Математические методы исследования

УДК 519.28

УСТОЙЧИВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

© **А. И. Орлов**[1]

Статья поступила 1 июля 2009 г.

Предложена общая схема изучения устойчивости выводов, полученных с помощью математических методов и моделей, относительно допустимых отклонений исходных данных и предпосылок моделей. Сформулированы конкретные постановки задач устойчивости: по отношению к изменению данных, их объема и распределений, к допустимым преобразованиям шкал измерения, к временным характеристикам (моменту начала реализации проекта, горизонту планирования). Борьба с неопределенностью может проводиться путем изменения вида данных, т. е. перехода к нечисловым данным. Рассмотрены модели конкретных процессов управления промышленными предприятиями на примерах устойчивости характеристик инвестиционных проектов к изменению коэффициентов дисконтирования и устойчивости к изменению коэффициентов модели и объемов партий в моделях управления запасами.

Ключевые слова: математические модели, устойчивость, принятие решений.

Изучение устойчивости — один из этапов построения математической модели (см. [1, с. 288 – 303; 2] и др.). Обсудим концепцию устойчивости на примере математического моделирования процессов управления промышленными предприятиями. Рассмотрим ее общую схему, выделим классы устойчивых моделей, приведем решения ряда конкретных задач.

Процессы управления промышленными предприятиями реализуются в реальных ситуациях с достаточно высоким уровнем неопределенности [3, 4]. Велика роль нечисловой информации как на «входе», так и на «выходе» процесса принятия управленческого решения. Неопределенность и нечисловая природа управленческой информации должны быть отражены при анализе устойчивости экономико-математических методов и моделей.

Применение экономико-математических методов и моделей при разработке инструментария повышения эффективности управления промышленными предприятиями обычно предполагает последовательное осуществление трех этапов исследования. Первый — от исходной практической проблемы до теоретической чисто математической задачи, второй — внутриматематическое изучение и решение этой задачи, третий — переход от математических выводов обратно к практической проблеме.

Целесообразно выделить и осуществить четыре элемента проблемы устойчивости:

Задача – модель – метод – условия применимости.

Задача, как правило, порождена потребностями той или иной прикладной области. Разрабатывается одна из возможных математических формализаций реальной ситуации. Например, при изучении предпочтений потребителей возникает вопрос: различаются ли мнения двух групп потребителей. При математической формализации мнения потребителей в каждой группе обычно *моделируются* как независимые случайные выборки, т. е. как совокупности независимых одинаково распределенных случайных величин, а вопрос маркетологов переформулируется в рамках этой *модели* как вопрос о проверке той или иной статистической гипотезы однородности. Речь может идти о частной однородности характеристик, например о проверке равенства математических ожиданий, или о полной (абсолютной) однородности, т. е. о совпадении функций распределения, соответствующих двум совокупностям.

Модель может быть порождена также обобщением потребностей (задач) ряда прикладных областей. Приведенный выше пример иллюстрирует эту ситуацию: к необходимости проверки гипотезы однородности приходят и медики при сравнении двух групп пациентов, и инженеры при сопоставлении результатов обработки деталей двумя способами, и т. д. Таким образом, одна и та же *математическая модель* может применяться для решения самых разных по своей прикладной сущности задач. Важно подчеркнуть, что выделение перечня задач находится вне математики.

Используемый в рамках определенной математической модели *метод* — это уже дело математиков. В вероятностно-статистических моделях речь идет о мето-

[1] Институт высоких статистических технологий и эконометрики Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана; e-mail: prof-orlov@mail.ru

дах, например, оценивания, проверки гипотезы, доказательства той или иной теоремы и т. д. В первых двух случаях алгоритмы разрабатываются и исследуются математиками, но используются прикладниками, в то время как метод доказательства касается лишь самих математиков.

Отнюдь не все модели и методы непосредственно связаны с математикой. В организационно-экономических исследованиях широко используются графические модели описания спроса и предложения, равновесных цен. Предпочтения потребителей могут быть выявлены различными методами — выборочным опросом потребителей, путем наблюдения за их поведением, с помощью различных экспертных процедур. Ясно, что для решения той или иной *задачи* в рамках одной и той же принятой исследователем *модели* может быть предложено много *методов*.

Условия применимости — последний рассматриваемый элемент. При использовании математической модели он — полностью внутриматематический. С точки зрения математика замена условия кусочной дифференцируемости некоторой функции на условие ее непрерывности может представляться существенным научным достижением, в то время как экономист или менеджер оценить это достижение не смогут. Для них, как и во времена Ньютона и Лейбница, непрерывные функции мало отличаются от кусочно дифференцируемых. Точнее, они одинаково хорошо (или одинаково плохо) могут быть использованы для описания и решения реальных проблем.

Взаимоотношения моделей и методов заслуживают обсуждения. В процессе познания не всегда метод следует за математической моделью. Он может быть разработан на основе эвристических соображений, словесной модели. Свойства метода можно изучать лишь в рамках той или иной модели. В рамках одной математической модели метод может быть оптимальным, в рамках другой — несостоятельным. Проблема состоит в создании или выборе модели, адекватной изучаемому явлению или процессу.

С точки зрения практической деятельности модели и методы нужны не сами по себе, а как инструменты разработки управленческих решений, которые могут описываться как выводы, заключения, планы мероприятий. Рассмотрим цепочку:

Данные – метод (их обработки) – выводы.

