УДК 519.2:303.732.4

01.00.00 Физико-математические науки

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ И МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

Орлов Александр Иванович
д.э.н., д.т.н., к.ф.-м.н., профессор
РИНЦ SPIN-код: 4342-4994

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, prof-orlov@mail.ru

Цель математической статистики - разработка методов анализа данных, предназначенных для решения конкретных прикладных задач. С течением времени подходы к разработке методов анализа данных менялись. Сто лет назад принимали, что распределения данных имеют определенный вид, например, являются нормальными, и, исходя из этого, предположения развивали статистическую теорию. На следующем этапе на первое место в теоретических исследованиях выдвинулись предельные теоремы. Под "малой выборкой" понимают такую выборку, для которой нельзя применять выводы, основанные на предельных теоремах. В каждой конкретной статистической задаче возникает необходимость разделить конечные объемы выборки на два класса - те, для которых можно применять предельные теоремы, и те, для которых делать это нельзя из-за риска получения неверных выводов. Для решения этой задачи часто используют метод Монте-Карло (статистических испытаний). Более сложные проблемы возникают при изучении влияния на свойства статистических процедур анализа данных тех или иных отклонений от исходных предположения. Для изучения такого влияния также часто используют метод Монте-Карло. Основная - и не решенная в общем виде - проблема при изучении устойчивости выводов при наличии отклонений от параметрических семейств распределений состоит в том, какие распределения использовать для моделирования. Рассмотрены некоторые примеры применения метода Монте-Карло, относящиеся к деятельности нашего научного коллектива. Сформулированы основные нерешенные проблемы

Ключевые слова: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА, АНАЛИЗ ДАННЫХ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ, МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО, МАЛАЯ ВЫБОРКА, УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫВОДОВ, НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

UDC 519.2:303.732.4

Physics and mathematical sciences

INTERCONNECTION LIMIT THEOREMS AND MONTE-CARLO METHOD

Orlov Alexander Ivanovich
Dr.Sci.Econ., Dr.Sci.Tech., Cand.Phys-Math.Sci., professor

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

The purpose of mathematical statistics is development of methods for the data analysis intended to solve applied problems. Over time, approaches to the development of data analysis methods have changed. A hundred years ago, it was assumed, that the distributions of the data have a certain type, for example, they are normal distributions, and on that assumption they developed a statistical theory. The next stage, in the first place in theoretical studies there are limit theorems. By "small sample" we mean a sample, which can not be applied to conclusions based on the limit theorems. In each statistical problem there is a need to divide the final sample sizes into two classes - those for which you can apply the limit theorems, and those for which you can not do it because of the risk of incorrect conclusions. To solve this problem we often used the Monte Carlo method. More complex problems arise when studying the effect on the properties of statistical procedures for data analysis of various deviations from the original assumptions. To study such impact, we often used the Monte Carlo method as well. The basic (and not solved in a general way) problem of the study of the stability of the findings in the presence of deviations from the parametric families of distributions is the problem of choosing some distributions for using in modeling. We consider some examples of application of the Monte Carlo method, relating to the activities of our research team. We have also formulated basic unsolved problems

Keywords: MATHEMATICAL STATISTICS, APPLIED STATISTICS, DATA ANALYSIS, LIMIT THEOREMS, MONTE-CARLO METHOD, SMALL SAMPLE, STABILITY OF CONCLUSIONS, UNSOLVED PROBLEMS

1. Введение

Цель математической статистики - разработка методов анализа данных, предназначенных для решения конкретных прикладных задач. Под данными имеются в виду результаты измерений, наблюдений, испытаний, анализов, опытов, обследований.

С течением времени подходы к разработке методов анализа данных менялись. Сто лет назад принимали, что распределения данных имеют определенный вид, например, являются нормальными, и исходя из этого предположения развивали статистическую теорию. В наследство от этого периода нам остался, например, критерий Стьюдента. Од подходов этого периода отказались, поскольку стало ясно, что распределения реальных данных не укладываются в "прокрустово ложе" четырехпараметрического семейства Пирсона и тем более его подсемейств (включающих нормальные распределения, распределения Вейбулла - Гнеденко, гамма-распределения и др.).

