмотрим теперь табл.П.4.3. Здесь видим разницу между расчетной оптимальной ценой $p_{\text{опт.2}}$, полученной с помощью метода наименьших квадратов, и расчетной ценой $p_{\text{опт.1}}$, найденной исходя только из данных опроса. Это связано с тем, что потребитель всегда склонен к круглым числам (например, большинство назовет 100 руб., а не 102 руб. 27 коп.). Мы же при применении метода наименьших квадратов ищем максимум не только среди названных опрощенными значений, а по более обширному множеству.

П.4.3. Альтернативный метод расчета

Можно построить таблицу (метода наименьших квадратов) и провести все расчеты и без указания частот цен, т.е. чисел, показывающих, сколько раз названа та или иная цена. При таком подходе необходимо все данные ввести в таблицу в порядке неубывания, т.е. все 50 значений, а далее произвести расчеты аналогично предыдущему примеру (табл.П.4.4).

Таблица П.4.4

Альтернативный метод расчета оценок параметров

i	p_i	$D(p_i)$	$D(p_i)p_i$	$(p_i)^2$	$a^*(p_i)$	$D^*(p_i)$	$D(p_i)$-$D^*(p_i)$	$[D(p_i)$-$D^*(p_i)]^2$
1	50	50	2500	2500	–19,1812153	52,3587847	–2,35878472	5,56386535
2	50	50	2500	2500	19,1812153	52,3587847	–2,3587847	5,56386526
3	60	48	2880	3600	–23,0174583	48,5225417	–0,52254166	0,27304979
4	60	48	2880	3600	23,0174583	48,5225417	–0,52254166	0,27304979
5	75	46	3450	5625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
6	75	46	3450	5625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
7	75	46	3450	5625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
8	75	46	3450	5625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
9	75	46	3450	5625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
10	75	46	3450	5625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
11	75	46	3450	5625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
12	75	46	3450	5625	–28,7718229	42,7681771	3,231822923	10,4446794
13	90	38	3420	8100	–34,5261875	37,0138125	0,986187507	0,9725658
14	90	38	3420	8100	–34,5261875	37,0138125	0,986187507	0,9725658
15	90	38	3420	8100	–34,5261875	37,0138125	0,986187507	0,9725658
16	90	38	3420	8100	–34,5261875	37,0138125	0,986187507	0,9725658
17	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203

Продолжение табл. П.4.4

18	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
19	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
20	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
21	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
22	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
23	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
24	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
25	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
26	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
27	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
28	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
29	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
30	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
31	100	34	3400	10000	–38,3624306	33,1775694	0,822430563	0,67639203
32	120	19	2280	14400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
33	120	19	2280	14400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
34	120	19	2280	14400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
35	120	19	2280	14400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
36	120	19	2280	14400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091

Окончание табл. П.4.4

37	120	19	2280	14400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
38	120	19	2280	14400	–46,0349167	25,5050833	–6,50508332	42,3161091
39	150	12	1800	22500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991
40	150	12	1800	22500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991
41	150	12	1800	22500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991
42	150	12	1800	22500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991
43	150	12	1800	22500	–57,5436458	13,9963542	–1,99635415	3,98542991
44	170	7	1190	28900	–65,216132	6,32386804	0,676131958	0,45715442
45	170	7	1190	28900	–65,216132	6,32386804	0,676131958	0,45715442
46	170	7	1190	28900	–65,216132	6,32386804	0,676131958	0,45715442
47	180	4	720	32400	–69,052375	2,48762499	1,512375014	2,28727818
48	180	4	720	32400	–69,052375	2,48762499	1,512375014	2,28727818
49	200	2	400	40000	–76,7248611	–5,18486113	7,184861127	51,6222294
50	200	2	400	40000	–76,7248611	–5,18486113	7,184861127	51,6222294
Σ	5540	1452	133810	684400			0,278653232	540,161666
Σ /50	110,8	29,04						