Как обосновать адекватность выводов? Один из критериев — устойчивость метода обработки данных. Устойчивость можно изучать лишь в рамках определенной модели.

Для обоснованного практического применения математических моделей процессов управления промышленными предприятиями и основанных на них экономико-математических методов должна быть изучена устойчивость получаемых с их помощью выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. Возможны следующие применения результатов подобного исследования:

заказчик научно-исследовательской работы получает представление о точности предлагаемого решения;

из многих моделей можно выбрать наиболее адекватную;

по известной точности определения отдельных параметров модели удается указать необходимую точность нахождения остальных параметров;

переход к случаю «общего положения» позволяет получать более сильные с математической точки зрения результаты.

Можно рекомендовать обрабатывать данные несколькими способами (методами). Выводы, общие для всех способов, скорее всего, отражают реальность (являются объективными). Выводы, меняющиеся от метода к методу, субъективны, зависят от исследователя, выбравшего тот или иной метод анализа данных. Здесь речь идет об устойчивости выводов по отношению к выбору метода.

Проблемы устойчивости обсуждались многими авторами и с разных точек зрения. Так, случай «общего положения» соответствует переходу к «мягкой модели» в терминологии работы [5]. В данной статье рассматривается только система научных результатов, к которым автор имеет отношение.

Общая схема устойчивости

Для описания проблем устойчивости выводов, получаемых на основе математических моделей социально-экономических явлений и процессов, необходим математический аппарат. Предлагаем использовать следующие базовые понятия [6].

Определение 1. Общей схемой устойчивости называется кортеж $\{A, B, f, d, E\}$, где A — множество, интерпретируемое как пространство исходных данных; B — множество, называемое пространством решений; f — способ получения выводов, т. е. однозначное отображение f: $A \to B$; d — показатель устойчивости, т. е. неотрицательная функция, определенная на подмножествах Y множества B и такая, что из $Y_1 \subseteq Y_2$ следует $\mathrm{d}(Y_1) \le \mathrm{d}(Y_2)$; $E = \{E(x, \theta), x \in A, \theta \in \Theta\}$ — совокупность допустимых отклонений, т. е. система подмножеств множества A такая, что каждому элементу множества исходных данных $x \in A$ и каждому значению параметра θ из некоторого множества параметров Θ соответствует подмножество $E(x, \theta)$ множества исходных данных. Оно называется множеством допустимых отклонений в точке x при значении параметра, равном θ.

Способ получения выводов иногда для краткости будем называть *моделью*. Во многих конкретных постановках устойчивости выводы получают с помощью определенного метода, основанного на некоторой модели. С прикладной точки зрения модель первична, метод — вторичен, поскольку результаты его применения определяются свойствами модели. Это соображение оправдывает принятую нами [6] терминологию общей схемы устойчивости.

Часто показатель устойчивости $\mathrm{d}(Y)$ определяется с помощью метрики, псевдометрики или показателя различия (меры близости) ρ как диаметр множества Y, т. е. $\mathrm{d}(Y) = \sup\{\rho(y_1, y_2), y_1 \in Y, y_2 \in Y\}$. Иными словами, в пространстве решений с помощью показателя устойчивости вокруг образа исходных данных сформирована система окрестностей. В пространстве исходных данных подобная система — это E, т. е. совокупность допустимых отклонений, $E(x, \theta)$ — окрестность радиуса θ вокруг точки x.

Определение 2. Показателем устойчивости в точке x при значении параметра, равном θ, называется число

$$\beta(x, E(x, \theta)) = \mathrm{d}(f(E(x, \theta)),$$

т. е. диаметр образа множества допустимых отклонений при отображении, рассматриваемом в качестве модели (способа получения выводов).

Определение 3. Абсолютным показателем устойчивости в точке x называется число

$$\beta(x, E) = \inf\{\beta(x, E(x, \theta), \theta \in E)\}.$$

Рассмотрим два конкретных типа математических моделей. В теории измерений [6] окрестностью исходных данных являются все те векторы, что получаются из исходного путем изменения координат с помощью допустимого преобразования шкалы, которое берется из соответствующей группы. В статистике интервальных данных [7] под окрестностью исходных данных естественно понимать (при описании выборки) куб с ребрами 2Δ и центром в исходном векторе. В обоих случаях максимальное сужение не означает сужение к точке.

Определение 4. Абсолютным показателем устойчивости на пространстве исходных данных A по мере μ называется число

$$\gamma(\mu) = \int_A \beta(x, E)\mathrm{d}\mu.$$

Определение 5. Максимальным абсолютным показателем устойчивости называется

$$\gamma = \sup\{\beta(x, E), x \in A\} = \sup \gamma(\mu).$$

Определение 6. Модель f называется абсолютно ε-устойчивой, если $\gamma \leq \varepsilon$, где γ — максимальный абсолютный показатель устойчивости.

Пример. Если показатель устойчивости формируется с помощью метрики ρ, совокупность допустимых отклонений E — это совокупность окрестностей всех точек пространства исходных данных A, то 0-устойчивость модели f эквивалентна непрерывности модели f на множестве A.

Типовая проблема в общей схеме устойчивости — проверка ε-устойчивости данной модели f относительно данной системы допустимых отклонений E.