На следующем этапе на первое место в теоретических исследованиях выдвинулись предельные теоремы. Лидеры этого направления И.А. Ибрагимов и Р.З. Хасьминский писали в 1979 г.: "Как и вся математическая статистика, теория оценивания возникла из некоторых практических задач. Для многих таких задач типична неасимптотическая постановка проблемы, когда требуется построить наилучшие для данной схемы при данном объеме статистического материала оценки. Однако решение неасимптотических задач оценивания, хотя и весьма важное само по себе, как правило, не может являться объектом достаточно общей математической теории. Более того, соответствующее решение часто сильно зависит от конкретного типа распределения, объема выборки и т.д. Так, теория малых выборок из нормального закона будет отличаться от теории малых выборок из закона Пуассона. По словам Б.В. Гнеденко и А.Н. Колмогорова [1], "познавательная ценность теории вероятностей раскрывается только предельными теоремами", и теория статистического оценивания не составляет исключения" [2].

Под "малой выборкой" понимают такую выборку, для которой нельзя применять выводы, основанные на предельных теоремах. В каждой конкретной задаче возникает необходимость разделить конечные объемы выборки на два класса - те, для которых можно применять предельные теоремы, и те, для которых делать это нельзя из-за риска получения неверных выводов.

2. Предельные теоремы и распределения при конечных объемах выборок

К сожалению, предельными теоремами нельзя непосредственно пользоваться при статистическом анализе конкретных данных. Приходится делать предположения о том, что предельные теоремы позволяют делать статистические выводы "с достаточной для практики точностью". Подобные предположения обосновывают с помощью того или иного метода прикладной математики.

Таким образом, схема исследования такова. Сначала с помощью предельных теорем получают расчетные формулы. Затем изучают точность этих формул. Например, согласно работам С.Н. Бернштейна и В. Феллера для применения нормального закона в теореме Муавра-Лапласа достаточно объема выборки 100 (т.е при объеме выборки 100 и более допредельное распределение нормированной центрированной биномиально распределенной случайной величины с достаточной для практики точностью совпадает с предельным нормальным. Второй пример - согласно расчетам магистранта МФТИ К. Виноградова использование полученной нами формулы (для синтеза плана статистического контроля на основе ограничения на предел среднего выходного уровня дефектности) обосновано для объема выборки $n > 10$. Третий пример - биномиальное приближение для гипергеометрического распределения можно использовать, когда объем генеральной совокупности N по крайней мере в 10 раз больше объема выборки n, т.е. при $N > 10\ n$.

Принципиально важной является работа по созданию таблиц критических точек двухвыборочного критерия Смирнова [3]. В ней таблицы точных распределений доведены до тех границ, за которыми можно пользоваться расчетными формулами, вытекающими из предельных распределений.

В прикладной статистике и других математических методах исследования получено много рекомендаций, вытекающих из предельных теорем, для которых точность этих рекомендаций еще не исследована достаточно подробно. При просмотре современных учебников [4 - 7], соответствующих новой парадигме математических методов исследования [8 - 9], становится очевидным, что подобные рекомендации составляют их основное содержание.

Констатируем, что к классическим инструментам прикладной статистики – предельным теоремам теории вероятностей – добавились новые, основанный на интенсивном использовании компьютеров. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) – вот партнер и конкурент асимптотическим методам математической статистики. Термин "метод Монте-Карло" объединяет обширную совокупность интеллектуальных инструментов. Например, бутстреп [10] – лишь один из таких инструментов.

3. Отклонения от параметрических семейств распределений

Более сложные проблемы возникают при изучении влияния на свойства статистических процедур анализа данных тех или иных отклонений от исходных предположения. Для изучения такого влияния часто используют метод Монте-Карло.

Как известно, математическая статистика как наука была сформирована в начале XX в. [4, 11]. Ее создатели исходили из предположения о том, что распределения статистических данных входят в те или иные параметрические семейства размерности 1 - 4. В большинстве случаев принималось (без обоснования) нормальное распределение. Исходя из этого предположения, были получены распределения Стьюдента, Фишера, хи-квадрат и др. Однако хорошо известно, что практически все распределения реальных статистических данных не являются нормальными [12].