На основе результатов, приведенных в табл.П.4.4, получаем оценки:

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} D(p_i)p_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} D(p_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - np_{cp}^2} = \frac{133810 - \frac{1}{50}5540 \times 1452}{684400 - 50 \times 110,8^2}$$

$= -0,38362431,$

$$b^* = 29,04,$$

$$d^* = b^* - a^* p_{\text{ср.}} = 29,04 - (-0,383624)*110,8 = 71,54.$$

Оценка теоретической функция спроса имеет вид:

$$D^*(p) = -0,383624*p + 71,54.$$

Оценка среднеквадратического отклонения такова:

$$\therefore 3\sigma^* = \sqrt{\frac{SS}{n}} = \sqrt{\frac{540,16}{50}} = 3,29 = 3,29$$

Далее, доверительные границы функции спроса имеют вид:

$$D^*(p)_{\text{верхн\textbackslash нижн.}} = (-0,383624) + 71,54 \pm$$

$$\pm 1,96 \times 3,29 \sqrt{\frac{1}{50} + \frac{(p - 110,8)^2}{684400 - 50 \times 110,8^2}} =$$

$$= (-0,383624)p + 71,54 \pm 6,45 \sqrt{\frac{1}{50} + \frac{(p - 110,8)^2}{70568}}.$$

Например, при $p = 120$

$$D^*(120)_{\text{верхн.}} = 25,50 + 0,9391 = 26,44,$$

$$D^*(120)_{\text{нижн.}} = 25,50 - 0,9391 = 24,56.$$

Таким образом, при цене 120 руб. товар купят 25–26 человек.

Если сравним значения *SS* в табл.П.4.2 и табл.П.4.4, то заметим некоторую разницу. Это связано с тем, что в табл. П.4.2 значения были округлены до пятого знака после запятой, а в табл.П.4.4 округления не производились. В данном случае на конечный результат это не повлияло, т.к. данные сами по себе выражены довольно большими числами. Чем меньше значения данных, тем аккуратнее необходимо подходить к процессу округления и сохранять в расчетах достаточное количество значащих цифр.

П.4.4. Нелинейные зависимости

Как проводить анализ данных, если функция спроса не является линейной? Есть два подхода — параметрический и непараметрический.

В первом случае подбираем подходящее семейство функций и по результатам измерения (опроса) оцениваем параметры. Пример: степенное семейство:

$$D(p) = cp^{-\alpha}.$$

При этом полезно преобразование переменных, приводящее задачу к линейному виду. В случае степенного семейства необходимо прологарифмировать обе части последнего равенства. Тогда получим:

$$\ln D(\mathrm{p}) = \ln c + \alpha \ln p.$$

Затем обозначим:

$$y = \ln D(p),\ x = \ln p,\ b = \ln c.$$

Исходя из введенных обозначений, имеем линейное уравнение:

$$y = \alpha x + b.$$

Задача оценивания параметров степенной зависимости сведена к ранее рассмотренной задаче оценивания параметров линейной функции.

Поясним связь между оценками параметров в этих двух задачах. Будем использовать звездочки для обозначения оценок соответствующих параметров. Допустим, получили выражение:

$$y^* = -5x + 3,$$

тогда, подставляя выражение исходных величин через логарифмы, получим

$$\ln D^*(p) = -5 \ln p + 3.$$

Далее проводим потенцирование выражения:

$$e^{\ln D\,(p)} = e^{-5 \ln p\, +3} = e^{-5 \ln p}\, e^3 = e^3(e^{\ln p})^{-5} = 20{,}086p^{-5},$$

т.е.