Проблема А (характеризации устойчивых моделей). Даны пространство исходных данных A, пространство решений B, показатель устойчивости d, совокупность допустимых отклонений E и неотрицательное число ε. Следует описать достаточно широкий класс ε-устойчивых моделей f или найти все ε-устойчивые модели среди моделей, обладающих данными свойствами, т. е. входящих в данное множество моделей.

Проблема Б (характеризации систем допустимых отклонений). Даны пространство исходных данных A, пространство решений B, показатель устойчивости d, модель f и неотрицательное число ε. Следует описать достаточно широкий класс систем допустимых отклонений E, относительно которых модель f является ε-устойчивой или найти все такие системы допустимых отклонений E среди совокупностей допустимых отклонений, обладающих данными свойствами, т. е. входящих в данное множество совокупностей допустимых отклонений.

Пример. Определение устойчивости по Ляпунову решения $\varphi(t, x)$ нормальной автономной системы дифференциальных уравнений $\dot{y} = g(y)$ с начальными условиями $\varphi(0, x) = x$ выразим в терминах общей схемы устойчивости.

Здесь пространство исходных данных A — конечномерное евклидово пространство; множество допустимых отклонений $E(x, \theta)$ — окрестность радиуса θ точки $x \in A$; пространство решений B — множество функций на луче $[0, +\infty)$ с метрикой

$$\rho(y_1, y_2) = \sup_{t \geq 0} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

Модель f — отображение, переводящее начальные условия x в решение системы дифференциальных уравнений с этими начальными условиями $\varphi(t, x)$.

В терминах общей схемы устойчивости положение равновесия a называется *устойчивым по Ляпунову*, если $\beta(a, E) = 0$. Для формулировки определения асимптотической устойчивости по Ляпунову надо ввести в пространстве решений B псевдометрику

$$\rho_1(y_1, y_2) = \overline{\lim_{t \to \infty}} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

Положение равновесия a называется асимптотически устойчивым, если $\beta_1(a, E(a, \varepsilon)) = 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где показатель устойчивости β_1 рассчитан с использованием псевдометрики ρ_1.

Таким образом, общая схема устойчивости является обобщением классических постановок задач устойчивости по Ляпунову в теории дифференциальных уравнений. Сравнение общей схемы устойчивости с подходами других авторов обсуждается в работах [4, гл. 8; 6, гл. 1] и др. Отметим только структурную устойчивость (грубость динамических систем), введенную А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 г., работы Д. А. Молодцова по устойчивости принципов оптимальности [8] и теории мягких множеств [9].

Непосредственно из общей схемы устойчивости следует ряд практически полезных рекомендаций [6, гл. 1], в частности, *принцип уравнивания погрешностей*, согласно которому целесообразно уравнять вклад погрешностей различной природы в общую погрешность. Он позволяет установить:

рациональный объем выборки в статистике интервальных данных [7];

число градаций в анкетах, предназначенных для опроса потребителей [6];

необходимую точность оценивания параметров (платы за доставку и платы за дефицит) в моделях управления запасами [10].

Конкретные постановки задач устойчивости

Перечислим ряд конкретных постановок проблем устойчивости в математических методах и моделях, в частности, используемых при управлении производственно-хозяйственной деятельностью промышленных предприятий.

Устойчивость по отношению к изменению данных. Исходные данные могут быть известны лишь с некоторыми неопределенностями (погрешностями, ошибками, невязками), присущими результатам измерений (наблюдений, испытаний, анализов, опытов). Для учета влияния неопределенностей на свойства процедур анализа данных используют модель сгруппированных данных [11], статистику интервальных [7, гл. 12; 12, гл. 4] и нечетких [13] данных.

Устойчивость к изменению объема данных (объема выборки). Асимптотические методы математической статистики нацелены на получение выводов, не меняющихся при изменении объемов данных, лишь бы эти объемы были достаточно велики. Отметим, что выводы, устойчивые к изменению объема выборки, т. е. полученные в результате предельного перехода, зачастую являются более общими, чем те, которые можно получить при рассмотрении конкретного объема выборки. Так, согласно Центральной предельной теореме теории вероятностей, распределение центрированного и нормированного среднего арифметического независимых одинаково распределенных случайных величин приближается к вполне определенному (нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1), каким бы ни было распределение слагаемых (в предположении, что дисперсия этого распределения конечна и отлична от 0). Как писали Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, «познавательная ценность теории вероятностей раскрывается только предельными теоремами» [14]. В этом полемически заостренном утверждении подчеркивается принципиальная важность получения выводов, устойчивых к изменению объема выборки. Решения ряда задач асимптотической статистики приведены в работах [6, 7].

Устойчивость к изменению распределений данных. До сих пор в различных публикациях часто рассматривают различные параметрические семейства распределений числовых случайных величин. А именно, изучают семейства нормальных распределений, логарифмически нормальных, экспоненциальных, гамма-распределений, распределений Вейбулла – Гнеденко и др. Все они зависят от одного, двух или трех параметров. Поэтому для полного описания распределения достаточно знать или оценить одно, два или три числа. Широко развита и представлена в литературе параметрическая теория математической статистики, в которой предполагается, что распределения результатов наблюдений принадлежат тем или иным параметрическим семействам.