Следовательно, имеется ***необходимость изучения свойств расчетных методов классической математической статистики, опирающихся на предположение нормальности, в ситуациях, когда это предположение не выполнено.*** Аппаратом для такого изучения наряду с методом Монте-Карло могут послужить предельные теоремы теории вероятностей, прежде всего центральная предельная теорема (ЦПТ), поскольку интересующие нас расчетные методы обычно используют разнообразные суммы. Пока подобное изучение не проведено, остается неясной научная ценность, например, применения основанного на предположении многомерной нормальности факторного анализа к векторам из переменных, принимающих небольшое число градаций и к тому же измеренных в порядковой шкале.

Одна из важных проблем - использование асимптотических результатов при конечных объемах выборок. Конечно, естественно изучить свойства алгоритма с помощью метода Монте-Карло. Однако из какого конкретного распределения, отличного от базового (например, стандартного нормального) брать выборки при моделировании? От выбора распределения зависит результат. Кроме того, датчики псевдослучайных чисел лишь имитируют случайность. До сих пор неизвестно, каким датчиком целесообразно пользоваться в случае возможного безграничного роста размерности пространства [13].

Обманчивым является часто возникающее у наивных авторов впечатление о простоте получения окончательных выводов путем примитивного применения метода Монте-Карло. Проще говоря - помоделировал, сформулировал выводы, написал статью. Разработав примитивный программный продукт из двух основных блоков (получение псевдослучайных чисел и процедуры статистического анализа), создают конвейер по изготовлению однотипных статей рассматриваемого типа.

Удивительно, что часто не указывают даже точность полученных выводов. Если с помощью n статистических испытаний оценивают вероятность p, то в предположении, что псевдослучайные числа можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины, то выборочная доля p^* имеет биномиальное распределение, деленное на n, а потому в соответствии с теоремой Муавра-Лапласа полуширина доверительного интервала, соответствующего доверительной вероятности 0,95, равна

$$1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,. \qquad (1)$$

Если p =0,5 (или близко к этому числу), то согласно (1) точность метода Монте-Карло оценивается как

$$\frac{0{,}98}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}\,. \qquad (2)$$

Следовательно, согласно (72) для оценивания со сравнительно малой точностью 0,001 необходимо провести не менее 1 000 000 статистических испытаний. Наивные авторы ограничиваются меньшим числом испытаний.

Основная - и не решенная в общем виде - проблема при изучении устойчивости выводов при наличии отклонений от параметрических семейств распределений состоит в том, какие распределения использовать для моделирования. Так, при анализе влияний отклонений от нормальности следует изучать не логистическое распределение, от которого расстояние Колмогорова до многообразия нормальных распределений не более 0,01 (см. [4]), а распределение Коши, у которого нет даже математического ожидания. Кроме тех или иных теоретически заданных распределений, целесообразно использовать эмпирические распределения данных из интересующей исследователя прикладной области. Однако ясно, что возможных отклонений от изучаемого параметрического семейства распределений бесконечно много, перебрать их все, очевидно, невозможно, а потому выводы, полученные с помощью метода Монте-Карло, всегда являются не строго доказанными, а лишь правдоподобными.

Итак, при изучении влияния отклонений распределений элементов выборки от параметрических семейств распределений основная проблема - какие распределения моделировать с целью оценки величины влияния. Речь идет как о теоретических распределениях (логистических, Коши и др.), так и об эмпирических, полученных при предыдущих исследованиях.

4. Некоторые примеры применения метода Монте-Карло

При обсуждении нацеленного на практические применения математического метода исследования естественно опираться на опыт его практического использования. Поэтому перечислим некоторые примеры применения метода Монте-Карло, относящиеся к деятельности нашего научного коллектива [29].

На использовании метода Монте-Карло основано исследование [14], посвященное изучению и сравнению свойств различных критериев однородности двух независимых выборок, а именно, реальных и номинальных уровней значимости. В этой статье продемонстрирована необходимость учета отличия, вызванного дискретностью распределения непараметрического критерия, реального уровня значимости статистического критерия от номинального (заданного).