$$D^*(p) = 20{,}086\, p^{-5}.$$

Аналогично линейному случаю, определим оптимальную розничную цену $p_{\text{опт.}}$ при различных значениях издержек. А именно, решим задачу:

$$(p - p_0)D^*(p) \to \max_P$$

в случае степенной зависимости:

$$(p - p_0)c^* p^{-\alpha^*} \to \max_P .$$

Точка, в которой достигается максимум, не меняется при умножении максимизируемой функции на константу. Поэтому переходим к задаче:

$$(p - p_0)p^{-\alpha^*} = f(p) \to \max_P .$$

Для нахождения максимума функции продифференцируем ее и приравняем производную к 0:

$$\frac{df(p)}{dp} = 0 .$$

Продифференцируем $f(p)$, используя правило дифференцирования произведения функций:

$$f'(p) = p^{-\alpha^*} + (p - p_0)(-\alpha^*)\, p^{-\alpha^*-1} = 0.$$

Вынесем общий множитель за скобки:

$$p^{-\alpha^*-1}[p + (p - p_0))(-\alpha^*)] = 0.$$

Сократим на ненулевой множитель ($p^{-\alpha^*-1}$):

$$p + (p - p_0))(-\alpha^*) = 0.$$

Итак, необходимо решить линейное уравнение относительно неизвестного p:

$$p - \alpha^* p + p_{0.}\alpha^* = 0.$$

Сгруппируем члены с p:

$$(1 - \alpha^*)p = - p_{0.}\alpha^*.$$

Получим оптимальное значение розничной цены:

$$p_{опт.} = \frac{-p_0\alpha^*}{1-\alpha^*} .$$

Непараметрический подход применяется тогда, когда подходящее семейство функций подобрать не удается. Тогда используют подходы на основе непараметрических оценок плотности распределения (см. раздел 7.8 настоящего учебника).

П.4.5. Критерий правильности расчетов

Как самостоятельно проконтролировать правильность расчетов? Приведем две простые рекомендации.

1. Примерное чередование знаков «+» и «-» в столбцах $N_i[D(p_i) - D^*(p_i)]$ (табл.П.4.2) и $N_i[D(p_i) - D^*(p_i)]$ (табл.П.4.4).

В частности, если идут сначала только «+», а затем только «-» или наоборот — следует искать ошибку.

2. Из теории метода наименьших квадратов известно условие точности вычислений — при отсутствии ошибок в вычислениях сумма исходных значений должна равняться сумме восстановленных (см. раздел 3.1 настоящего учебника). На основе этого условия сформулируем приблизительный критерий проверки правильности расчетов:

$$\sum_{1}^{n}\left[X_i - X^*(t_i)\right] \approx 0 ,$$

т.е. имеет место близость сумм X_i с суммами $X^*(t_i)$. Это в общем случае. А в рассмотренном выше примере — близость $D(p_i)$ с $D^*(p_i)$.

В соответствии с данными табл.П.4.2:

$$\left|\sum_{1}^{n} N_i\left[D(p_i) - D^*(p_i)\right]\right| = 0,2548 .$$

В соответствии с данными табл.П.4.4:

$$\left|\sum_{1}^{n}\left[D(p_i) - D^*(p_i)\right]\right| = 0,2786 .$$

Такие значения в рассматриваемом случае вполне приемлемы.

П.4.6. Способы оценивание точности восстановления зависимости

Рассмотрим три способа оценивания точности восстановления зависимости.

В точках t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеем по два значения функции — исходное x_i и восстановленное $x^*(t_i)$. При оценивании функции спроса это $D(p_i)$ и $D^*(p_i)$ соответственно. В табл.П.4.2 и П.4.4 приведены значения $D(p_i)$, $D^*(p_i)$ и $D(p_i)$ — $D^*(p_i)$. Третье из этих чисел — абсолютная погрешность. Полезно рассмотреть и относительную погрешность:

$$\left|\frac{D(p_i)-D^*(p_i)}{D(p_i)}\right|,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

По данным табл.П.4.4 это такие числа (приведены без повторений):

$$\frac{2,359}{50}, \frac{0,523}{48}, \frac{3,232}{46}, \frac{0,986}{38}, \frac{0,822}{34}, \frac{6,505}{19}, \frac{1,996}{12}, \frac{0,676}{7}, \frac{1,512}{4}, \frac{7,185}{2}$$

.