К сожалению, параметрические семейства существуют лишь в моделях, созданных исследователями. Анализ конкретных данных показывает, что погрешности наблюдений (измерений, испытаний, анализов, опытов) в большинстве случаев имеют распределения, отличные от нормальных и от распределений из других параметрических семейств. Так, в научной школе метролога проф. П. В. Новицкого проведены исследования законов распределения различного рода погрешностей измерения. Изучены распределения погрешностей электромеханических приборов на кернах, электронных приборов для измерения температур и усилий, цифровых приборов с ручным уравновешиванием. Объем выборок экспериментальных данных для каждого экземпляра составлял 100 – 400 отсчетов. Оказалось, что 46 из 47 распределений значимо отличались от нормального. Исследована форма распределения погрешностей у 25 экземпляров цифровых вольтметров Щ-1411 в 10 точках диапазона. Результаты аналогичны. Дальнейшие сведения содержатся в монографии [15]. В лаборатории прикладной математики Тартуского государственного университета проанализировано 2500 выборок из архива реальных статистических данных. В 92 % случаев гипотезу нормальности пришлось отвергнуть.

Анализ [7, 16] показал, что распределения реальных данных почти всегда отличаются от тех, которые включены в параметрические семейства. Отличия могут быть большими или меньшими, но они всегда есть. Каково влияние этих отличий на свойства процедур анализа данных? Иногда оно исчезает при росте объемов данных (как для доверительного оценивания математического ожидания), иногда является заметным (как при оценивании высших моментов), иногда делает процедуру полностью необоснованной (как для отбраковки выбросов) [7]. Следовательно, надо либо использовать непараметрические процедуры (в которых на функции распределения наложены лишь внутриматематические условия регулярности, например, условие непрерывности), в частности, при решении

Таблица 1. Основные шкалы измерения

Тип шкалы	Описание шкалы	Примеры измеряемых величин	Группа допустимых преобразований $\Phi = \{\varphi\}$
		Шкалы качественных признаков	
Наименований	Числа используют для различения объектов	Номера телефонов, паспортов, пол, ИНН, штрих-коды, УДК	Все взаимно-однозначные преобразования
Порядковая	Числа используют для упорядочения объектов	Оценки экспертов, баллы ветров, отметки в школе, полезность, номера домов	Все строго возрастающие преобразования
		Шкалы количественных признаков (описываются началом отсчета и единицей измерения)	
Интервалов	Начало отсчета и единица измерения произвольны	Потенциальная энергия, положение точки, температура по шкалам Цельсия и Фаренгейта*	Все линейные преобразования $\varphi(x) = ax + b$, a и b произвольны, $a > 0$
Отношений	Начало отсчета задано, единица измерения произвольна	Масса, длина, мощность, напряжение, сопротивление, температура по Кельвину, цены	Все подобные преобразования $\varphi(x) = ax$, a произвольно, $a > 0$
Разностей	Начало отсчета произвольно, единица измерения задана	Время**	Все преобразования сдвига $\varphi(x) = x + b$, b произвольно
Абсолютная	Начало отсчета и единица измерения заданы	Число людей в данном помещении	Только тождественное преобразование $\varphi(x) = x$

* Если температура задана по шкале Цельсия (°C) и по шкале Фаренгейта (F), то °C = 5/9(F – 32).

** Согласно новой статистической хронологии (раздел нечисловой статистики), разработанной группой известного историка акад. РАН А. Т. Фоменко, Иисус Христос родился в 1152 г. [25].

задач прогнозирования [17], либо изучать устойчивость основанных на параметрических моделях процедур по отношению к отклонениям распределений результатов наблюдений от предпосылок модели. Как говорят, изучать робастность статистических процедур (от robust (англ.) — крепкий, грубый) с использованием моделей и методов [6, 18 – 22 и др]. Статистику интервальных данных [7, гл. 12; 12, гл. 4] также можно отнести к робастной статистике.

Устойчивость по отношению к допустимым преобразованиям шкал измерения. Борьба с неопределенностью может проводиться путем изменения вида данных, т. е. путем перехода к нечисловым данным, например, к более слабым шкалам измерения.

Примером нечисловых данных являются результаты измерений в шкалах, отличных от абсолютной. Теория измерений [23] — один из разделов нечисловой статистики [12, 24]. Типы основных шкал измерения, их определения, примеры величин, измеренных в этих шкалах, группы допустимых преобразований приведены в табл. 1.

Основное требование к статистическим алгоритмам: *выводы, сделанные на основе данных, измеренных в шкале определенного типа, не должны меняться при допустимом преобразовании шкалы измерения этих данных.* В частности, выводы могут быть адекватны реальности только тогда, когда они не зависят от того, какую единицу измерения предпочтет исследователь. Это требование позволяет, например, указать вид допустимой средней величины в зависимости от шкалы, в которой измерены данные (табл. 2).

Общее понятие средней величины введено Огюстеном Луи Коши: средней величиной (средним по Коши) является любая функция $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ такая,

Таблица 2. Выбор вида средних величин в зависимости от шкалы измерения

Тип шкалы	Вид средних	Средние, удовлетворяющие УУРСС
Порядковая	По Коши	Члены вариационного ряда. Медианы
Интервальная	По Колмогорову	Среднее арифметическое
Отношений	По Колмогорову	Степенные средние с $F(X) = X^C$ $(C \neq 0)$ и среднее геометрическое

что при всех возможных аргументах значение этой функции не меньше, чем минимальное из чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$, и не больше, чем максимальное из этих чисел.

Для чисел $X_1, X_2, \ldots, X_n$ средним по Колмогорову является

$$G\{(F(X_1) + F(X_2) + \ldots + F(X_n))/n\},$$

где F — строго монотонная функция (т. е. строго возрастающая или строго убывающая); G — функция, обратная к F.