Если возможные подмножества признаков образуют расширяющееся семейство, например, оценивается степень полинома, то естественно ввести термин «размерность модели» (используется также в многомерном шкалировании). Выполнен ряд работ по оцениванию размерности модели. Первая из них подготовлена нами во Франции в 1976 г. [15]. В ней изучена одна оценка размерности модели в регрессии, например, степени полинома в предположении, что зависимость описывается полиномом. Эта оценка была известна в литературе, но позже ее стали ошибочно приписывать А.И. Орлову, в то время как в [15] лишь изучены ее свойства, в частности, установлено, что эта оценка не является состоятельной, и найдено ее предельное геометрическое распределение. Другие, уже состоятельные оценки размерности регрессионной модели были предложены и изучены в статье [16]. Этот цикл завершила содержащая ряд уточнений работа [17]. Крайняя публикация на эту тему включает в себя обсуждение результатов изучения скорости сходимости в ранее полученных предельных теоремах методом Монте-Карло [18].

Аналогичные по методологии оценки размерности модели в задаче расщепления смесей (часть теории классификации) рассмотрены в статье [19]. Оценки размерности модели в многомерном шкалировании изучаются в работах [20 - 22]. В этих же публикациях установлено предельное поведение характеристик метода главных компонент (с помощью асимптотической теории поведения решений экстремальных статистических задач).

Упомянем также изучение методом Монте-Карло скорости сходимости к пределу характеристик влияния помех, создаваемых электровозами, на проводные линии связи [23, 24].

5. Основные нерешенные проблемы

Первая дискуссия по датчикам псевдослучайных чисел (т.е. по методу Монте-Карло) была проведена в журнале "Заводская лаборатория. Диагностика материалов" в 1985 - 1993 гг. (см. № 5, 1985 г.; №1, 1986; № 10, 1987; №3, 1990; №7, 1993 г.). Итоги были подведены в статье [25] С.М. Ермакова и нашем комментарии к ней [13].

За прошедшие 22 года возможности и доступность компьютерной техники резко выросли, в результате широки массы исследователей получили возможность использовать метод Монте-Карло в своей работе. Однако не видно адекватного роста в методологическом обосновании и теоретическом обеспечении этого метода. В результате наблюдаем не рост, а падение научного уровня ряда публикаций в этой области. Необходимо провести новую дискуссию по методу Монте-Карло, на этот раз обратив внимание не столько на свойства датчиков псевдослучайных чисел, сколько на соотношение этого метода с предельными теоремами математической статистики.

Целесообразно разделить идеальный и реальный методы Монте-Карло.

В *идеальном методе Монте-Карло* предполагаем возможность моделирования последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с заданным распределением. Как показано выше, такие последовательности могут быть использованы для решения ряда актуальных задач.

В *реальном методе Монте-Карло* необходимо учитывать, что датчики псевдослучайных чисел лишь имитируют последовательности случайных числе. Поэтому, строго говоря, их нельзя назвать датчиками случайных чисел. Согласно второму (алгоритмическому) подходу А.Н. Колмогорова к определению понятия случайности, сложность идеального датчика должна расти вместе с длиной последовательности, в то время как реально используемые датчики алгоритмически ограничены (описываются несложными алгоритмами конечной длины). Для обоснования возможности использования датчиков псевдослучайных чисел используют результаты теории чисел, как это показано С.М. Ермаковым [25]. Однако обоснование удалось найти лишь для псевдослучайных векторов заранее фиксированной размерности. Между тем часто возникает необходимость проводить испытания вплоть до осуществления некоторого события, например, до отказа технического устройства (в математической модели это может означать достижение случайным процессом некоторой границы). В прикладной статистике зачастую нужно определить момент, когда допустимо пользоваться предельным распределением. Это - задача того же типа: ищется момент, когда погрешность меньше заданной величины. В подобных задачах размерность пространства, в которых лежат рассматриваемые объекты, не фиксирована заранее.

Неизвестность для задач с ростом размерности пространства выявлена давно. Еще в 1986 г. в докладе на Первом Всемирном конгрессе Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли председатель Оргкомитета академик АН СССР Ю.В. Прохоров обращал внимание на то, что нет строгого обоснования возможности применения метода Монте-Карло в задачах с ростом размерности пространства (см. об этом в [26]).

Более простым и одновременно более практичным кажется вопрос о выборе конкретного датчика псевдослучайных чисел для использования в своей работе. Анализировавшие этой вопрос Ю.Н. Тюрин и В.Э. Фигурнов пришли к следующим выводам [27]:

1. Ходовые методы проверки датчиков псевдослучайных чисел не обеспечивают их полную проверку. Так, забракованные в [27] датчики URAND, G19BNU, датчики Аренса — Дитера — Грубе успешно проходят проверки этими методами.