Ясно, что из этих 10 чисел самыми большими являются шестое

$$\frac{6,505}{19} = 0,342$$

девятое

$$\frac{1,512}{4} = 0,378$$

и десятое

$$\frac{7,185}{2} = 3,592\ .$$

При этом десятое значение находится в области, для которой оценка спроса $D^*(p)$ отрицательна (т.е. при цене $p = 200$ руб.), а девятое — при цене $p = 180$ руб., т.е. очень близко к границе $p = 186{,}5$ руб. — перехода в отрицательную область. Т.о., относительная погрешность не превосходит 0,342 (34,2%) при $p \leqslant 170$ руб. Причем, такая большая относительная погрешность, очевидно, связана с тем, что 30% опрошенных (15 человек) назвали одну и ту же цену $p = 100$ руб. Если это значение $p = 100$ руб. исключить, то при остальных значениях цены относительная погрешность не превышает

$$\frac{1,996}{12} = 0{,}166\ \ (16{,}6\%).$$

Мы рассмотрели один из наихудших вариантов, когда одна треть опрошенных назвала одну и ту же «круглую цифру» —

100. По многочисленным данным работ студентов можно утверждать, что такая ситуация встречается крайне редко.

О достигаемой точности восстановления функции свидетельствует также ширина доверительного интервала. Выше показано, что при $p = 120$

$$D^*(120)_{\text{верхн.}} - D^*(120)_{\text{нижн.}} = 2 \times 0{,}9391 = 1{,}878.$$

Относительная погрешность такова:

$$\left|\frac{D^*(120)_{верхн} - D^*(120)_{нижн}}{D^*(120)}\right| = \frac{1{,}878}{25{,}51} = 0{,}074 \quad (7{,}4\%).$$

При $p = 165$

$$\left|\frac{D^*(165)_{верхн} - D^*(165)_{нижн}}{D^*(165)}\right| = \frac{2 \times 1{,}5916}{8{,}2427} = 0{,}386 \ (38{,}6\%).$$

Таким образом, точность оценивания уменьшается по мере удаления от $p_{\text{ср.}}$, особенно при увеличении p. Т.е. при приближении к области отрицательности $D^*(p)$ точность оценивания уменьшается.

Чтобы еще одним способом выявить роль погрешностей в прогностической формуле, рассмотрим формальный предельный переход, когда $p \to \infty$, тогда значения: 71,54; 1/50; 110,8 в выражении (см. выше):

$$D^*(p)_{верхн./нижн.} = (-0{,}38362)p + 71{,}54 \pm 6{,}41\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{(p - 110{,}8)^2}{70568}}$$

становятся малыми по сравнению с остальными составляющими, следовательно, ими можно пренебречь. Получаем:

$$D^*(p)_{верхн./нижн} = (-0{,}38362)p \pm \frac{6{,}41}{\sqrt{70568}}\, p =$$

$$= [(-0{,}38362) \pm 0{,}024]p.$$

Таким образом, относительная погрешность составляет:

$$\left|\frac{0,024 \cdot 100}{-0,38362}\right| = 6,26\%.$$

Итак, типовые относительные погрешности составляют 6—16%, в исключительных случаях достигают 34–38%.

Как показывает практика, в социально-экономических исследованиях метод наименьших квадратов во многих случаях позволяет получить прогноз с точностью 10–15%.

П.4.7. Часто возникающие вопросы

Далее рассмотрим наиболее часто встречающиеся вопросы студентов в связи с изучением данной темы.

Доверительные интервалы. Доверительная вероятность γ — вероятность того, что доверительный интервал накроет действительное значение параметра, оцениваемого по выборочным данным.