Конкретизацией основного требования к алгоритмам анализа данных является условие устойчивости результата сравнения средних (УУРСС): неравенства

$$f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) < f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n),$$

$$f(\varphi(Y_1), \varphi(Y_2), \ldots, \varphi(Y_n)) < f(\varphi(Z_1), \varphi(Z_2), \ldots, \varphi(Z_n))$$

должны быть равносильны для любых чисел $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ и любого допустимого преобразования φ из группы допустимых преобразований Φ, задающей шкалу. На основе теории, развитой в работах [6, 23], получены результаты, кратко описанные в табл. 2.

Нечисловая статистика как часть теории устойчивости. В многообразии моделей и методов анализа данных нами выделена и развита как самостоятельная область нечисловая статистика [12] (статистика объектов нечисловой природы [6, 24], статистика нечисловых данных [7]). Примерами объектов нечисловой природы являются значения качественных признаков, т. е. результаты кодировки объектов с помощью заданного перечня категорий (градаций); упорядочения (ранжировки) экспертами образцов продукции (при оценке ее технического уровня и конкурентоспособности) или заявок на проведение научных работ (при проведении конкурсов на выделение грантов); классификации, т. е. разбиения объектов на группы сходных между собой (кластеры); толерантности, т. е. бинарные отношения, описывающие сходство объектов между собой, например, сходство организационных структур промышленных предприятий; результаты парных сравнений или контроля качества продукции по альтернативному признаку («годен» – «брак»), т. е. последовательности из 0 и 1; множества (обычные или нечеткие), например, перечни рекомендуемых к осуществлению инновационных проектов, составленные экспертами независимо друг от друга; слова, предложения, тексты; векторы, координаты которых — совокупность значений разнотипных признаков, например, результат составления отчета о деятельности промышленного предприятия или анкета эксперта, в которой ответы на часть вопросов носят качественный характер, а на часть — количественный; ответы на вопросы экспертной, маркетинговой или социологической анкеты, часть из которых носит количественный характер (возможно, интервальный), часть сводится к выбору одной из нескольких подсказок, а часть представляет собой тексты; и т. д. Интервальные данные тоже можно рассматривать как пример объектов нечисловой природы, а именно, как частный случай нечетких множеств. Отметим, что теория нечетких множеств тесно связана с теорией случайных множеств: нечеткие множества естественно рассматривать как «проекции» случайных множеств, за каждой системой нечетких множеств видеть систему случайных множеств [6, 7, 12, 13, 16].

В чем принципиальная новизна нечисловой статистики? Для классической статистики характерна операция сложения. При расчете выборочных характеристик распределения (выборочные среднее арифметическое, дисперсия и др.) в регрессионном анализе и других областях этой научной дисциплины постоянно используются суммы. Математический аппарат — законы больших чисел, Центральная предельная и другие теоремы нацелены на изучение сумм. В нечисловой же статистике нельзя использовать операцию сложения, поскольку элементы выборки лежат в пространствах, где нет операции сложения. Методы обработки нечисловых данных основаны на принципиально ином математическом аппарате — на применении различных расстояний в пространствах объектов нечисловой природы.

Как показали многочисленные опыты, человек более правильно (и с меньшими затруднениями) отвечает на вопросы качественного характера, например сравнительного, чем количественного. Ему легче сказать, какая из двух гирь тяжелее, чем указать их примерный вес в граммах [27]. Поэтому нечисловая статистика отражает потребности экспертных оценок [28] и технологий управления (менеджмента), в частности контроллинга [29, 30].

Устойчивость по отношению к временным характеристикам (моменту начала реализации проекта, горизонту планирования). Перейдем к применению математических методов исследования для модернизации управления предприятиями и организациями. Для решения задач управления используют экономико-математические методы и модели. В качестве первого примера рассмотрим математические задачи, решенные для обоснования стратегического планирования.

При разработке стратегии развития промышленного предприятия одна из основных проблем — целеполагание. Поскольку естественных целей обычно несколько, то при построении формализованных экономико-математических моделей приходим к задачам многокритериальной оптимизации. Поскольку одновременно по нескольким критериям оптимизировать невозможно (например, невозможно добиться максимальной прибыли при минимуме затрат), то для адекватного применения экономико-математических методов и моделей необходимо тем или иным образом перейти к однокритериальной постановке (либо, выделив множество оптимальных по Парето альтернатив, применить экспертные технологии выбора). При выборе вида единого критерия целесообразно использовать следующую полученную нами *характеризацию моделей с дисконтированием.*

Пусть динамику развития рассматриваемой экономической системы можно описать последовательностью $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где переменные x_j, $j = 1,2, \ldots, m$, лежат в некотором пространстве X, возможно, достаточно сложной природы. Положение экономической системы в следующий момент не может быть произвольным, оно связано с положением в предыдущий момент. Проще всего принять, что существует некоторое множество K такое, что $(x_j, x_{j+1}) \in K$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Результат экономической деятельности за j-й период описывается величиной $f_j(x_j, x_{j+1})$. Зависимость не только от начального и конечного положения, но и от номера периода объясняется тем, что через этот номер осуществляется связь с общей (внешней) экономической ситуацией. Желая максимизировать суммарные результаты экономической деятельности, приходим к постановке стандартной задачи динамического программирования:

$$F_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{1 \le j \le m-1} f_j(x_j, x_{j+1}) \to \max,$$

$$(x_j, x_{j+1}) \in K, \; j = 1, 2, \ldots, m-1. \qquad (1)$$

При обычных математических предположениях максимум достигается.