2. Несмотря на сравнительно небольшое число проверенных датчиков, можно сделать вывод о преимуществе датчиков, основанных на М-алгоритме. При эффективной программной реализации увеличение времени счета в практических задачах при переходе к использованию таких датчиков не превышает нескольких процентов.

3. Следует также заметить, что были замечены случаи, когда различные датчики забраковывались при одинаковых параметрах проверки, показывая при этом почти одинаковые результаты проверки. Таким образом, различные датчики могут иметь общие недостатки. Это показывает ошибочность распространенного мнения, что совпадение результатов расчетов при использовании различных датчиков доказывает правильность этих результатов.

Можем ли мы сейчас, через 25 лет после появления статьи [27] (и других по рассматриваемому вопросу, см., например, [28]), говорить о преимуществе датчиков, основанных на М-алгоритме? Или же появились более эффективные датчики псевдослучайных чисел?

Ряд вопросов, относящихся к тематике настоящей статьи, обсуждается в статье [30] и монографии [31].

Литература

1. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. - М. - Л.: ГИТТЛ, 1949. - 264 с.
2. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. - М.: Наука, 1979. - 528 с.
3. Орлов А.И., Миронова Н.Г., Фомин В.Н., Черномордик О.М. Методика. Проверка однородности двух выборок параметров продукции при оценке ее технического уровня и качества. - М.: ВНИИСтандартизации, 1987. - 116 с.
4. Орлов А.И. Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.
5. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование : учебник : в 3 ч. Ч. 1. Нечисловая статистика. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 541 с.
6. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: учебник : в 3 ч. Ч.2. Экспертные оценки. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 486 с.
7. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование : учебник : в 3 ч. Ч.3. Статистические методы анализа данных. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. - 624 с.

8. Орлов А.И. Новая парадигма прикладной статистики // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Том 78. №1, часть I. С.87-93.

9. Орлов А.И. Новая парадигма математических методов исследования // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т.81. №.7 С. 5-5.

10. Орлов А.И. О реальных возможностях бутстрепа как статистического метода // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1987. Т.53. №10. С.82-85.

11. Орлов А.И. Основные этапы становления статистических методов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 97. С. 73-85.

12. Орлов А.И. Часто ли распределение результатов наблюдений является нормальным? // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1991. Т.57. №7. С.64-66.

13. Орлов А.И. Комментарий к статье С.М.Ермакова «О датчиках случайных чисел». // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1993. Т.59. №7. С.51-51.

14. Камень Ю.Э., Камень Я.Э., Орлов А.И. Реальные и номинальные уровни значимости в задачах проверки статистических гипотез // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1986. Т.52. №12. С.55-57.

15. Орлов А.И. Предельное распределение одной оценки числа базисных функций в регрессии // Прикладной многомерный статистический анализ. Ученые записки по статистике, т.33. - М.: Наука, 1978. С.380-381.

16. Орлов А.И. Оценка размерности модели в регрессии // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. Ученые записки по статистике, т.36. - М.: Наука, 1980. С.92-99.

17. Орлов А.И. Асимптотика некоторых оценок размерности модели в регрессии. – В сб.: Прикладная статистика. Ученые записки по статистике, т.45. - М.: Наука, 1983. С.260-265.

18. Орлов А.И. Об оценивании регрессионного полинома // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1994. Т.60. №5. С.43-47.

19. Орлов А.И. Некоторые вероятностные вопросы теории классификации // Прикладная статистика. Ученые записки по статистике, т.45. - М.: Наука, 1983. С.166-179.

20. Орлов А.И. Общий взгляд на статистику объектов нечисловой природы // Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. - М.: Наука, 1985. С.58-92.

21. Orlov A.I. On the Development of the Statistics of Nonnumerical Objects // Design of Experiments and Data Analysis: New Trends and Results. - M.: ANTAL, 1993. P.52-90.

22. Орлов А.И. Методы снижения размерности //Приложение 1 к книге: Толстова Ю.Н. Основы многомерного шкалирования: Учебное пособие для вузов. – М.: Издательство КДУ, 2006. - 160 с.