В математических рассуждениях в приложении 4 в формулах для границ доверительного интервала используют множитель:

$$U(\gamma) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right).$$

Если $\gamma = 0,95$, то

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+0,95}{2}\right) = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96 = U(\gamma),$$

Если $\gamma = 0,99$, то

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1+0,99}{2}\right) = \Phi^{-1}(0,995) = 2,58 = U(\gamma).$$

См. таблицы функции, обратной к функции стандартного нормального распределения.

При $n \to \infty$ имеем асимптотическое сближение распределения $x^*(t)$ с нормальным распределением, а потому ширина асимптотического доверительного интервала равна:

$$2\,U(\gamma)\,\sigma^*\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(t-t_{cp}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2-nt_{cp}^2}}\,.$$

Если выбрано $\gamma = 0{,}95$, то это значит, что в 95% случаев математическое ожидание точечного прогноза $x^*(t)$, т.е. значение $x(t)$, будет находиться внутри доверительного интервала и только в 5% случаев — вне его. Другими словами, с вероятностью 0,95 доверительный интервал накроет оцениваемое значение $x(t)$. При $\gamma = 0{,}95$ имеем $U(\gamma) = 1{,}96$.

Если мы хотим, чтобы в 99 случаях из 100 истинное значение функции $x(t)$ (математическое ожидание точечного прогноза $x^*(t)$) попадало в рассматриваемый интервал со случайными границами, необходимо этот интервал расширить (при $\gamma = 0{,}99$ имеем $U(\gamma) = 2{,}58$). Но при этом уменьшается точность прогнозирования.

Поясним на примере. Пусть задача — прогнозирование погоды в Москве через год. Рассмотрим прогноз — температура будет от (-50^0C) до ($+70^0$C). Увеличили ширину доверительного интервала до 140^0C, и можно утверждать, что этот прогноз сбудется с вероятностью $\gamma = 1$, т.е. надежность этого прогноза 100%. Но точность этого прогноза невелика.

Если уменьшим γ, то доверительный интервал можно сузить, при этом точность прогноза увеличится. Например, значению $\gamma = 0{,}9$ соответствует $U(\gamma) = 1{,}64$.

Надежность и точность прогноза меняются в противоположных направлениях — при увеличении надежности точность падает, при уменьшении — растет. Выбор значения доверительной вероятности — это компромисс между требованием повышения надежности и требованием повышения точности.

На основе опыта конкретных научных и прикладных работ принято в социально-экономических исследованиях использовать $\gamma = 0{,}95$ и $U(\gamma) = 1{,}96$.

Рассмотрим наиболее распространенные ошибки студентов при расчетах интервального прогноза.

1. При расчете доверительного интервала берут вместо коэффициента $U(\gamma)$ величину γ и не умножают на σ^* — оценку

среднего квадратичного отклонения погрешности измерения. Напомним, что необходимо использовать выражение:

$$\delta = U(\gamma)\,\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(t - t_{cp}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{cp}^2}}\ .$$

Т.е. вместо произведения $U(\gamma)\sigma^*$ ошибочно берут просто доверительную вероятность γ .

2. Проверкой правильности вычислений можно считать равенство значений знаменателя в формуле, задающей оценку a^* , т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{cp}^2$$

и знаменателя под корнем при расчете доверительных интервалов — тоже:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{cp}^2$$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \left(t^i - t_{cp}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{cp}^2\ .$$

Доказательство. Справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \left(t^i - t_{cp}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(t_i^2 - 2t_i t_{cp} + t_{cp}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - t_{cp} \sum_{i=1}^{n} t_i - nt_{cp}^2\ .$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = nt_{cp}\ ,$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} \left(t^i - t_{cp}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2n_i t_{cp}^2 + nt_{cp}^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - nt_{cp}^2\ ,$$

что и следовало доказать.

Квантиль и квартиль. Иногда студенты путают термины «квантиль» и «квартиль».