Часто применяются модели, приводящие к частному случаю задачи (1):

$$F_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{1 \le j \le m-1} \alpha^{j-1} f(x_j, x_{j+1}) \to \max,$$
$$(x_j, x_{j+1}) \in K, \; j = 1, 2, \ldots, m-1. \qquad (2)$$

Это — модели с дисконтированием (α — дисконт-фактор). Естественно выяснить, какими «внутренними» свойствами выделяются задачи типа (2) из всех задач типа (1).

Представляет интерес изучение и сравнение между собой планов возможного экономического поведения на k шагов $X_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{k1})$ и $X_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{k2})$. Естественно сравнение проводить с помощью описывающих результаты экономической деятельности функций, участвующих в задачах (1) и (2): план X_1 лучше плана X_2 при реализации с момента i, если

$$f_i(x_{11}, x_{21}) + f_{i+1}(x_{21}, x_{31}) + \ldots + f_{i+k-1}(x_{(k-1)1}, x_{k1}) >$$
$$> f_i(x_{12}, x_{22}) + f_{i+1}(x_{22}, x_{32}) + \ldots + f_{i+k-1}(x_{(k-1)2}, x_{k2}). \qquad (3)$$

Будем писать $X_1R(i)X_2$, если выполнено неравенство (3), где $R(i)$ — бинарное отношение на множестве планов, задающее упорядочение планов отношением «лучше при реализации с момента i».

Ясно, что упорядоченность планов на k шагов, определяемая с помощью бинарного отношения $R(i)$, может зависеть от i, т. е. «хорошесть» плана зависит от того, с какого момента i он начинает осуществляться. С точки зрения реальной экономики это вполне понятно. Например, планы действий, вполне рациональные для периода стабильного развития, нецелесообразно применять в период гиперинфляции. И наоборот, приемлемые в период гиперинфляции операции не принесут эффекта в стабильной обстановке.

Однако, как легко видеть, в моделях с дисконтированием (2) все упорядочения $R(i)$ совпадают, $i = 1, 2, \ldots, m-k$. Оказывается, верно и обратное: если упорядочения совпадают, то мы имеем дело с задачей (2) — задачей с дисконтированием, причем достаточно совпадения только при $k = 1, 2$. Сформулируем более подробно предположения об устойчивости упорядочения планов.

I. Пусть $(x, y) \in K$, $(x', y') \in K$. Верно одно из двух: либо $f_i(x, y) > f_i(x', y')$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m-1$, либо $f_i(x, y) \le f_i(x', y')$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

II. Пусть $(x, y) \in K$, $(y, z) \in K$, $(x', y') \in K$, $(y', z') \in K$. Верно одно из двух: либо $f_i(x, y) + f_i(y, z) > f_i(x', y') + f_i(y', z')$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m-2$, либо $f_i(x, y) + f_i(y, z) \le f_i(x', y') + f_i(y', z')$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m-2$.

Нами установлено, что из условий устойчивости упорядоченности планов I и II следует существование констант $\alpha > 0$ и d_j, $j = 2, 3, \ldots, m-1$, таких, что $f_j(x, y) = \alpha^{j-1} f_1(x, y) + d_j$, $j = 2, 3, \ldots, m-1$. Поскольку прибавление константы не меняет точки, в которой функция достигает максимума, то последнее соотношение означает, что условия устойчивости упорядоченности планов I и II характеризуют (другими словами, однозначно выделяют) модели с дисконтированием среди всех моделей динамического программирования. Другими словами, устойчивость хозяйственных решений во времени эквивалентна использованию моделей с дисконтированием. Применяя модели с дисконтированием, предполагаем, что экономическая среда стабильна. Если прогнозируем существенное изменение взаимоотношений хозяйствующих субъектов, то вынуждены отказаться от использования моделей типа (2).

Перейдем к проблеме *горизонта планирования*. Только задав интервал времени, можно на основе экономико-математических методов и моделей принять оптимальные решения и рассчитать ожидаемую прибыль. Проблема «горизонта планирования» состоит в том, что оптимальное поведение зависит от того, на какое время вперед планируют, а выбор этого горизонта зачастую не имеет рационального обоснования. Однако от него зависят принимаемые решения и соответствующие этим решениям экономические результаты. Например, при коротком периоде планирования целесообразны инвестиции (капиталовложения) в оборотные фонды предприятия, а при достаточно длительном периоде — в основные фонды. Однозначный выбор горизонта планирования обычно не может быть обоснован, это — нечисловая экономическая величина. Предлагаем справиться с противоречием путем использования асимптотически оптимальных планов.

Рассмотрим модель (2) с $\alpha = 1$, т. е. модель без дисконтирования

$$F_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{1 \le j \le m-1} f(x_j, x_{j+1}) \to \max,$$
$$(x_j, x_{j+1}) \in K, \; j = 1, 2, \ldots, m-1.$$

При каждом m существует оптимальный план $(x_1(m), x_2(m), \ldots, x_m(m))$, при котором достигает максимума оптимизируемая функция. Поскольку выбор горизонта планирования, как правило, нельзя рационально обосновать, хотелось бы построить план действий, близкий к оптимальному плану при различных горизонтах планирования. Это значит, что целью является построение бесконечной последовательности $(y_1, y_2, \ldots)$ такой, что ее начальный отрезок длины m, т. е. $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, дает примерно такое же значение оптимизируемого функционала, как и значение для оптимального плана $(x_1(m), x_2(m), \ldots, x_m(m))$. Бесконечную последовательность $(y_1, y_2, \ldots)$ с указанным свойством назовем асимптотически оптимальным планом.