23. Карякин Р.Н., Орлов А.И., Адамов С.Ю. Вероятностная теория высших гармоник помех, создаваемых электровозами. – В сб.: Прикладной многомерный статистический анализ. Ученые записки по статистике, т.33. - М.: Наука, 1978. С.376-380.

24. Орлов А.И. Вероятностно-статистическое моделирование помех, создаваемых электровозами // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. № 106. С. 225 – 238.

25. Ермаков С.М. О датчиках случайных чисел // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1993. Т.59. №7. С.48-50.

26. Орлов А.И. Первый Всемирный конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1987. Т.53. №3. С.90-91.

27. Тюрин Ю.Н., Фигурнов В.Э. О проверке датчиков случайных чисел // Теория вероятностей и ее применения. 1990. Т.35. Вып. 1. С.156–161. URL: http://www.mathnet.ru/links/638b9757785d119ec90539d95ebf3cb7/tvp919.pdf (дата обращения 04.11.2015).

28. Орлов А.И. Комментарий II к статье В.Г. Алексеева «Об одном методе проверки датчика псевдослучайных чисел» // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1990. Т.56. №3. С.86-87.

29. Орлов А.И. Научная школа кафедры «Экономика и организация производства» в области эконометрики // Четвёртые Чарновские Чтения. Сборник трудов. Материалы IV международной научной конференции по организации производства. Москва, 5-6 декабря 2014 г. – М.: НП «Объединение контроллеров», 2014. – С.326 - 337. URL: https://yadi.sk/i/7xrB6x37eyPp3 (дата обращения 04.11.2015).

30. Орлов А.И. Компьютерно-статистические методы: состояние и перспективы // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 103. С. 163 – 195.

31. Орлов А.И., Луценко Е.В., Лойко В.И. Перспективные математические и инструментальные методы контроллинга. Под научной ред. проф. С.Г. Фалько. Монография (научное издание). – Краснодар, КубГАУ. 2015. – 600 с.

References

1. Gnedenko B.V., Kolmogorov A.N. Predel'nye raspredelenija dlja summ nezavisimyh sluchajnyh velichin. - M. - L.: GITTL, 1949. - 264 s.

2. Ibragimov I.A., Has'minskij R.Z. Asimptoticheskaja teorija ocenivanija. - M.: Nauka, 1979. - 528 s.

3. Orlov A.I., Mironova N.G., Fomin V.N., Chernomordik O.M. Metodika. Proverka odnorodnosti dvuh vyborok parametrov produkcii pri ocenke ee tehnicheskogo urovnja i kachestva. - M.: VNIIStandartizacii, 1987. - 116 s.

4. Orlov A.I. Prikladnaja statistika. — M.: Jekzamen, 2006. — 671 s.

5. Orlov A.I. Organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie : uchebnik : v 3 ch. Ch. 1. Nechislovaja statistika. – M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2009. — 541 s.

6. Orlov A.I. Organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie: uchebnik : v 3 ch. Ch.2. Jekspertnye ocenki. M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2011. 486 s.

7. Orlov A.I. Organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie : uchebnik : v 3 ch. Ch.3. Statisticheskie metody analiza dannyh. - M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana, 2012. - 624 s.

8. Orlov A.I. Novaja paradigma prikladnoj statistiki // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 2012. Tom 78. №1, chast' I. S.87-93.

9. Orlov A.I. Novaja paradigma matematicheskih metodov issledovanija // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 2015. T.81. №.7 S. 5-5.

10. Orlov A.I. O real'nyh vozmozhnostjah butstrepa kak statisticheskogo metoda // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1987. T.53. №10. S.82-85.

11. Orlov A.I. Osnovnye jetapy stanovlenija statisticheskih metodov // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2014. № 97. S. 73-85.

12. Orlov A.I. Chasto li raspredelenie rezul'tatov nabljudenij javljaetsja normal'nym? // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1991. T.57. №7. S.64-66.