Квантиль (слово женского рода) порядка a, где a — число от 0 до 1, функции распределения $F(x)$ — это число $x(a)$ такое, что

$$F(x(a)) = a.$$

Например, $U(\gamma) = 1{,}96$ при $\gamma = 0{,}95$ — это квантиль порядка 0,975 функции стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

В общем случае

$$U(\gamma) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

— это квантиль порядка $a = \dfrac{1+\gamma}{2}$ (см. выше) стандартного нормального распределения. При $\gamma = 0{,}95$ имеем

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0{,}975 = 0{,}975.$$

Термин «квартиль» (от «кварта» — одна четвертая часть) используют для обозначения квантиля порядка a, когда a кратно 1/4. Выделяют нижний квартиль при $a = 1/4$ и верхний квартиль при $a = 3/4$. Квартиль, соответствующий $a = 2/4 = 1/2$, имеет собственное название — медиана.

Об авторе

Орлов Александр Иванович, 1949 г.р., профессор (1995 г. — по кафедре математической экономики), доктор технических наук (1992 г. — по применению математических методов), кандидат физико-математических наук (1976 г. — по теории вероятностей и математической статистике). Профессор кафедры «Экономика и организация производства» факультета «Инженерный бизнес и менеджмент» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, председатель секции «Статистика и эконометрика», директор Института высоких статистических технологий и эконометрики, научный руководитель Лаборатории экономико-математических методов в контроллинге.

В 2002–2008 гг. читал лекции в Московском государственном институте электроники и математики, Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова, Академии народного хозяйства при Правительстве Российской Федерации, Международном университете (в Москве), Всероссийском государственном институте кинематографии (ВГИК), Московском государственном университете прикладной биотехнологии, Международном юридическом институте при Министерстве юстиции Российской Федерации.

Член редколлегий научных журналов «Заводская лаборатория», «Контроллинг», «Социология: методология, методы, математическое моделирование», «Управление большими системами». Главный редактор электронного еженедельника «Эконометрика». Академик Международной академии исследований будущего и Российской академии статистических методов, член-корреспондент МО «СовАсК» (Международной организации «Советская Ассоциация Качества»). Вице-президент Всесоюзной Статистической Ассоциации, президент Российской ассоциации статистических методов.

В 1966 г. окончил физматшколу № 2 г. Москвы, в 1971 г. — механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова. В 1971–1978 гг. работал в Центральном экономико-математическом институте АН СССР, в 1978–1981 г. — «кремлевской больнице», в 1981–1989 г. — во ВНИИ стандартизации Госстандарта СССР. Создал и руководил Всесоюзным центром статистических методов и информатики (1989–1992). С 1993 г. — на преподавательской работе, профессор ряда московских вузов.

Основные направления научной и педагогической деятельности: прикладная статистика и другие статистические методы, эконометрика, экономико-математические методы, теория принятия решений, экспертные оценки, менеджмент, организационно-экономическое моделирование, контроллинг, экономика предприятия, макроэкономика, экология, социология. Автор более 500 публикаций в России и за рубежом, в том числе более 30 книг.

Основные книги проф. А.И.Орлова

1. Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука,1979. — 296 с.

2. Задачи оптимизации и нечеткие переменные. — М.: Знание, 1980. — 64 с.

3. Анализ нечисловой информации (препринт) (совместно с Ю.Н. Тюриным, Б.Г. Литваком, Г.А. Сатаровым, Д.С. Шмерлингом). — М.: Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981. — 80 с.

4. Внеклассная работа по математике в 6–8 классах (совместно с В.А. Гусевым, А.Л. Розенталем). — М.: Просвещение, 1977. — 288 с. — Второе издание, исправленное и дополненное (М.: Просвещение, 1984). Переводы на казахский, литовский, молдавский, таджикский языки.

5. ГОСТ 11.011–83. Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма-распределения (в соавторстве). — М.: Изд-во стандартов, 1984. — 53 с. — Переиздание: М.: Изд-во стандартов, 1985, — 50 с.

6. Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях (в соавторстве). — М.: Наука, 1985. — 220 с.