Выясним, можно ли использовать для построения асимптотически оптимального плана непосредственно оптимальный план. Зафиксируем k и рассмотрим последовательность $x_k(m)$, $m = 1, 2, \ldots$ Примеры показывают, что, во-первых, элементы в этой последовательности будут меняться; во-вторых, они могут не иметь пределов. Следовательно, оптимальные планы могут вести себя крайне нерегулярно, а потому в таких случаях их нельзя использовать для построения *асимптотически оптимальных планов.*

Нами установлено [6, 10] существование асимптотически оптимальных планов: можно указать такие бесконечные последовательности ($y_1, y_2, \ldots$), что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F_m(x_1(m), x_2(m), \ldots, x_m(m))}{F_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = 1.$$

С помощью такого подхода решается проблема горизонта планирования — надо использовать асимптотически оптимальные планы, не зависящие от горизонта планирования. Оптимальная траектория движения состоит из трех участков — начального, конечного и основного, а основной участок — это движение по магистрали (аналогия с типовым движением автотранспорта).

Устойчивость в моделях конкретных процессов управления промышленными предприятиями. В качестве примера рассмотрим устойчивость к изменению коэффициентов модели и объемов партий в моделях управления запасами. Так, для классической модели Вильсона управления материальными ресурсами в результате строгой постановки задачи оптимизации в ее естественной общности выявлен ряд неклассических эффектов.

Пусть μ — интенсивность спроса; s — плата за хранение единицы товара в течение единицы времени; g — плата за доставку одной партии; T — интервал (горизонт) планирования. По известной «формуле квадратного корня»

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{s}}.$$

Найдем неотрицательное целое число n такое, что

$$Q_1 = \frac{\mu T}{n+1} < Q_0 \le \frac{\mu T}{n} = Q_2.$$

Наименьшее из $f(Q_1)$ и $f(Q_2)$ — минимальные средние издержки, а то из Q_1 и Q_2, на котором достигается минимум, — оптимальный размер партии, где

$$f(Q) = \frac{\mu g}{Q} + \frac{sQ}{2},\ Q > 0.$$

Таким образом, «формула квадратного корня», как правило, не дает оптимальный план, а только асимптотически оптимальный.

По статистическим данным можно оценить возможные отклонения $\Delta\mu$ интенсивности спроса μ, а затем найти рациональную точность Δs определения платы за хранение s и рациональную точность Δg определения платы за доставку g согласно принципу уравнивания погрешностей:

$$\frac{|\Delta\mu|}{\mu} = \frac{|\Delta g|}{g} = \frac{|\Delta s|}{s}.$$

Стремиться к более точному определению параметров s и g нецелесообразно, а следовательно, нет необходимости выбирать между конкурирующими методиками их расчета.

Изучение устойчивости позволило получить практически полезные выводы. Так, для кальцинированной соды на Реутовской химбазе Московской области вызванное отклонениями параметров модели максимальное относительное увеличение суммарных затрат не превосходило 26 % (колебания по кварталам от 22,5 до 25,95 %). Фактические издержки составляли от 260 до 349 % от оптимального уровня. Внедрение модели Вильсона в практику управления запасами на Реутовской химбазе дает возможность снизить издержки по доставке и хранению кальцинированной соды в 2,1 раза.

Разработана [10] двухуровневая модель управления материальными ресурсами промышленного предприятия для случая нестационарного спроса, найдены оптимальные значения управляющих параметров, установлена их устойчивость относительно изменения горизонта (интервала) планирования. В этой модели размеры заявок X_j независимы и одинаково распределены, $\tau(T)$ — число заявок за время T. Оптимальные уровни (при $T \to \infty$) таковы:

$$R_0(T) = -\sqrt{\frac{2gsM\tau(T)MX_1}{Th(s+h)}},$$

$$Q_0(T) = \sqrt{\frac{2g(s+h)M\tau(T)MX_1}{Tsh}},$$

где h — издержки от дефицита единицы товара в течение единицы времени.

Устойчивость характеристик инвестиционных проектов к изменению коэффициентов дисконтирования с течением времени — частный случай постановок задач устойчивости в рамках статистики интервальных данных [7, разд. 12.7; 31]. Другой частный случай — применение линейного регрессионного анализа интервальных данных при анализе и прогнозировании затрат предприятия [12, разд. 4.4; 32].

Таким образом, разработана общая схема устойчивости, позволяющая проводить разработку и развитие математических методов и моделей на основе единого методологического подхода к изучению устойчивости выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок модели. Возможности общего подхода продемонстрированы на примере восьми конкретных постановок задач устойчивости. Рассмотрена устойчивость по отношению к изменению данных (как частный случай — устойчивость характеристик инвестиционных проектов к изменению коэффициентов дисконтирования с течением времени), к изменению объема данных (объема выборки), а также распределений данных. Поскольку борьба с неопределенностью может проводиться путем изменения вида данных, т. е. путем перехода к нечисловым данным, то рассмотрены основные идеи нечисловой статистики, в том числе теории измерений. Обсуждается устойчивость по отношению к временным характеристикам (моменту начала реализации проекта, горизонту планирования) и устойчивость в моделях конкретных процессов управления промышленными предприятиями (на примере устойчивости к изменению коэффициентов модели и объемов партий в моделях управления запасами).