13. Orlov A.I. Kommentarij k stat'e S.M.Ermakova «O datchikah sluchajnyh chisel». // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1993. T.59. №7. S.51-51.
14. Kamen' Ju.Je., Kamen' Ja.Je., Orlov A.I. Real'nye i nominal'nye urovni znachimosti v zadachah proverki statisticheskih gipotez // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1986. T.52. №12. S.55-57.
15. Orlov A.I. Predel'noe raspredelenie odnoj ocenki chisla bazisnyh funkcij v regressii // Prikladnoj mnogomernyj statisticheskij analiz. Uchenye zapiski po statistike, t.33. - M.: Nauka, 1978. S.380-381.
16. Orlov A.I. Ocenka razmernosti modeli v regressii // Algoritmicheskoe i programmnoe obespechenie prikladnogo statisticheskogo analiza. Uchenye zapiski po statistike, t.36. - M.: Nauka, 1980. S.92-99.
17. Orlov A.I. Asimptotika nekotoryh ocenok razmernosti modeli v regressii. – V sb.: Prikladnaja statistika. Uchenye zapiski po statistike, t.45. - M.: Nauka, 1983. S.260-265.
18. Orlov A.I. Ob ocenivanii regressionnogo polinoma // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1994. T.60. №5. S.43-47.
19. Orlov A.I. Nekotorye verojatnostnye voprosy teorii klassifikacii // Prikladnaja statistika. Uchenye zapiski po statistike, t.45. - M.: Nauka, 1983. S.166-179.
20. Orlov A.I. Obshhij vzgljad na statistiku ob#ektov nechislovoj prirody // Analiz nechislovoj informacii v sociologicheskih issledovanijah. - M.: Nauka, 1985. S.58-92.
21. Orlov A.I. On the Development of the Statistics of Nonnumerical Objects // Design of Experiments and Data Analysis: New Trends and Results. - M.: ANTAL, 1993. R.52-90.
22. Orlov A.I. Metody snizhenija razmernosti //Prilozhenie 1 k knige: Tolstova Ju.N. Osnovy mnogomernogo shkalirovanija: Uchebnoe posobie dlja vuzov. – M.: Izdatel'stvo KDU, 2006. - 160 s.
23. Karjakin R.N., Orlov A.I., Adamov S.Ju. Verojatnostnaja teorija vysshih garmonik pomeh, sozdavaemyh jelektrovozami. – V sb.: Prikladnoj mnogomernyj statisticheskij analiz. Uchenye zapiski po statistike, t.33. - M.: Nauka, 1978. S.376-380.
24. Orlov A.I. Verojatnostno-statisticheskoe modelirovanie pomeh, sozdavaemyh jelektrovozami // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2015. № 106. S. 225 – 238.
25. Ermakov S.M. O datchikah sluchajnyh chisel // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1993. T.59. №7. S.48-50.
26. Orlov A.I. Pervyj Vsemirnyj kongress Obshhestva matematicheskoj statistiki i teorii verojatnostej im. Bernulli // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1987. T.53. №3. S.90-91.
27. Tjurin Ju.N., Figurnov V.Je. O proverke datchikov sluchajnyh chisel // Teorija verojatnostej i ee primenenija. 1990. T.35. Vyp. 1. S.156–161. URL: http://www.mathnet.ru/links/638b9757785d119ec90539d95ebf3cb7/tvp919.pdf (data obrashhenija 04.11.2015).
28. Orlov A.I. Kommentarij II k stat'e V.G. Alekseeva «Ob odnom metode proverki datchika psevdosluchajnyh chisel» // Zavodskaja laboratorija. Diagnostika materialov. 1990. T.56. №3. S.86-87.
29. Orlov A.I. Nauchnaja shkola kafedry «Jekonomika i organizacija proizvodstva» v oblasti jekonometriki // Chetvjortye Charnovskie Chtenija. Sbornik trudov. Materialy IV mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii po organizacii proizvodstva. Moskva, 5-6 dekabrja 2014 g. – M.: NP «Ob#edinenie kontrollerov», 2014. – S.326 - 337. URL: https://yadi.sk/i/7xrB6x37eyPp3 (data obrashhenija 04.11.2015).

30. Orlov A.I. Komp'juterno-statisticheskie metody: sostojanie i perspektivy // Politematicheskij setevoj jelektronnyj nauchnyj zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2014. № 103. S. 163 – 195.

31. Orlov A.I., Lucenko E.V., Lojko V.I. Perspektivnye matematicheskie i instrumental'nye metody kontrollinga. Pod nauchnoj red. prof. S.G. Fal'ko. Monografija (nauchnoe izdanie). – Krasnodar, KubGAU. 2015. – 600 s.