7. Пакет программ анализа данных «ППАНД». Учебное пособие (совместно с И.Л. Легостаевой, О.М. Черномордиком и др.). — М.: Сотрудничающий центр Всемирной организации здравоохранения по профессиональной гигиене, 1990. — 93 с.

8. О теоретических основах внеклассной работы по математике и опыте Вечерней математической школы при Московском математическом обществе. — М.: Всесоюзный центр статистических методов и информатики, 1991. — 48 с.

9. Математическое моделирование процессов налогообложения (подходы к проблеме) (совместно с В. Г. Кольцовым, Н.Ю. Ивановой и др.). — М.: Изд-во ЦЭО Министерства общего и профессионального образования РФ, 1997. — 232 с.

10. Экология. Учебное пособие (совместно с С.А. Боголюбовым и др.). — М.: Знание, 1999. — 288 с.

11. Менеджмент. Учебное пособие (совместно с С.А. Боголюбовым, Ж.В.Прокофьевой и др.). — М.: Знание, 2000. — 288 с.

12. Управление качеством окружающей среды. Учебник. Т.1 (совместно с С.А.Боголюбовым и др.). — М.: МГИЭМ(ту), 2000. — 283 с.

13. Системы экологического управления: Учебник (совместно с С.А.Боголюбовым и др.). — М.: Европейский центр по качеству, 2002. — 224 с.

14. Эконометрика. Учебник для вузов. — М.: Экзамен, 2002, 2003 (2-е изд., исправленное и дополненное), 2004 (3-е изд., исправленное и дополненное). — 576 с.

15. Управление промышленной и экологической безопасностью: Учебное пособие (совместно с В.Н. Федосеевым, В.Г. Ларионовым,

А.Ф. Козьяковым). — М.: УРАО, 2002 (1-е изд.), 2003 (2-е изд.). — 220 с.

16. Менеджмент в техносфере. Учебное пособие (совместно с В.Н. Федосеевым). — М.: Академия, 2003. — 384 с.

17. Прикладная статистика. Учебник для вузов. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.

18. Теория принятия решений. Учебник для вузов. — М.: Экзамен, 2006. — 576 с.

19. Проектирование интегрированных производственно- корпоративных структур: эффективность, организация, управление / С. Н. Анисимов, А. А. Колобов, И. Н. Омельченко, А. И. Орлов, А. М. Иванилова, С. В. Краснов; Под ред. А. А. Колобова, А. И. Орлова. Научное издание. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 728 с.

20. Оптимальные методы в экономике и управлении. Учебное пособие. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. — 44 с.

21. Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость (совместно с А. А. Колобовым, |И. Н. Омельченко). — М.: Экзамен, 2008. — 621 с.

22. Организационно-экономическое моделирование. Часть 1. Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 543 с.

Содержание

А. И. Орлов

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебник для вузов

Ответственный редактор *С. А. Осташов*
Ответственный редактор *Е. В. Алексеева*
Ответственный редактор *И. Ю. Жиляков*
Технический редактор *Л. А. Багрянцева*
Художник
Корректоры: *В. Югобашян, Н. Пустовойтова*
Н. Передистый, О. Милованова, Н. Никанорова, Г. Бибикова,
Т. Иванова

Подписано в печать 00.00.09.
Формат 84×108/32. Бум. тип № 2.
Гарнитура CG Times. Печать высокая. Усл. п. л. 00,0.
Тираж 0000 экз. Зак. №

Издательство «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57

Изготовлено с готовых диапозитивов в ОАО «ИПП «Курск»
305007, г. Курск, ул. Энгельса, 109

E-mail:kursk-2005@yandex.ru
www.petit.ru

Высшее образоване

А.И. Орлов

ЭКОНОМЕТРИКА

Учебник для вузов

Издание четвертое, переработанное и дополненное

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 220700 «Организация и управление
наукоемкими производствами», специальности 220701
«Менеджмент высоких технологий»*

РОСТОВ-на-ДОНУ
ФЕНИКС
2009