Для обоснованного практического применения математических методов и моделей процессов управления должна быть изучена устойчивость получаемых с их помощью выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. Это требование следует из нужд практики и находится вне математики, оно относится к методологии [1] и философии математики [33]. В статье описаны подходы к решению этой проблемы и приведены примеры, демонстрирующие теоретическую значимость и практическую пользу получаемых при изучении устойчивости научных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новиков А. М., Новиков Д. А.** Методология. — М.: СИНТЕГ, 2007. — 668 с.
2. **Новиков Д. А.** Современные проблемы теории управления организационными системами // Человеческий фактор в управлении / Под ред. Н. А. Абрамовой, К. С. Гинсберга, Д. А. Новикова. — М.: КомКнига, 2006. С. 391 – 407.
3. **Анисимов С. Н., Колобов А. А., Омельченко И. Н., Орлов А. И., Иванилова А. М., Краснов С. В.** Проектирование интегрированных производственно-корпоративных структур: эффективность, организация, управление / Под ред. А. А. Колобова, А. И. Орлова. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 728 с.
4. **Колобов А. А., Омельченко И. Н., Орлов А. И.** Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость. — М.: Экзамен, 2008. — 621 с.
5. **Арнольд В. И.** «Жесткие» и «мягкие» математические модели. — М.: МЦНМО, 2008. — 32 с.
6. **Орлов А. И.** Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979. — 296 с.
7. **Орлов А. И.** Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.
8. **Молодцов Д. А.** Устойчивость принципов оптимальности. — М.: Наука, 1987. — 280 с.
9. **Молодцов Д. А.** Теория мягких множеств. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 360 с.
10. **Орлов А. И.** Теория принятия решений. — М.: Экзамен, 2006. — 573 с.
11. **Орлов А. И.** Поправка на группировку для коэффициента корреляции / Экономика и математические методы. 1980. Т. XVI. № 4. С. 800 – 801.
12. **Орлов А. И.** Организационно-экономическое моделирование. Ч. 1. Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. — 541 с.
13. **Орлов А. И.** Задачи оптимизации и нечеткие переменные. — М.: Знание, 1980. — 64 с.
14. **Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.** Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. — 264 с.
15. **Новицкий П. В., Зограф И. А.** Оценка погрешностей результатов измерений. — Л.: Энергоатомиздат, 1985. — 248 с.
16. **Орлов А. И.** Эконометрика. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Экзамен, 2004. — 576 с.
17. **Муравьева В. С., Орлов А. И.** — В кн.: Управление большими системами. Вып. 17. — М.: ИПУ РАН, 2007. С. 143 – 158.
18. **Смоляк С. А., Титаренко Б. П.** Устойчивые методы оценивания: статистическая обработка неоднородных совокупностей. — М.: Финансы и статистика, 1980. — 208 с.
19. Устойчивые статистические методы оценки данных. — М.: Машиностроение, 1984. — 230 с.
20. **Хьюбер П.** Робастность в статистике. — М.: Мир. 1984. — 304 с.
21. **Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В.** Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. — М.: Мир, 1989. — 512 с.
22. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
23. **Орлов А. И.** Математические методы исследования и теория измерений / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2006. Т. 72. № 1. С. 67 – 70.
24. **Орлов А. И.** Тридцать лет статистики объектов нечисловой природы (обзор) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2009. Т. 75. № 5. С. 55 – 64.
25. **Носовский Г. В., Фоменко А. Т.** Царь славян. — М.: АСТ-АСТРЕЛЬ, 2007. — 716 с.
26. **Орлов А. И.** Связь между средними величинами и допустимыми преобразованиями шкалы / Математические заметки. 1981. Т. 30. № 4. С. 561 – 568.
27. **Тюрин Ю. Н.** и др. Анализ нечисловой информации. — М.: Научный Совет АН СССР по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981. — 80 с.
28. **Горский В. Г., Гриценко А. А., Орлов А. И.** / Метод согласования кластеризованных ранжировок // Автоматика и телемеханика. 2000. № 3. С. 179 – 187.
29. **Орлов А. И.** Эконометрическая поддержка контроллинга / Контроллинг. 2002. № 1. С. 42 – 53.
30. **Орлов А. И.** Контроллинг организационно-экономических методов / Контроллинг. 2008. № 4. С. 12 – 18.
31. **Алешин Д. Н.** Экономическое обоснование эффективности инвестиционных проектов на предприятиях на основе применения эконометрического метода интервальной оценки: автореф. дис. … канд. эконом. наук. — М., 2001. 16 с.
32. **Гуськова Е. А.** Разработка организационно-экономических методов повышения эффективности деятельности промышленного предприятия на основе эконометрического подхода: автореф. дис. … канд. эконом. наук. — М., 2004. 16 с.
33. **Орлов А. И.** Философские основания устойчивого математического моделирования процессов управления промышленными предприятиями / Философия математики: актуальные проблемы / Тезисы Второй международной научной конференции, 28 – 30 мая 2009 г. — М.: МАКС Пресс, 2009. С. 284 – 287.